Thèse de doctorat à l'université de Strasbourg

école doctorale MSII

Soutenue le 7 novembre 2023, par

Raoul Hallopeau

Sous la direction de

Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Adriano Marmora

Microlocalisation des $\mathcal{D}$-modules coadmissibles sur une courbe formelle

Devant la commission d'examen composée de :

Christine Huyghe, directrice de thèse
Tobias Schmidt, directeur de thèse
Adriano Marmora, directeur de thèse
Daniel Caro, rapporteur
Tomoyuki Abe, rapporteur
Sophie Morel, examinatrice
Arthur-César Le Bras, examinateur
Simon Wadsley, examinateur

Remerciements

Les premières personnes que je tiens à remercier chaleureusement sont mes directeurs de thèse, Christine Huyghe et Tobias Schmidt, sans qui je n'aurai pas fait de thèse ! Je souhaite leur exprimer ma gratitude pour le temps consacré à discuter avec moi de mathématiques, et parfois d'autres choses. Je remercie tout d'abord Tobias pour mon année à Rennes. Je remercie Christine pour les heures hebdomadaires à parler avec moi, à répondre à mes questions parfois naïves et simples, pour les quelques cours de géométrie analytique rigide qu'elle nous donna à Florian et moi, pour la remise à niveau nécessaire qu'elle me fit faire en géométrie algébrique en lisant le Hartshorn ! Je la remercie aussi pour son regard bienveillant et son aide dans mon travail, aussi bien en mathématiques que pour les rappels administratifs, tâches que je fais trop souvent au dernier moment, résigné. Je souhaite ensuite exprimer ma reconnaissance à Adriano Marmora pour avoir consenti à devenir mon directeur à Strasbourg après le départ de Christine à Besançon, et pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Daniel Caro et Tomoyuki Abe pour avoir accepté le rôle de rapporteur de ma thèse. Je les remercie pour la relecture de mon manuscrit, le temps passé à le faire et pour leurs commentaires et questions sur mon travail. Je remercie enfin Sophie Morel, Arthur-César Le Bras et Simon Wadsley d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je leur suis reconnaissant à tous d'assister à ma soutenance.

Je remercie aussi de nombreux membres de l'Irma à Strasbourg et de l'Irmar à Rennes, aussi bien les chercheurs que les membres du personnel, pour leur gentillesses à mon égard. Je souhaite remercier tout particulièrement Bernard le Stum et Matthieu Romagny pour toutes les réponses qu'ils apportèrent à mes questions mathématiques et Marie-Aude Verger pour son accueil chaleureux à Rennes.

Je remercie enfin les innombrables doctorants, postdoctorants et ATER m'ayant entouré durant ma thèse, aussi bien à Rennes qu'à Strasbourg, pour tous les moments de discussions mathématiques, de détente, de rigolade, d'appréciation de bons repas et de jeux !

Commençons par mes deux cobureaux adorés, Basile au déguisement de tigre et Florian aux multiples chapeaux, avec qui j'ai bien trop peu joué à TFT, et bien ri des heures durant. Sans eux, je n'aurais pas découvert le plaisir de venir quotidiennement au bureau, et la joie de jouer presque quotidiennement au Tarot ! Je n'oublie pas non plus mon cobureau de quelques mois, Clarence, ami de longue date, très grand cuisinier, valeur sûre pour manger, que je remercie grandement de m'avoir fait découvrir Court-Metrange ! Ils ont transformé ma thèse en trois sympathiques années remplies de chaleureux souvenirs.

Puis vient Archia, imposant, drôle, toujours partant pour s'amuser par une bêtise et pour manger deux ou trois gâteaux par goûters. Ce dernier est souvent suivi de son jeune et insouciant disciple Thomas Partant (de son vrai nom Agugliaro), presque toujours motivé et souriant. Je remercie Clément pour son innocence simple et naïve à mon égard, qui jamais ne se joue de moi ! Je suis ensuite reconnaissant envers Victoria pour sa gentillesse et ses câlins, doctorante parfois accompagnée de son adorable et mignon Dobby. Je remercie aussi Céline pour tous les moments passés avec elle et pour ses bons conseils oenologiques ! Pourvu qu'ils durent. Et que dire du ravissant sourire narquois d'Adam lorsque qu'il me pousse à la porte de son bureau ? Cela vaut-il mieux que les amusantes histoires de Romane, histoires parfois inventées de toute pièce pour nous faire marcher ? Je profite du temps de réfléxion laissé par ses dures questions pour saluer notre cher président des doctorants, Roméo ! Et pourvu que le pouvoir ne lui monte pas trop à la tête... Rajoutons à cette longue liste mon inséparable grande soeur rencontrée il y a moins d'un an, Rym à la démarche assurée et autoritaire, qui sait me faire rire abondamment ! Merci pour ses merveilleuses lectures d'histoires enfantines que j'espère entendre encore, pour toutes ses riches discussions et pour ses magnifiques chansons.

Je rends hommage à d'autres chers amis trop loin d'ici, croisés à Rennes au cours d'une belle année : Alice pour ses innombrables câlins, Matilde pour toutes les heures passées avec elle en compagnie de ses nombreux Erasmus et Théo pour ses suggestions de bons films et les parties de Magic !

Je suis aussi reconnaissant à de nombreux autres doctorants et postdoctorants devenus pour la plupart des amis : Alexander, Michael, Antoine, Brieuc, Thilbault, Thomas, Hao, Paul, Yoann, Romain, Suzanne, Tom, Alex, Nicolas, Jean-Pierre, Ludovic, Robin, Léopold, Jérome, Marie, Axel, Lucien, Rémi. Je m'excuse par avance si j'oublie certaines personnes, ma mémoire est faillible ... Je prie aussi à tous les nouveaux arrivants de cette année de bien vouloir me pardonner de ne pas les citer !

Je remercie finalement ma famille pour son soutient et sa patience au cours ! Je tiens à remercier tout particulièrement ma mère, qui fut et qui est très présente, toujours prête a m'aider. Je suis heureux qu'elle puisse venir à ma soutenance, accompagnée de Jean-Pierre ! Elle m'a beaucoup accompagné dans mes études et dans ma thèse, bien que parfois ce ne soit pas facile. Et j'espère qu'elle le fera encore. Un dernier mot pour ma soeur et pour mon frère : merci !

Table des matières

Introduction

Commençons par décrire brièvement la théorie classique des $\mathcal{D}$-modules dans le cas d'une variété algébrique complexe X lisse. Soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural de X et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X. Localement, sur un voisinage ouvert affine U de chaque point, la variété X admet un système de coordonnées locales $\{x_1, \dots, x_n\}$, où n est la dimension de X. Notons $\partial_1, \dots, \partial_n$ les dérivations associées et $\partial^m := \partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n}$ pour tout n-uplet d'entiers naturels $m \in \mathbb{N}^n$. Sur l'ouvert U, le faisceau tangent Θ_X de X est le $\mathcal{O}_U$-module libre engendré par les dérivations $\partial_1, \dots, \partial_n$:

$$\Theta_U = \mathcal{O}_U \cdot \partial_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_U \cdot \partial_n$$

Nous identifions $\mathcal{O}_X$ et Θ_X à des sous-faisceaux de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$. Par définition, $\mathcal{D}_X$ est le sous-faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres des endomorphismes $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X)$ de $\mathcal{O}_X$ engendré par $\mathcal{O}_X$ et Θ_X. Nous avons

$$\mathcal{D}_U = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^n} \mathcal{O}_U \cdot \partial^m$$

Notons que les algèbres $\mathcal{D}_X(U)$ ne sont pas commutatives. En effet,

$$[\partial_i, x_j] = \partial_i x_j - x_j \partial_i = \delta_{ij}$$

Expliquons rapidement comment les $\mathcal{D}_X$-modules sont liés aux systèmes d'équations différentielles. Pour simplifier, supposons que la dimension n de X est égale à un. Considérons un unique opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_X(U)$ d'ordre $d \in \mathbb{N}$:

$$P = \sum_{m=0}^{d} a_m \cdot \partial^m, \quad a_m \in \mathcal{O}_X(U), \quad a_d \neq 0$$

Nous nous intéressons aux solutions u dans $\mathcal{O}_X(U)$ de l'équation différentielle $Pu = 0$. Posons $M = \mathcal{D}_U / \mathcal{D}_U \cdot P$. C'est un $\mathcal{D}_U$-module à gauche cohérent. Nous vérifions alors que nous disposons d'un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_U}(M, \mathcal{O}_U) \simeq \{u \in \mathcal{O}_X(U) : \; Pu = 0\}$$

En effet, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_U}(M, \mathcal{O}_U) \simeq \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{D}_U, \mathcal{O}_U) : \ f(P) = 0\}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{D}_U, \mathcal{O}_U) \simeq \mathcal{O}_U$ via $f \mapsto f(1)$. Ainsi, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U{\cdot}P, \mathcal{O}_U)$ est l'espace des solutions dans $\mathcal{O}_U$ de l'équation différentielle $Pu = 0$. Plus généralement, l'espace des solutions d'un système d'équations différentielles s'obtient en considérant un certain $\mathcal{D}_X$-module de présentation finie.

La variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M est une sous-variété fermée du fibré cotangent T^*X de X. C'est un object géométrique encodant de nombreuses informations sur le module M. La variété caractéristique est définie de manière algébrique en considérant le gradué du faisceau $\mathcal{D}_X$ pour la filtration donnée par l'ordre des opérateurs différentiels. Bien que l'algèbre $\mathcal{D}_X(U)$ ne soit pas commutative, son gradué $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X(U))$ l'est puisque le commutateur diminue strictement l'ordre des opérateurs différentiels non nuls. Ainsi, $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X(U)) \simeq \mathcal{O}_X(U)[T_1, \dots, T_n]$. Il en découle que $T^*X \simeq \mathrm{Spec}\,(\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X))$ en tant que schéma sur $\mathbb{C}$. Voila comment nous relions le faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X$ au faisceau cotangent T^*X de X. Reprenons l'exemple précédent : $M = \mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U \cdot P$ où

$$P = \sum_{m=0}^{d} a_m \cdot \partial^m, \quad a_m \in \mathcal{O}_X(U), \quad a_d \neq 0$$

Alors la variété caractéristique $\mathrm{Car}(M)$ de M est simplement l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe $a_d \cdot \xi^d$ sur le fibré cotangent T^*U.

A l'origine, la variété caractéristique fut introduite à l'aide de l'analyse microdifférentielle pour les variétés analytiques complexes. Un faisceau d'opérateurs microdifférentiels $\mathcal{E}_X$ est défini au niveau du fibré cotangent T^*X en inversant localement la variable ξ. En notant $\pi : T^*X \to X$ la projection canonique, la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M est alors le support du $\mathcal{E}_X$-module cohérent $\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} \pi^{-1}(M)$ dans T^*X.

Il a été démontré par Sato-Kawai-Kashiwara que la variété caractéristique $\mathrm{Car}(M)$ de M est involutive pour la structure simplectique canonique sur le fibré cotangent T^*X. Plus précisément, cela signifie que si $\mathcal{I}_M$ est l'idéal de définition de la variété caractéristique $\mathrm{Car}(M)$, alors le crochet de Poisson $\{\mathcal{I}_M, \mathcal{I}_M\}$ est contenu dans l'idéal $\mathcal{I}_M$. La preuve de ce théorème sur la variété caractéristique repose sur la caractéristique nulle du plan complexe $\mathbb{C}$. Ce dernier a pour conséquence le fait suivant : si le module M est non nul, alors $\dim(\mathrm{Car}\, M) \geq \dim X$. Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité de Bernstein.

Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M est appelé holonome si sa variété caractéristique est de dimension minimale, autrement dit si $\dim(\mathrm{Car}\, M) \leq \dim X$. La catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes est abélienne et stable par les six opérations de Grothendieck. De plus, elle possède de bonnes propriétés de finitude. Par exemple, tout $\mathcal{D}_X$-module holonome est de longueur finie et les dimensions des espaces des solutions holomorphes du module M sont de dimension complexe finie. Par ailleurs, les faisceaux $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_{X^{an}}}(M^{an}, \mathcal{D}_{X^{an}})$ sont des faisceaux constructibles. Ainsi, la notion de $\mathcal{D}_X$-module holonome est une généralisation naturelle de la notion d'équation différentielle ordinaire linéaire et de module à connexion intégrable dans le cas de variétés complexes lisses de dimension quelconque. Disposer d'une telle catégorie de modules holonomes fournit des outils très efficaces pour étudier la cohomologie de Rham des variétés complexes. Un résultat fondamental de cette théorie est que l'holonomie se teste sur les courbes lisses. Autrement dit, un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M est holonome si et seulement si pour toute courbe lisse C et pour tout morphisme $f : C \to X$, le module $f^!M$ est holonome.

Par ailleurs, une autre motivation pour l'étude des $\mathcal{D}$-modules est le théorème de localisation de Beilinson-Bernstein et Brylinski-Kashiwara [5, 9], obtenu dans les années 1980. Ce resultat fournit une equivalence de categories entre les $\mathcal{D}$-modules sur la variété de drapeaux d'un groupe semi-simple G et les représentations de l'algèbre de Lie de G. Ce théorème a permis de démontrer les conjectures de Kazhdan-Lusztig portant sur les représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes.

Enfin, les modules holonomes réguliers permettent de généraliser à la dimension supérieur la correspondance de Riemman Hilbert. En quelques mots, la correspondance Riemann-Hilbert traite le problème suivant. La monodromie d'une équation différentielle linéaire ordinaire permet d'obtenir une représentation du groupe fondamental de l'espace de base. Le 21ème problème original de Hilbert s'intéresse à la question réciproque : pour toute représentation du groupe fondamental de l'espace de base, existe-t-il une équation différentielle ordinaire, avec des singularités régulières, dont la représentation monodromique coïncide avec celle donnée ? Ce problème est aujourd'hui résolu. Les D-modules holonomes réguliers correspondent, par la correspondance de Riemann-Hilbert, aux faisceaux pervers. Par ailleurs, cette correspondance a récemment été étendue au cas irrégulier par Kashiwara, d'Agnolo et Schapira.

Passons maintenant au cadre arithmétique. Un enjeu principal dans ce contexte consiste à y généraliser la notion de $\mathcal{D}$-modules holonomes. Une catégorie constituée de tels modules permettra par exemple d'étudier les cohomologies cristalline et rigide. Des catégories de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques holonomes avec Frobenius ont été construites par Berthelot et Caro de deux manières différentes. Berthelot a défini la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}$-module arithmétique muni d'un Frobenius comme une sous-variété fermée du fibré cotangent de l'espace de base, ce qui lui a permis de définir la notion d'holonomie comme dans le cas complexe. Caro a quant à lui construit une catégorie de $\mathcal{D}$-modules surholonomes munis d'un Frobenius a priori stable par les six opérations et a montré que cette catégorie coïncide avec la catégorie de Berthelot dans le cas des schémas quasi-projectifs.

Sur un schéma formel lisse, les opérateurs différentiels considérés ne sont plus d'ordre fini. La méthode classique des variétés complexes pour définir la variété caractéristique ne fonctionne donc plus. Berthelot introduit une variété caractéristique des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en se ramenant à des opérateurs différentiels d'ordre fini sur des corps finis. Dans ce cadre, les opérateurs différentiels sont finis et la définition classique complexe des modules holonomes s'adapte en considérant de bonnes filtrations. Cependant, pour se ramener à ce cas simple, Berthelot utilise l'existence locale d'un morphisme de Frobenius sur le schéma formel $\mathfrak{X}$. Une autre approche possible consiste à construire un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels, comme pour les variétés complexes. Une telle construction dans le cas arithmétique a déjà été faite par exemple par Adriano Marmora et Tomoyuki Abe dans [2], où la microlocalisaton sert ensuite à démontrer la formule du produit.

Dans cette thèse, nous définissons une variété caractéristique pour les $\mathcal{D}$-modules coadmissibles. Rappelons que les $\mathcal{D}$-modules coadmissibles sont des systèmes projectifs de modules sur des anneaux s'obtenant comme sous-anneaux des opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot. Introduisons quelques notations. Soit $\mathcal{V}$ un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0, p)$. Notons $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{V})$ son corps des fractions. Nous fixons un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse $\mathfrak{X}$ dont l'idéal de définition est engendré par une uniformisante ω de $\mathcal{V}$. Soit $\mathfrak{X}_K$ l'espace analytique rigide associé à $\mathfrak{X}$. Nous disposons de deux constructions des $\mathcal{D}$-modules coadmissibles, équivalentes au niveau de la fibre générique $\mathfrak{X}_K$ du schéma formel lisse $\mathfrak{X}$. La première est décrite dans l'article [13] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Cette construction repose sur l'ajout d'un niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$ aux faisceaux des opérateurs différentiels de Berthelot, et définit une catégorie de $\mathcal{D}$-modules coadmissibles au niveau de l'espace de Zariski Riemann $\langle \mathfrak{X} \rangle$. La seconde construction, directement sur l'espace analytique rigide $\mathfrak{X}_K$, est due à Ardakov-Wadsley dans l'article [4].

Nous introduisons une variété caractéristique pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de Huyghe-Schmidt-Strauch dans le cas d'une courbe formelle $\mathfrak{X}$. Le cas des courbes est bien entendu restrictif. Mais, même si nous ne disposons pas encore d'une définition générale de l'holonomie pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles, il est raisonnable de penser que l'holonomie dans ce cadre devrait se tester sur les courbes, comme dans le cas classique. Il est donc fondamental de comprendre cette notion pour les courbes, et d'étudier les modules coadmissibles sur les courbes anlytiques lisses, ou les courbes fibres génériques des courbes formelles lisses.

Par ailleurs, il existe des versions G-équivariantes de ces deux constructions de modules coadmissibles ; voir par exemple [12, 13]. Elles permettent d'établir un théorème de localisation analogue au théorème obtenu dans le cas complexe. Nous considérons alors la catégorie des représentations localement analytiques admissibles du groupe de Lie p-adique $G(K)$, où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_P$ et G est un groupe réductif sur K (par exemple, $G = GL_n$). La variété caractéristique est aussi un invariant associé aux représentations localement analytiques. Ainsi, disposer en général d'une variété caractéristique nous permettrait de classifier les $\mathcal{D}$-modules irréductibles équivariants ou non et d'en déduire une classification de telles représentations.

Afin d'introduire une variété caractéristique pour une courbe formelle $\mathfrak{X}$ lisse, nous construisons un microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$ de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ des opérateurs différentiels surconvergeants. Une telle approche a déjà été faite par Tomoyuki Abe dans l'article [1] pour les opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot. Il démontre que ses microlocalisés permettent de retrouver la variété caractéristique des $\mathcal{D}$-modules lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe formelle lisse quasi-compact. Par ailleurs, Tomoyuki Abe a du faire face au même difficultés techniques que dans notre cas pour le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$: trouver des microlocalisés pour chaque rang m admettant des morphismes de transitions compatibles à ceux des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. Le travail de cette thèse est très proche de celui de Tomoyuki Abe pour des opérateurs différentiels légèrement différents : nous rajoutons des niveaux de congruences k au problème. Il nous faut alors trouver des microlocalisés admettant des morphismes de transition compatibles avec ceux de l'article [13] pour les différents niveaux de congruences $k \in \mathbb{N}$. Nous oublions donc les rangs m pour les remplacer par des niveaux de congruences k. Par ailleurs, la construction du microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$ est délicate pour une autre raison : les K-algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, pour U un ouvert affine muni d'une coordonnée étale, ne sont pas commutatives et ne vérifient pas les conditions de Ore. Il nous faut donc utiliser un autre critère de localisation. En pratique, le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$ est la plus petite algèbre contenant $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ dans laquelle un opérateur différentiel est inversible si et seulement si cet opérateur est fini de coefficient dominant inversible.

Nous démontrons dans le chapitre 5, plus spécifiquement dans la proposition 5.5.3, que la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ vérifie l'inégalité de Bernstein : le module $\mathcal{M}$ est non nul si et seulement si $\dim(\operatorname{Car}\mathcal{M}) \geq \dim \mathfrak{X} = 1$. De plus, notre catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes définit une sous-catégorie abélienne des modules faiblement holonomes introduits par Ardakov-Bose-Wadsley dans l'article [3] en utilisant la caractérisation cohomologique des modules holonomes.

Par la suite, nous aimerions faire passer notre construction au éclatements admissibles de $\mathfrak{X}$ afin de définir une variété caractéristique au niveau de l'espace de Zariski Riemann $\langle\mathfrak{X}\rangle$. Enfin, nous espérons généraliser cette construction au cas équivariant puis aux dimensions supérieures.

Rentrons maintenant, et plus précisément, dans le vif du sujet cette thèse. L'object principal que nous considérons est le faisceau des opérateur différentiels $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ introduit dans l'article [13] par Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Il s'agit d'un faisceau de sous-algèbres du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ des opérateurs différentiels cristallins auquel nous rajoutons un paramètre $k \in \mathbb{N}$ appelé niveau de congruence. Soit U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ sur lequel nous disposons d'un système de coordonnées étales $(x_1, \ldots, x_d)$. Si $\partial_1, \ldots, \partial_d$ sont les dérivations associées, alors

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \ \text{ tels que } \ a_\alpha \cdot \omega^{-k|\alpha|} \underset{|\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

avec $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, nous retrouvons le faisceau de Berthelot $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ pour le niveau $m = 0$. Notons $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} K$. Pour tous entiers $k' \geq k$, nous disposons d'une inclusion d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Ces inclusions locales induisent un morphisme de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ entre les faisceaux pour les niveaux de congruences k et $k+1$. Notons $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ le faisceau limite projective des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.

Rajouter un niveau de congruence k au faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ des opérateurs différentiels cristallins est très intéressant pour plusieurs raisons brièvement décrites ci-dessous. Tout d'abord, les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ pour les différents niveaux de congruences k interviennent naturellement pour résoudre certaines questions données par exemple dans l'article [14] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ apparaissent dans l'étude de représentations localement analytiques de groupes de Lie p-adique. Ils s'avèrent aussi utiles pour regarder des isocristaux surconvergents dans le cas ramifié.

Par ailleurs, d'un point de vue conceptuel, les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ sont pertinents. En effet, nous pouvons associer aux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ des fonctions analytiques sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$ convergents sur une bande horizontale de l'espace analytique rigide associé, le fibré cotangent rigide $T^*\mathfrak{X}_K$. Les opérateurs de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ définissent des fonctions sur $T^*\mathfrak{X}_K$ convergents sur un domaine grossissant avec k. Ces régions recouvrent $T^*\mathfrak{X}_K$ lorsque k tend vers l'infini. Plus précisément, soit $(x_1, \dots, x_n, \xi_d, \dots, \xi_d)$ un système de coordonnées locales sur T^*U associée aux coordonnées étales de départ sur U. Nous pouvons associer à tout opérateur $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha(x) \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$ de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ un élément $P(x,\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha(x) \cdot \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}$ du fibré cotangent rigide T^*U_K. La fonction $P(x,\xi)$ converge sur la bande horizontale $\{|\xi_1| \leq 1, \dots, |\xi_d| \leq 1\}$ de T^*U_K. Un opérateur différentiel P de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ définit une fonction analytique $P(x,\xi)$ convergente sur la bande horizontale $\{|\xi_1| \leq p^k, \dots, |\xi_d| \leq p^k\}$. Ainsi, les opérateurs différentiels de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) = \bigcap_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ induisent des fonctions analytiques entières sur le fibré cotangent rigide $T^*\mathfrak{X}_K$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module à gauche cohérent. Sa variété caractéristique $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ est définie en généralisant la construction de Berthelot pour un niveau de congruence k comme suit. Notons κ le corps résiduel de $\mathcal{V}$ et $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \mathrm{Spec}\,\kappa$ la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$. Rappelons que κ est de caractéristique p. La réduction $M = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ modulo ω de $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent, où $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est un faisceau d'opérateurs différentiels sur X. Les opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{X,k}$ étant finis, on munit $\mathcal{D}_{X,k}$ de la filtration croissante exhaustive donnée par l'ordre des opérateurs différentiels. Classiquement, la variété caractéristique de M est construite comme une sous-variété fermée du fibré cotangent T^*X de X. La variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est par définition celle de M. Un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent dont la variété caractéristique est de dimension au plus la dimension de $\mathfrak{X}$ est appelé module holonome. Cependant, les méthodes utilisées dans le monde des variétés complexes ne s'appliquent plus puisque la caractéristique de κ est strictement positive (la fibre spéciale X de $\mathfrak{X}$ est un κ-schéma). Le fait que les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-modules holonomes soient de longueur finie n'est pas connu en général.

Introduisons ensuite le faisceau limite projective $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Localement, si U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ sur lequel on dispose d'un système de coordonnées étales, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est la K-algèbre de Fréchet-Stein donnée par

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}^{\infty} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} \,:\, a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \ \ \text{tq} \ \ \forall \eta > 0,\ \lim_{|\alpha|\to\infty} a_\alpha \cdot \eta^n = 0 \right\}.$$

Nous nous intéressons dans cette thèse tout particulièrement aux $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. Rappelons qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module isomorphe à une limite projective $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$ tels que les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ induisent un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-linéaire

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$$

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible non nul. Les morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ n'induisent pas de morphismes naturels intéressants entre les différentes variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$. En effet, les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ sont triviaux après réduction modulo ω. Plus précisément, le morphisme induit de κ-algèbres $\mathcal{D}_{X,k+1}(U) \to \mathcal{D}_{X,k}(U)$ envoie un opérateur différentiel sur son terme constant. Nous ne pouvons donc pas obtenir une variété caractéristique du module $\mathcal{M}$ à partir des variétés caractéristiques des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$. Nous ne disposons pas dans ce cadre général d'une bonne notion de variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles.

Afin de construire une variété caractéristique pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe formelle, nous introduisons un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$. La variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$ d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est alors une partie fermée du fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$ qui contient les variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ pour les niveaux de congruences k suffisamment grands. Le module $\mathcal{M}$ est dit holonome si $\dim(\mathrm{Car}(\mathcal{M})) \leq 1$. Nous démontrons dans le chapitre 6 que tout module holonome est un module à connexion intégrable sur un certain ouvert de $\mathfrak{X}$. Par ailleurs, nous montrons dans le même chapitre que tout module holonome est faiblement holonome au sens de [3] et que son dual reste un module holonome.

Restreignons nous maintenant au cas d'une courbe formelle lisse $\mathfrak{X}$. Avec nos hypothèses sur $\mathfrak{X}$, les modules coadmissibles forment une catégorie abélienne équivalente à la catégorie des modules coadmissibles sur l'espace de Zariski-Riemann associé à $\mathfrak{X}$ d'après la proposition 3.2.5 de [13]. Ainsi, ce travail permettra plus tard de définir une notion d'holonomie dans le cas des courbes analytiques rigides et donc pour la catégorie des modules coadmissibles introduite dans l'article [4] de K. Ardakov et S. Wadsley.

Expliquons désormais plus en détails les idées de notre construction. Nous commençons par étudier le cas des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents pour un niveau de congruence k fixé dans les chapitres 1 et 2. Pour ce faire, nous nous inspirons des résultats de Laurent Garnier, qui a démontré dans l'article [10] que les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes sont de longueur finie lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe formelle. Nous généralisons ce résultat à un niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$ quelconque toujours pour une courbe formelle $\mathfrak{X}$. Nous adaptons dans ces deux premiers chapitres les constructions et les preuves de Laurent Garnier pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

Le chapitre 1 contient des résultats généraux sur le faisceau d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et sur les bases de division d'un idéal cohérent de ce dernier. Ensuite, nous consacrons le chapitre 2 aux résultats et aux propriétés des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes. Sous l'hypothèse $\dim \mathfrak{X} = 1$, l'inégalité de Bernstein est vérifiée dans la proposition 2.3.2 pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}$: le module $\mathcal{M}$ est non nul si seulement si $\dim(\mathrm{Car}(\mathcal{M})) \geq 1$. Détenir une catégorie de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes est un excellent début dans le but de définir une bonne catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles holonomes. Nous déduisons de l'inégalité de Bernstein les caractérisations équivalentes suivantes des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes détaillées dans le chapitre 2.

Proposition. *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. *Le module $\mathcal{M}$ est holonome.*
2. *Il existe un idéal non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{M} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$.*
3. *Le module $\mathcal{M}$ est de longueur finie.*
4. *Le module $\mathcal{M}$ est de torsion : pour tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ et pour toute section $m \in \mathcal{E}(U)$, il existe un opérateur P de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ non nul tel que $P \cdot m = 0$.*
5. *Il existe un ouvert non vide U de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{|U}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}|U}$-module libre de rang fini. Autrement dit, $\mathcal{M}_{|U}$ est un module à connexion intégrable.*
6. *Pour tout entier $d \neq 1$, $\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$.*

Revenons maintenant aux $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. Dans le chapitre 3, nous commençons par rappeler brièvement la définition et les principales propriétés du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$. Nous introduisons ensuite les modules faiblement holonomes pour une courbe formelle comme Ardakov-Bose-Wadsley l'ont fait dans l'article [3] pour un espace analytique rigide. Les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents à droite $\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible à droite. Nous pouvons définir le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible à droite

$$\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

Le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est alors appelé faiblement holonome si les modules $\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ sont nuls pour tout entier d différent de 1. Nous démontrons qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome si et seulement si il existe un niveau de congruence à partir duquel les modules $\mathcal{M}_k$ sont tous holonomes. Un module faiblement holonome n'est pas nécessairement de longueur finie. Par exemple, tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ avec P un opérateur différentiel infini est faiblement holonome tout en étant de longueur infinie.

Nous construisons finalement dans la dernière et troisième section du chapitre 3 une sous-catégorie abélienne des modules faiblement holonomes formée de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de longueur finie. Elle est constituée des modules coadmissibles $\mathcal{M} \simeq \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ vérifiant les deux points suivants :

1. Il existe un rang k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\mathcal{M}_k$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome.
2. La limite supérieure pour $k \geq k_0$ des multiplicités des modules $\mathcal{M}_k$ est finie.

Cette catégorie n'est pas triviale puisqu'elle contient les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ dès que P est un opérateur différentiel fini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$. Nous montrons de plus que les modules coadmissibles à connexion intégrable appartiennent à cette catégorie. Ils sont donc de longueur finie.

L'étape suivante de cette thèse consiste à introduire une bonne catégorie de modules holonomes pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ dans les chapitres 4, 5 et 6. Cependant, nous ne pouvons pas le faire directement à partir des variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$. En effet, comme il a déjà été dit plus tôt dans l'introduction, les morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ n'induisent pas de morphismes intéressants non triviaux entre les différentes variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$.

Nous cherchons donc à définir une variété caractéristique pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ comme une partie fermée du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$ sans utiliser les variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ et sans réduire les modules $\mathcal{M}_k$ modulo ω. L'objectif est d'introduire une catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes qui soient de longueur finie. Les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes devront ainsi vérifier la condition suivante. Soit P un opérateur différentiel de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Nous aimerions que le module le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ soit holonome seulement si P est un opérateur différentiel fini. En effet, si P n'est pas un opérateur fini, alors $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ est un module de longueur finie augmentant avec k. De plus, $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ est localement un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de dimension de plus en plus grande. Nous ne pouvons donc pas espérer avoir de bonnes propriétés de finitudes pour le module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$. Cependant, lorsque $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$, ces problèmes disparaissent ! Détaillons ce qu'il advient pour un tel opérateur P. Soit (t,ξ) un système de coordonnées locales sur T^*U associée à la coordonnée étale de U. Nous vérifions alors pour k suffisamment grand que

$$\mathrm{Car}\left(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P\right) \cap T^*U = \{(t,\xi) \in T^*U : \sigma(\bar{P})(t,\xi) = a_d(t)\cdot \xi^d = 0\}.$$

Ces variétés caractéristiques ne dépendent donc plus de k à partir d'un certain niveau de congruence. Notons $x_1, \ldots, x_s$ les zéros du coefficient dominant a_d de P dans l'ouvert U.

La figure suivante trace l'allure de la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$. La section nulle est une composante irréductible des variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P)$ si et seulement si l'ordre d de P est supérieur ou égale à un.

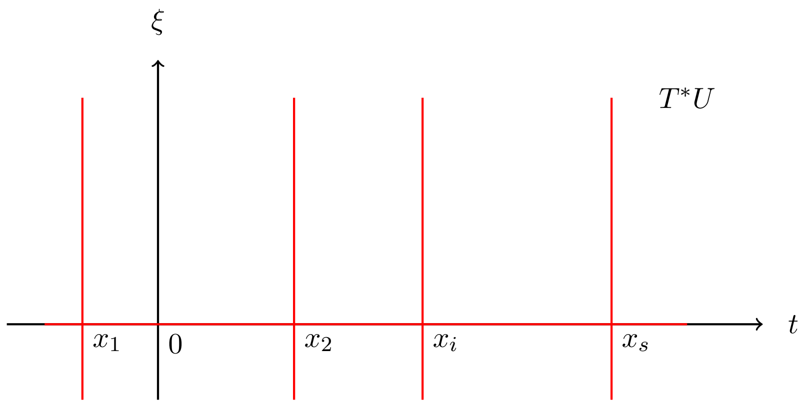


Figure 1 : $\mathrm{Car}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P) \cap T^*U$

Afin de définir une variété caractéristique pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles, nous construisons dans le chapitre 4 un microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$ de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ vérifiant la condition d'inversibilité suivante. Un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$ si et seulement si

1. $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,
2. le coefficient dominant a_d de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

Ce critère d'inversibilté pour l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ est l'analogue souhaité du lemme 2.6.3 énoncé pour le faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ sur la fibre spéciale X de $\mathfrak{X}$. En effet, soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Nous souhaitons que le module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ soit holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini. Le support du module $\mathcal{M} = \mathcal{F}_\infty/P$ permet de distinguer les opérateurs infinis des opérateurs finis. Si P est un opérateur infini, alors $(\operatorname{Supp}\mathcal{M}) \cap U = U$ puisque P n'est pas inversible dans l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(V)$ quel que soit l'ouvert $V \subset U$ (voir la preuve de la proposition 2.6.4). Dans ce cas, $\dim(\operatorname{Supp}\mathcal{M}) = 1$. Soit maintenant P un opérateur fini de coefficient dominant a_d dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. D'après la proposition 2.6.4 et le critère d'inversibilité des éléments de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$, le support $(\operatorname{Supp}\mathcal{M}) \cap U$ est l'union finie des zéros $x_1, \ldots, x_s$ de la fonction a_d dans l'ouvert U. Ainsi, $\dim \operatorname{Supp}\mathcal{M} = 0$. Les points $x_1, \ldots, x_s$ du support $(\operatorname{Supp}\mathcal{M}) \cap U$ sont les abscisses des composantes irréductibles verticales des variétés caractéristiques des modules $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ données dans la figure 1 pour k suffisamment grand. La variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{M})$ du module coadmissible $\mathcal{M}$ introduite dans le chapitre 5 va coïncider avec les variétés caractéristiques de la figure 1 lorsque $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ avec P un opérateur différentiel fini. En général, nous disposerons seulement de l'inclusion $\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \operatorname{Car}(\mathcal{M})$.

Expliquons maintenant en quelques mots la construction du microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$ faite dans le chapitre 4. Le faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre, où X est la fibre spéciale du schéma formel $\mathfrak{X}$. Pour tout niveau de congruence $k \geq 1$, les algèbres $\mathcal{D}_{X,k}(U) \simeq \mathcal{O}_X(U)[X]$ sont commutatives, isomorphes à un anneau de polynômes en une variable. Nous expliquons dans la partie 2.6 comment retrouver la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}_k$ en dehors de la section nulle à partir d'un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$. Ce cas est élémentaire puisque pour tout niveau de congruence $k \geq 1$, les algèbres $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ sont commutatives. Nous pouvons donc inverser la dérivation ∂_k de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ pour construire le microlocalisé. Cet exemple motive l'introduction du microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$ du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$.

La construction du faisceau d'algèbres $\mathcal{F}_\infty$ fait intervenir des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ pour tous les entiers $k \geq r \geq 1$. Plus précisément, si U est toujours un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ muni d'une coordonnée étale, alors $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est un localisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ obtenu en inversant la dérivation ∂. La K-algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est non commutative et ne vérifie pas les conditions de Ore. Pour inverser la dérivation, nous utilisons une localisation non commutative décrite dans l'annexe par Peter Schneider de l'article [20] de Gergely Zábrádi où les conditions de Ore sont remplacées par la condition d'être quasi-abélien. On vérifie dans notre cas que la K-algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que $k \geq 1$, ie il existe une constante $\gamma \in]0,1[$ telle que

$$\forall P, Q \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), \quad |PQ - QP|_k = |[P,Q]|_k \leq \gamma \cdot |P|_k \cdot |Q|_k$$

Remarquons aussi que la localisation de l'article [20] ne s'applique pas directement à

$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ puisque ce n'est pas une algèbre de Banach. Cette localisation nous permet de construire dans le chapitre 4 des K-algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, pour tous entiers $k \geq r \geq 1$, de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ en inversant la dérivation ∂. Puisque les ouverts affines U de $\mathfrak{X}$ admettant une coordonnée étale forment une base de voisinage ouvert de $\mathfrak{X}$, ces algèbres vont définir un faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ sur la courbe formelle $\mathfrak{X}$. Sur un tel ouvert affine, nous avons

$$\mathcal{F}_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\omega^r \partial)^{-n}, \quad a_n \underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

De plus, les microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ induits par les inclusions locales. En passant à la limite projective sur $k \geq r$ et pour r fixé, nous obtenons un microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}$ du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$, construit dans la partie 4.2, dans lequel la dérivation est localement inversible. Nous démontrons que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une K-algèbre de Fréchet-Stein pour tout entier naturel $r \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe des morphismes naturels injectifs de K-algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r+1}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. L'algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ de la section 4.3 est simplement la limite inductive des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ pour $r \geq 1$.

Dans le chapitre 5, nous utilisons les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$ pour définir une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles . Pour cela, nous introduisons à partir des microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$ des faisceaux $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$ sur le fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$. Nous associons à tout module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ des $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-modules coadmissibles $\mathcal{M}^*_r$ sur $T^*\mathfrak{X}$. Notons $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ le support du module $\mathcal{M}^*_r$ en tant que faisceaux sur le fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$. Nous démontrons que la suite des supports $\{\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r\}_{r\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, ce qui nous permet de définir la variété caractéristique

$$\operatorname{Car}(\mathcal{M}) := \bigcap_{r\in\mathbb{N}^*} \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r \subset T^*\mathfrak{X}.$$

Nous nous restreignons toujours au cas d'une courbe formelle $\mathfrak{X}$ afin de démontrer l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissible : un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est non nul si et seulement si $\dim(\operatorname{Car}(\mathcal{M})) \geq 1$. La preuve ne fonctionne qu'en dimension un. Cependant, la construction des microlocalisés s'adapte à la dimension supérieure. Le seul point plus délicat consistera à déterminer les éléments inversibles du microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty}(U)$.

Enfin, dans le chapitre 6, nous définissons les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est appelé holonome si sa variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{M})$ est de dimension inférieure ou égale à un. La catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes est abélienne et non triviale. Elle contient les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ dès que P est un opérateur différentiel fini. Par ailleurs, les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules de type à connexion intégrable appartiennent à cette catégorie. Plus précisément, un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est un module à connexion intégrable si et seulement si $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$ (en identifiant $\mathfrak{X}$ avec la section nulle du fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$). Nous démontrons ensuite que tout module holonome est un module à connexion sur un certain ouvert de $\mathfrak{X}$. Une telle caractérisation ne peut être vraie qu'en dimension un. Par ailleurs, nous montrons que tout module holonome est faiblement holonome au sens de [3] et que son dual reste un module holonome. Autrement dit, le module coadmissible

$$\mathcal{M}^d := \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \right)$$

est un module holonome dès que $\mathcal{M}$ est holonome. Nous conjecturons finalement que tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module holonome est de longueur finie. Nous donnons à la fin du chapitre 6 quelques arguments heuristiques en faveur de ce résultat.

Cependant, notre catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles holonomes ne vérifie pas toutes les six opérations de Grotenthieck. L'image directe d'un module coadmissible n'étant pas nécessairement coadmissible, nous disposons d'exemple explicite d'image directe de modules holonomes qui ne sont même pas coadmissibles. De tels exemples dans le cas d'une courbe analytique rigide sont l'objects de l'article [8] de Bode-Bitoun. Détaillons le rapidement dans le paragraphe suivant.

Soit $\mathfrak{X}_K = \mathrm{Sp}\,(\mathcal{V}\langle x\rangle)$ et $U_K = \mathfrak{X}_K\backslash\{0\} = \mathrm{Sp}\,(\mathcal{V}\langle x, x^{-1}\rangle)$ un ouvert épointé de $\mathfrak{X}_K$. On note ∂ la dérivation associée à x. On pose $P = \partial - x^\lambda$ avec $\lambda \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{D}}_{U_K}/P$. C'est un $\widehat{\mathcal{D}}_{U_K}$-module coadmissible. Soit $j : U_K \hookrightarrow \mathfrak{X}_K$ l'injection canonique. Le théorème 5.2 de [8] nous dit que le module $j_*\mathcal{M}$ est coadmissible si et seulement si λ est de type positif. Il existe des scalaires λ qui ne sont pas de type positif. Puisque P est un opérateur différentiel fini, le module coadmissible $\mathcal{D}_{U,\infty}/P$ est holonome. Cependant, le module $j_*(\mathcal{D}_{U,\infty}/P)$ n'est a priori pas même coadmissible lorsque λ est de type zéro !

Notations

- $\mathcal{V}$ est un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0, p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel κ supposé parfait. On note $|\cdot|$ la valeur absolue normalisée de $\mathcal{V}$, ω une uniformisante et $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{V})$ son corps des fractions.
- X est une courbe sur κ lisse connexe quasi-compacte et $x \in X$ est un point donné.
- $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse relevant X d'idéal de définition engendré par l'uniformisante ω.
- $\mathfrak{X}_K$ est l'espace analytique rigide associé à $\mathfrak{X}$.
- t est un relèvement local sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ d'une uniformisante en x ($\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète puisque X est une courbe). Alors $\mathrm{d}t$ est une base de $\Omega^1_{\mathfrak{X},x}$. On note ∂ la dérivation associée.
- U est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée étale associée à x.
- Soit $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\backslash\{0\}$ et r tel que $f_1 := \omega^r f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})\backslash\Gamma(U, \mathfrak{m}\cdot\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. On note $U_{\{f\}} \subset U$ l'ouvert sur lequel f_1 est inversible. On remarquera que $U_{\{f\}} \cup \{x\} = U\backslash\{V(\bar{f}_1) - \{x\}\}$ (où $\bar{f}_1$ est la réduction de f_1 modulo $\mathfrak{m}$) est un ouvert puisque $\bar{f}_1$ n'a qu'un nombre fini de zéros.
- Sauf mention contraire, les idéaux et les modules considérés sont tous à gauche.

Chapitre 1

Propriétés du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

On résume et on adapte dans ce chapitre les quatres premières parties de l'article [10] de Laurent Garnier pour un niveau de congruence $k \geq 0$ quelconque. On munit la K-algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ d'une norme complète multiplicative $|\cdot|_k$. On démontre ensuite la simplicité de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On termine enfin ce chapitre par énoncer quelques rappels et quelques propriétés sur les bases de division d'un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.

1.1 Rappels sur la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$

On commence par redonner la définition d'une algèbre affinoïde et de la norme spectrale associée. On rappelle ensuite quelques résultats utiles de la première partie de l'article [10] de Garnier. On pourra s'y référer pour les preuves des lemmes énoncés.

Soit $T_n(K) = K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ l'algèbre de Tate à n-variables à coefficients dans K. En notant $T^\alpha = T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, elle est définie par

$$T_n(K) = \left\{ f(T) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha \cdot T^\alpha : \quad c_\alpha \in K, \quad |c_\alpha| \underset{|\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

On munit l'algèbre $T_n(K)$ de la norme de Gauss donnée par $|f| = \max\{|c_\alpha|\}$. C'est une valuation et $T_n(K)$ est le complété de l'algèbre de polynômes $K[T_1, \dots, T_n]$ pour cette valuation. En particulier, $T_n(K)$ est une K-algèbre de Banach pour la topologie ω-adique. Elle est de plus noetherienne et tout idéal I est complet. Le quotient $T_n(K)/I$ de $T_n(K)$ est donc une K-algèbre de Banach pour la topologie ω-adique.

L'algèbre de Tate $T_n(K)$ coincide avec l'ensemble des séries entières en la variable T à coefficients dans K qui convergent sur la boule unité fermée de K^n. On peut donc aussi munir $T_n(K)$ de la norme supérieure. Cette dernière coïncide avec la norme de Gauss. Cela découle du principe du maximum vérifié par l'algèbre $T_n(K)$: il existe un élément y de K^n tel que $|f| = |f(y)|$.

Une K-algèbre affinoïde A est par définition une K-algèbre de Banach isomorphe (en tant qu'algèbre topologique) à un quotient $T_n(K)/I$ de $T_n(K)$ par un idéal I. Toutes les normes sur A induites par une présentation de A comme quotient d'une algèbre de Tate sont équivalentes.

Si z est un idéal maximal de A, alors A/z est une extension finie de K. La valeur absolue de K s'étend uniquement en une valeur absolue sur A/z notée encore $|\cdot|$. On définit la norme spectrale d'un élément $f \in A$ de la manière suivante. On note $f(z)$ l'image de f dans A/z et $|f(z)|$ sa valeur absolue. Alors

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \max_{z \in \operatorname{Spm} A} |f(z)|$$

En général, $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$ est seulement une semi-norme inférieure à toute norme de Gauss induite. Cependant, lorsque l'algèbre A est intègre, c'est une valeur absolue ultramétrique équivalente aux normes de Gauss. C'est le cas par exemple pour $A = T_n(K)$.

Tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ est le spectre formel d'une $\mathcal{V}$-algèbre A, ie $U = \operatorname{Spf} A$, telle que $A_K = A \otimes_{\mathcal{V}} K$ soit une K-algèbre affinoïde. On a alors $U_K = \operatorname{Spm} A_K$. Puisque $\mathfrak{X}$ est connexe et lisse, U est intègre. La norme spectrale $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$ est donc une valuation complète sur l'algèbre affinoïde A_K définissant U_K.

On suppose pour la fin de cette partie que x est un point κ-rationnel de X. Pour tout $0 \leq \lambda < 1$, on note $V_\lambda = \{y \in U_K : |t(y)| \geq \lambda\}$. C'est un ouvert de $\mathfrak{X}_K$ contenu dans U_K. Puisque U est affine, V_λ est affinoide et ne dépend pas du choix de t pour tout λ vérifiant $\lambda > |\omega| = \frac{1}{p}$. Comme X est lisse en x, on dispose d'un isomorphisme permettant d'identifier le tube $]x[$ à un disque ouvert :

$$]x[\xrightarrow{\sim} D(0,1^-) := \{y \in \widehat{\mathbb{A}}^{1,\mathrm{an}}_K : 0 \leq |t(y)| < 1\}$$

Soit $\lambda_0 > \frac{1}{p}$ et $f \in \Gamma(U_K \cap V_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ une section non nulle. Alors $f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}}$ s'écrit uniquement sous la forme d'une série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \cdot t^i$, où les α_i sont des éléments de K. Cette fonction converge sur la couronne $C([\lambda_0, 1[) = \{y \in \widehat{\mathbb{A}}^{1,\mathrm{an}}_K : \lambda_0 \leq |t(y)| < 1\}$. Pour tout $\lambda_0 \leq \lambda < 1$, on note

$$N(f_{|]x[\cap V_\lambda}, \lambda) = \max\left\{ i \in \mathbb{N} : |\alpha_i| \cdot \lambda^i = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_j| \cdot \lambda^j \right\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

On pose

$$N(f) = \lim_{\lambda \to 1^-} N(f_{|]x[\cap V_\lambda}, \lambda) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Lemme 1.1.1. *Pour toute section $f \in \Gamma(U_K \cap V_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ non nulle, $N(f)$ est un entier positif ne dépendant pas du choix de t. De plus, si $f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \cdot t^i$, alors $N(f)$ est le plus petit indice tel que $\|f\|_{\mathrm{sp}} = |\alpha_{N(f)}| = \max_{j\geq 0} |\alpha_j|$. En particulier, $\|f\|_{\mathrm{sp}}$ est dans $|K|$.*

Remarque 1.1.2.

1. *Si $N(f) = 0$, alors f n'a pas de zéro sur $]x[$ et $x \in U_{\{f\}}$.*
2. *On a $N(0, \lambda) = N(0) = +\infty$.*

On rappelle que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète, de corps résiduel κ lorsque x est un point κ-rationnel. Par définition, t en est une uniformisante. On considère la valuation v de $\mathcal{O}_{X,x}$ donnée par $v(t) = 1$.

Lemme 1.1.3. *Soit $f \in \Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ une section telle que $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$. Alors $N(f)$ est la valuation de $(f \mod \omega)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Toujours sous l'hypothèse $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$, f s'écrit $f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \cdot t^i$ avec α_i dans $\mathcal{V}$. Alors $(f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}} \mod \omega) = \sum_{0\leq i<\infty} \bar{\alpha}_i \cdot t^i$ et $N(f)$ est le plus petit entier n tel que $\bar{\alpha}_n \neq 0$.

Lorsque U est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, on note la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ simplement par $|\cdot|$. On rappelle qu'elle est équivalente à toute norme de Gauss induite sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$. La norme spectrale est de plus une valuation.

1.2 Quelques propriétés de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$

Le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

On commence par rappeler brièvement la définition du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ des opérateurs différentiels sur lequel on travaille. Le lecteur peut feuilleter la seconde partie de l'article [13] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch pour plus de détails. On désigne toujours par U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée étale.

Le faisceau $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ est défini comme un sous-faisceau de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ dépendant d'un paramètre $k \in \mathbb{N}$ appelé niveau de congruence. Le cas $k = 0$ donne $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$. Localement, $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ est la

$\mathcal{V}$-algèbre engendrée par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et par la dérivation $\omega^k\partial$. Plus précisément,

$$\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) = \left\{ \sum_{0\leq n<\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

En tant que $\mathcal{O}_U$-module, $\mathcal{D}^{(0)}_{U,k}$ est le $\mathcal{O}_U$-module libre de base les puissances de $\omega^k\partial$:

$$\mathcal{D}^{(0)}_{U,k} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_U \cdot (\omega^k\partial)^n$$

Ce module est munit du produit vérifiant la relation $(\omega^k\partial)^n \cdot (\omega^k\partial)^m = (\omega^k\partial)^{n+m}$ et le crochet

$$\forall a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad [\omega^k\partial, a] = \omega^k\partial(a)$$

On note $\mathcal{D}_{X,k}$ la réduction modulo ω de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. C'est le faisceau de κ-algèbres sur la fibre spéciale $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \operatorname{Spec}\kappa$ de $\mathfrak{X}$ engendré localement sur U par $\mathcal{O}_{X|U}$ et par la dérivation ∂_k image de $\omega^k\partial$ après réduction modulo ω. On rappelle que $\mathfrak{X}$ et X ont même espace topologique. On identifie alors U à un ouvert affine de X.

Soit $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} = \varprojlim_i \left(\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\omega^{i+1}\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}\right)$ le complété ω-adique de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. On dispose de la description locale suivante :

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad |a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

On note $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{V}} K$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} K$. Les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ sont les opérateurs différentiels convergents à coefficients dans la K-algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

Il est démontré dans l'article [13] que toutes ces algèbres sont noetheriennes et que les faisceaux associés sont cohérents. Pour tous entiers $k' > k$, il est clair que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k'}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. En particulier, $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des opérateurs différentiels cristallins $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}(U) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},0}(U)$. On considère dans la suite les morphismes de transitions $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ induit par les inclusions locales $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour les ouverts affines U munis d'une coordonnée étale.

Structure de K-algèbre de Banach sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$

On munit maintenant l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ d'une norme multiplicative complète $|\cdot|_k$. Dans un premier temps, on suppose encore que x est un point κ-rationnel de $\mathfrak{X}$.

Définition 1.2.1. *Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On pose*

1. $|P|_k = \max_{n\geq 0}\{|a_n|\}$;
2. $\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$;
3. $N_k(P) = N(a_{\overline{N}_k(P)})$.

Les coefficients a_n sont des éléments de la K-algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$; $|a_n|$ est la norme spectrale de a_n. On rappelle que si $\sum_{i\geq 0} \alpha_i \cdot t^i$ est l'écriture comme série de $a_{\overline{N}_k(P)}$ sur $]x[\cap U_K$, alors $|P|_k = |\alpha_{N_k(P)}|$.

Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un opérateur non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On fixe un scalaire $\alpha \in K$ tel que $|\alpha| = (\max_{n\geq 0} |a_n|)^{-1}$. Il s'agit bien d'un élément de $|K|^{\times}$ d'après le lemme 1.1.1. Alors αP est de norme 1 et l'opérateur αP appartient à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. L'entier $\overline{N}_k(P)$ est le plus grand indice n tel que $|\alpha \cdot a_n| = |\alpha P|_k = 1$. Ainsi, le nombre $\overline{N}_k(P)$ est l'ordre de l'opérateur $(\alpha P \mod \omega)$ dans la κ-algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Cet entier ne dépend pas du choix de α. De plus, $N_k(P) = N_k(\alpha P)$ est la valuation de $\alpha \cdot a_{\overline{N}_k(P)}$ modulo ω dans $\mathcal{O}_{X,x}$ d'après le lemme 1.1.3. Ce nombre ne dépend pas non plus de α.

Les entiers $\overline{N}_k(P)$ et $N_k(P)$ coïncident donc respectivement avec l'ordre et la valuation de $(\alpha P \mod \omega)$ dans $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ pour tout scalaire $\alpha \in K$ vérifiant $|\alpha P|_k = 1$. Par ailleurs, ces définitions sont indépendantes du choix des coordonnées locales sur U.

Lemme 1.2.2. *La norme $|\cdot|_k$ et les fonctions $\overline{N}_k$ et N_k ne dépendent pas du choix du système de coordonnées locales.*

Démonstration. Soit (t', ∂') un autre système de coordonnée locale sur l'ouvert U. Puisque ∂' est un générateur du faisceau tangent $\mathcal{O}_U \cdot \partial$, il existe $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)^{\times}$ tel que $\partial' = \alpha \cdot \partial$. On a $|\alpha| = 1$ (puisque $|\alpha| \leq 1$ et α est inversible). Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial')^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Sa norme $|P|_k$ pour le système de coordonnées locales (t', ∂') est le maximum des normes spectrales des fonctions a_n.

Par ailleurs, $P = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\alpha\omega^k \partial)^n$. On a $(\alpha\partial)^2 = \alpha^2\partial^2 + \alpha\partial(\alpha)\partial$. Or $|\partial^n(\alpha)| \leq |\alpha| = 1$, donc le coefficient de ∂ a une norme spectrale inférieure à un. Une récurrence montre que

$$(\alpha\partial)^n = \alpha^n \partial^n + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \partial^m$$

avec $|b_m| \leq 1$ pour tout m. Il vient

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n\geq 0} a_n \left[\alpha^n(\omega^k\partial)^n + \omega^{kn}\sum_{m=0}^{n-1} b_m\right] \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n\alpha^n(\omega^k\partial)^n + \underbrace{\sum_{n\geq 1} a_n\omega^k \sum_{m=0}^{n-1}\omega^{k(n-m+1)} b_m(\omega^k\partial)^m}_{\sum_{n\geq 0}\beta_n(\omega^k\partial)^n} \end{aligned}$$

avec $|\beta_n| \leq |\omega|^k \cdot |P|_k$ et $|a_n\alpha^n| = |a_n|$. Lorsque $k > 0$, $|\beta_n| < |P|_k$ et il est clair que la norme de P pour le système de coordonnée locale (t, ∂) est aussi donnée par le maximum $\max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Pour $k = 0$, le résultat reste vrai. En effet, dans la seconde somme, le coefficient de $(\omega^k\partial)^n$ est une combinaison des a_k pour $k > n$ et des b_m. $\square$

On rappelle que la norme $|P|_k$ et les entiers $\overline{N}_k(P)$ et $N_k(P)$ dépendent du point x initial. Ce sont des notions locales en x.

Proposition 1.2.3.

1. *Les K-algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ sont complètes pour la norme $|\cdot|_k$.*
2. *La norme induite sur tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est complète.*
3. *Pour tous opérateurs P et Q de $\Gamma(U,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$, on a*

$$|PQ|_k = |P|_k\cdot|Q|_k,$$

$$\overline{N}_k(PQ) = \overline{N}_k(P)+\overline{N}_k(Q),$$

$$N_k(PQ) = N_k(P)+N_k(Q).$$

Démonstration. Le premier point découle du fait que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est complète pour la topologie ω-adique et que la norme spectrale est équivalente à la topologique ω-adique sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On munit tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$-module cohérent $\mathcal{E}(U)$ de la norme induite par des présentations locales de $\mathcal{E}$. Elle est complète et ne dépend pas des présentations choisies puisque la norme $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est multiplicative par 3 (en fait sous-multiplicative suffit). Cela montre le second point.

Soit maintenant $H=\sum_{n\geq 0}a_n\cdot(\omega^k\partial)^n$ et $Q=\sum_{n\geq 0}b_n\cdot(\omega^k\partial)^n$ deux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On a

$$\begin{aligned}
HQ &= \sum_{i\geq 0}a_i\cdot(\omega^k\partial)^i\left(\sum_{j\geq 0}b_j\cdot(\omega^k\partial)^j\right)\\
&= \sum_{i,j\geq 0}\left(\sum_{\ell=0}^{i}\binom{i}{\ell}\omega^{k\ell}\cdot\partial^{\ell}(b_j)\cdot\omega^{k(i+j-\ell)}\cdot\partial^{i+j-\ell}\right)\\
&= \sum_{u\geq 0}\underbrace{\sum_{\substack{\ell\geq 0\\ 0\leq j\leq u}}\left(\binom{u+\ell-j}{\ell}\cdot a_{u+\ell-j}\cdot\omega^{k\ell}\cdot\partial^{\ell}(b_j)\right)}_{\alpha_u\in\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)}(\omega^k\partial)^u
\end{aligned}$$

On remarque déjà que

$$\left|\binom{u+\ell-j}{\ell}\cdot a_{u+\ell-j}\cdot\omega^{k\ell}\cdot\partial^{\ell}(b_j)\right|\leq|a_{u+\ell-j}|\cdot|\partial^{\ell}(b_j)|\leq|a_{u+\ell-j}|\cdot|b_j|\leq|H|_k\cdot|Q|_k$$

Ainsi $|HQ|_k\leq|H|_k\cdot|Q|_k$. Pour $u=\overline{N}_k(H)+\overline{N}_k(Q)$, $\ell=0$ et $j=\overline{N}_k(Q)$, le coefficient associé dans la somme définissant α_u est $a_{\overline{N}_k(H)}\cdot b_{\overline{N}_k(Q)}$. En particulier, ce terme est de norme $|H|_k\cdot|Q|_k$. Si $j\geq\overline{N}_k(Q)$, alors $|b_j|<|Q|_k$. Si $j<\overline{N}_k(Q)$ ou si $j\leq\overline{N}_k(Q)$ et $\ell\geq 1$, alors $u+\ell-j>\overline{N}_k(P)$. Donc $|a_{u+\ell-j}|<|P|_k$. Dans tous ces cas, la norme du terme associé dans α_u est strictement inférieure à $|H|_k \cdot |Q|_k$. Ceci prouve que $|\alpha_u| = |H|_k \cdot |Q|_k$. Autrement dit, $|HQ|_k = |H|_k \cdot |Q|_k$.

Si $u > \overline{N}_k(H) + \overline{N}_k(Q)$, on montre de manière analogue que $|\alpha_u| < |H|_k \cdot |Q|_k$. Ainsi, $\overline{N}_k(HQ) = \overline{N}_k(H) + \overline{N}_k(Q)$. On peut supposer les opérateurs H et Q de norme un. Dans ce cas, $N_k(H) = v(a_{\overline{N}_k(H)} \mod \omega) =$ et $N_k(Q) = v(b_{\overline{N}_k(Q)} \mod \omega)$, où v est la valuation de $\mathcal{O}_{X,x}$. Puisque $\alpha_{\overline{N}_k(H)+\overline{N}_k(Q)} = a_{\overline{N}_k(H)} \times b_{\overline{N}_k(Q)} +$ (un terme de norme spectrale strictement inférieure), on a bien

$$\begin{aligned} N_k(HQ) &= v(a_{\overline{N}_k(H)} \cdot b_{\overline{N}_k(Q)} \mod \omega) = v(a_{\overline{N}_k(H)} \mod \omega) + v(b_{\overline{N}_k(Q)} \mod \omega) \\ &= N_k(H) + N_k(Q) \end{aligned}$$

□

Applications

On énonce maintenant quelques propriétés de l'algèbre de Banach $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$. Les preuves sont adaptées de celles de Laurent Garnier pour un niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$. La proposition suivante caractérise l'inversibilité des éléments du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ à l'aide des fonctions $\overline{N}_k$ et N_k.

Proposition 1.2.4. *On suppose que x est un point κ-rationnel. Soit P un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Il existe un ouvert V de U contenant x sur lequel P est inversible si et seulement si $\overline{N}_k(P) = N_k(P) = 0$. Si de plus $|P|_k = 1$, alors $P^{-1} \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(V)$.*

Démonstration. Si P est inversible d'inverse P^{-1} , alors $\overline{N}_k(P) + \overline{N}_k(P^{-1}) = \overline{N}_k(1) = 0$. Donc $\overline{N}_k(P) = 0$ puisque $\overline{N}_k(P)$ est un entier positif. De même, $N_k(P) = 0$. Réciproquement, on suppose que $\overline{N}_k(P) = N_k(P) = 0$. On écrit $P = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$. Ces deux conditions signifient que $|a_0| > |a_n|$ pour tout $n > 0$ et que a_0 n'a pas de zéro sur $]x[$. Autrement dit, a_0 est inversible sur l'ouvert $V = U_{\{a_0\}} \cup \{x\}$ de U. Sur cet ouvert, l'inverse de P est donné par la série classique

$$P^{-1} = \sum_{i\geq 0} \left(- \sum_{j\geq 1} \frac{a_j}{a_0} (\omega^k \partial)^j \right)^i a_0^{-1}$$

Cet opérateur converge puisque

$$\left| \sum_{j\geq 1} \frac{a_j}{a_0} (\omega \partial)^j \right|_k = \max_{j\geq 1} \left\{ \left| \frac{a_j}{a_0} \right| \right\} < 1$$

Ainsi P^{-1} définit bien un élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. Si maintenant P est de norme un, alors les coefficients a_n et a_0^{-1} sont des éléments de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(V)$. Il en découle que $P^{-1} \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(V)$. □

On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. A partir de maintenant, et pour le reste de ce document, x n'est plus supposé κ-rationnel. C'est un point κ'-rationnel pour une certaine extension finie κ' de κ. On note K' l'extension finie de K dans $\overline{K}$ dont le corps résiduel est κ'. Quitte à étendre K par K', on peut définir les fonctions $\overline{N}_k$ et N_k des opérateurs de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ en x.

Puisque l'extension K'/K est finie, l'algèbre $K\langle T_1, \dots, T_n\rangle \otimes_K K'$ est complète. Ainsi, la K'-algèbre de Tate $T_n(K')$ coïncide avec $T_n(K) \otimes_K K'$. On munit K' de l'extension non normalisée de la valeur absolue de K, notée encore $|\cdot|$. Le morphisme canonique $T_n(K) \to T_n(K')$ est une isométrie de K-algèbres pour les normes de Gauss, égales aux normes spectrales. Plus généralement, si A est une K-algèbre affinoïde, alors $A' = A \otimes_K K'$ est une K'-algèbre affinoïde. Le morphisme canonique $A \to A'$ est une isométrie de K-algèbres affinoïdes. Lorsque A est intègre, la norme spectrale est une norme sur A et le morphisme précédent est une isométrie pour les normes spectrales.

On munit $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K'$ de la norme de K'-algèbre $|P \otimes \lambda|'_k = |\lambda| \cdot |P|_k$. Comme le morphisme canonique $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K'$ est une K-isométrie, le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K'$ est une isométrie de K-algèbres. Soit $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. La fonction $\overline{N}_k(P)$ ne dépend donc pas de l'extension finie K' de K mais seulement de P : cet entier est le même aussi bien dans $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ que dans $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K', |\cdot|'_k)$.

Corollaire 1.2.5. *Un opérateur différentiel $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est inversible au voisinage de x si et seulement si $\overline{N}_k(P) = N_k(P) = 0$.*

Démonstration. La proposition 1.2.4 montre que P est inversible au voisinage de x après extension des scalaires de K à K'. Soit $V \subset U$ un ouvert contenant x sur lequel P est inversible. On écrit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. Puisque a_0 est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V) \otimes_K K'$ et puisque a_0 appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$, a_0 est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$. L'inverse $P^{-1} = \sum_{i \geq 0} \left(-\sum_{j\geq 1} \frac{a_j}{a_0} (\omega^k \partial)^j\right)^i a_0^{-1}$ de P dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V) \otimes_K K'$ appartient donc à l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. $\square$

Ce critère d'inversibilité permet de démontrer que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est simple.

Proposition 1.2.6. *Pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ est une algèbre simple.*

Démonstration. Soit I un idéal bilatère non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ et $x \in V$ un point fermé. On va montrer qu'il existe un voisinage ouvert affine W de x dans V tel que $I_{|W}$ contienne un élément inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(W)$. Les points fermés étant denses dans V, ceci implique que

$I = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. D'après le corollaire 1.2.5, il suffit de montrer que quitte à réduire l'ouvert V, l'idéal I contient un élément P vérifiant $\overline{N}_k(P) = N_k(P) = 0$. On peut remplacer K par une extension finie afin que x soit rationnel et supposer que V est affine.

On part d'un opérateur différentiel non nul $H = \sum_{i\geq 0} a_i \cdot (\omega^k\partial)^i$ appartenant à I. Comme I est un idéal bilatère, les crochets $[H,t] = Ht - tH$ et $[H,t]^{n+1} := [[H,t]^n, t]$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ restent des éléments de l'idéal I. On a $[H,t] = \omega^k \cdot \sum_{i\geq 1} i a_i \cdot (\omega^k\partial)^{i-1}$ et

$$[H,t]^{\overline{N}_k(H)} = (\omega^{k\overline{N}_k(H)} \cdot \overline{N}_k(H)!) \sum_{i\geq \overline{N}_k(H)} \binom{i}{\overline{N}_k(H)} \cdot a_i \cdot (\omega^k\partial)^{i-\overline{N}_k(H)}$$

Pour tout $i > \overline{N}_k(H)$, on a

$$\left| \binom{i}{\overline{N}_k(H)} \cdot a_i \right| \leq |a_i| < |a_{\overline{N}_k(H)}|$$

Autrement dit, $\overline{N}_k([H,t]^{\overline{N}_k(H)}) = 0$. Ainsi, quitte à remplacer H par $[H,t]^{\overline{N}_k(H)}$, on peut supposer que $\overline{N}_k(H) = 0$. Par ailleurs,

$$\omega^k \cdot \partial \cdot a_i \cdot (\omega^k\partial)^i = \omega^k \cdot \partial(a_i) \cdot (\omega^k\partial)^i + a_i \cdot (\omega^k \cdot \partial)^{i+1}$$

Donc

$$\begin{aligned}[H, \omega^k\partial] = H\omega^k\partial - \omega^k\partial H &= \sum_{i\geq 0} \left(a_i \cdot (\omega^k\partial)^{i+1} - \omega^k\partial \cdot a_i \cdot (\omega^k\partial)^i \right) \\ &= -\omega^k \sum_{i\geq 0} \partial(a_i) \cdot (\omega^k\partial)^i\end{aligned}$$

Ainsi, $[H,\omega^k\partial]^{N_k(H)} = (-\omega^k)^{N_k(H)} \sum_{i\geq 0} \partial^{N_k(H)}(a_i) \cdot (\omega^k\partial)^i$. Puisque $\overline{N}_k(H) = 0$, on a :

$$\forall i \geq 1, \quad |\partial^{N_k(H)}(a_i)| \leq |N_k(H)!| \cdot |a_i| < |N_k(H)!| \cdot |H|_k$$

Sur $]x[\cap U_K$, on peut écrire $a_0 = \sum_{i\geq 0} \alpha_i \cdot t^i$, $\alpha_i \in K$. On a

$$\partial^{N_k(H)}(a_0) = N_k(H)! \sum_{i\geq N_k(H)} \binom{i}{N_k(H)} \cdot \alpha_i \cdot t^{i-N_k(H)}$$

Comme $N_k(H) = N(a_0)$, on a

$$\forall i > N_k(H), \quad \left| \binom{i}{N_k(H)} \alpha_i \right| \leq |\alpha_i| < |\alpha_{N_k(H)}| = |\alpha_{N(a_0)}| = |H|_k$$

Ainsi, $|\partial^{N_k(H)}(a_0)| = |N_k(H)!| \cdot |\alpha_0| = |N_k(H)!| \cdot |H|_k$ et $N_k(\partial^{N_k(H)}(a_0)) = 0$. Ceci montre que $[H,\omega^k\partial]^{N_k(H)}$ est un élément de l'idéal I de fonctions $\overline{N}_k$ et N_k nulles. Quitte à réduire l'ouvert V contenant x, l'opérateur H est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. □

1.3 Théorèmes de division

Dans cette section, les divisions sont toutes écrites à gauche. Elles restent vraies à droites pour des énoncés analogues. On commence par démontrer des résultats de division dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$. Ils sont plus simples à démontrer puisqu'on manie des opérateurs différentiels finis. Les preuves pour $\mathcal{D}_{X,k,x}$ sont analogues à celles de l'article [16]. Les divisions dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ peuvent se déduire de ces dernières.

1.3.1 Divisions dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$

Soit U un ouvert affine de X contenant x admettant une coordonnée locale associée à x. La κ-algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à l'algèbre $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{X,x} \cdot \partial_k^n$, où ∂_k est l'image de $\omega^k\partial$ après réduction modulo ω. Il s'agit de l'algèbre des opérateurs différentiels en ∂_k à coefficients dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,x}$. On rappelle que t est une uniformisante de $\mathcal{O}_{X,x}$. On note toujours v la valuation de $\mathcal{O}_{X,x}$. L'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{O}_{X,x}$ ne dépend pas du choix de l'ouvert affine U contenant x. On a alors $\mathcal{D}_{X,k,x} = \mathcal{D}_{X,k}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X,x}$.

Soit $P = \alpha_d \cdot \partial_k^d + \cdots + \alpha_1 \cdot \partial_k + \alpha_0$ un opérateur non nul d'ordre $d = \deg(P)$ de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. On appelle valuation de P celle de son coefficient dominant : $v(P) = v(\alpha_d)$. *L'exposant* $\mathrm{Exp}(P)$ de P est le couple $(v(P), \deg(P))$ de $\mathbb{N}^2$. Soit Q est un autre opérateur de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. On vérifie que $\mathrm{Exp}(PQ) = \mathrm{Exp}(P) + \mathrm{Exp}(Q)$. On dispose dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$ de la division suivante.

Lemme 1.3.1. *Soit H et P deux éléments de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ avec P non nul. On note (v, d) l'exposant de P. Alors H s'écrit uniquement sous la forme $H = QP + R + S$ avec Q, R et S dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$ vérifiant :*

1. *R est d'ordre $< d$;*
2. *$S = \sum_{d\leq i\leq d(H)} \mu_i \cdot \partial_k^i$, où $\mu_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ est de valuation strictement inférieure à v.*

Soit I un idéal à gauche non nul de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. On note $\deg(I)$ le minimum des ordres des éléments non nuls de I et $v(I)$ le minimum des valuations des éléments non nuls de I.

Définition 1.3.2. *On définit l'exposant d'un idéal I de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ par*

$$\mathrm{Exp}(I) = \{(v(P), \deg(P)), P \in I\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{N}^2$$

On vérifie pour tous entiers naturels i et j que

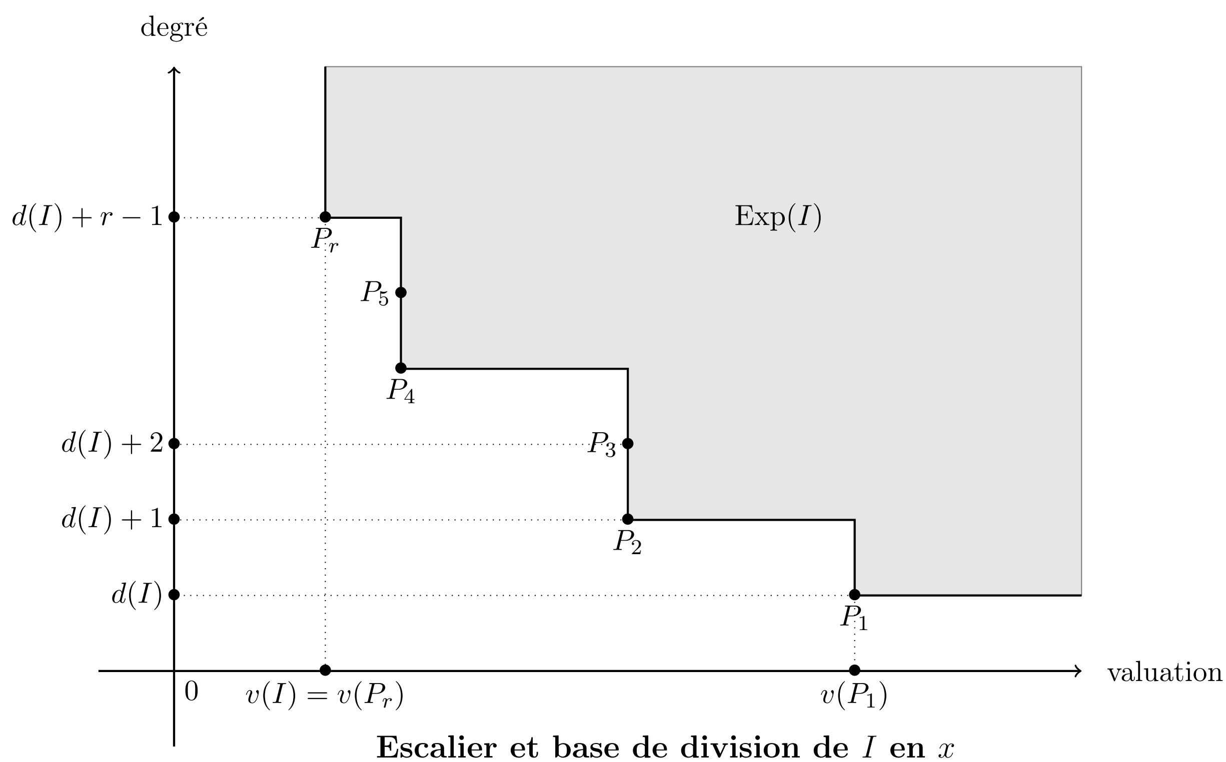
$$\mathrm{Exp}(t^i \cdot P) = (i, 0) + \mathrm{Exp}(P) \quad \text{et} \quad \mathrm{Exp}(\partial_k^j \cdot P) = (0, j) + \mathrm{Exp}(P)$$

On en déduit que $\mathrm{Exp}(I) = \mathrm{Exp}(I) + \mathbb{N}^2$. Ainsi, l'exposant de I est une partie de $\mathbb{N}^2$ délimitée inférieurement par un escalier fini.

Soit P_1 un élément de I d'ordre minimal d et de valuation minimale parmi les éléments de I d'ordre d. On choisit récursivement un élément P_{i+1} de I d'ordre $\deg(P_{i+1}) = \deg(P_i)+1$ et de valuation minimale parmi les éléments de même ordre jusqu'à obtenir un élément P_r de valuation minimale dans I.

On obtient ainsi une famille d'opérateurs $(P_1, \ldots, P_r)$ échelonnée pour l'ordre telle que P_i soit de valuation minimale parmi les éléments de même ordre, telle que $\deg(I) = d(P_1)$ soit l'ordre minimal des éléments de I et telle que $v(I) = v(P_r)$ soit la valuation minimale des éléments de I. Une telle famille est appelée *base de division* de I.

Soit I un idéal de $\mathcal{D}_{X,k}$ et $x \in X$. Alors I_x est un idéal de $\mathcal{D}_{X,k,x} = \mathcal{D}_{X,k} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{O}_{X,x}$. On appelle *base de division* de I relativement au point x une base de division $(P_1, \ldots, P_r)$ de l'idéal I_x. Les opérateurs $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $I(U)$ pour un certain ouvert affine U contenant x. La figure ci-dessous illustre graphiquement le positionnement d'une base de division vis-à-vis de l'exposant de I en x.



Escalier et base de division de I en x

Soit I un idéal cohérent non nul de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. On déduit du lemme 1.3.1 la division suivante selon une base de division de l'idéal I.

Proposition 1.3.3. *Soit $(P_1,\dots,P_r)$ une base de division de I. Alors tout élément H de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ se décompose uniquement sous la forme $H=\sum_{i=1}^{r} Q_iP_i+R+S$ avec*

1. $Q_1,\dots,Q_{r-1}\in\mathcal{O}_{X,x}$ *et* $Q_r,R,S\in\mathcal{D}_{X,k,x}$;
2. $\deg(R)<\deg(I)=\deg(P_1)$;
3. *S s'écrit*
$$S=\sum_{\deg(I)\le\ell\le\deg(H)}\mu_\ell\cdot\partial_k^\ell$$
où $\mu_\ell\in\mathcal{O}_{X,x}$ vérifie $v(\mu_\ell)<v(P_\ell)$ si $d(P_1)\le\ell\le d(P_r)$ et $v(\mu_\ell)<v(P_r)$ si $d(P_r)\le\ell\le d(H)$.

Démonstration. On effectue la division de H par P_r (lemme 1.3.1). On effectue ensuite la division du reste par P_{i-1}. Enfin on réitère les divisions jusqu'à arriver à P_1. □

Cette proposition implique clairement le corollaire suivant. En effet, pour des raisons d'ordre et de valuation, l'opérateur H appartient à I si et seulement si $R+S=0$.

Corollaire 1.3.4. *Toute base de division de I engendre l'idéal I.*

On fixe une base de division $(P_1,\dots,P_r)$ de I. On note $\mathrm{Exp}(P_i)=(\alpha_i,d_i)$, où $d=d_1$ est l'ordre minimum des éléments de I et $d_{i+1}=d_i+1$. On suppose les P_i normalisés. Autrement dit, le terme dominant de P_i est de la forme $t^{\alpha_i}\cdot\partial_k^{d_i}$. Puisque l'exposant de $t^{\alpha_{i-1}-\alpha_i}\cdot P_i$ est au dessus de l'escalier engendré par $P_1,\dots,P_{i-1}$, la division de $t^{\alpha_{i-1}-\alpha_i}\cdot P_i$ par I s'écrit :

$$t^{\alpha_{i-1}-\alpha_i}\cdot P_i=(\partial_k+\mu_{i,i-1})\cdot P_{i-1}+\mu_{i,i-2}\cdot P_{i-2}+\cdots+\mu_{i,1}\cdot P_1,\quad \mu_{i,j}\in\mathcal{O}_{X,x}$$

On appelle R_i cette relation. On note $R\in\mathrm{M}_{r-1,r}(\mathcal{D}_{X,k,x})$ la matrice transposée de

$$\begin{pmatrix}
\partial_k+\mu_{2,1} & \mu_{3,1} & \cdots & \cdots & \mu_{r,1}\\
-t^{\alpha_1-\alpha_2} & \partial_k+\mu_{3,2} & \mu_{4,2} & \cdots & \mu_{r,2}\\
 & -t^{\alpha_2-\alpha_3} & \partial_k+\mu_{4,3} & \cdots & \mu_{r,3}\\
 & & -t^{\alpha_3-\alpha_4} & \cdots & \vdots\\
 & 0 & \ddots & & \vdots\\
 & & & -t^{\alpha_3-\alpha_4} & \partial_k+\mu_{r,r-1}\\
 & & & & -t^{\alpha_{r-1}-\alpha_r}
\end{pmatrix}$$

On obtient alors le complexe suivant :

$$0\longrightarrow(\mathcal{D}_{X,k,x})^{r-1}\xrightarrow{\cdot R}(\mathcal{D}_{X,k,x})^{r}\xrightarrow{\varphi}I\longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

où $\varphi(Q_1,\dots,Q_r)=Q_1\cdot P_1+\cdots+Q_r\cdot P_r$.

Proposition 1.3.5. *La suite 1.1 est exacte. Il s'agit donc d'une résolution de I en tant que $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module à gauche.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $A_1P_1 + \cdots + A_rP_r = 0$ est une relation nulle, alors les A_i sont engendrés par les relations R_i. Soit $\ell \in \{1, \ldots, r+1\}$ et $j \geq 0$. On note $\mathcal{R}_{j,\ell}$ l'ensemble des relations nulles $(A_1, \ldots, A_r)$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall\, \ell \leq i \leq r\ , & d(A_i) \leq j \\ \forall\, 1 \leq i < \ell\ , & d(A_i) < j \end{cases}$$

Puisque les P_i sont de degrés deux à deux distincts, on a

$$\mathcal{R}_{0,1} = \{(A_1, \ldots, A_r\} : \forall\, 1 \leq i \leq r, \quad d(A_i) = 0\} = 0$$

De plus, $\mathcal{R}_{j-1,1} = \mathcal{R}_{j,r+1} = \mathcal{R}_{j,r}$. La première égalité est claire et la seconde s'obtient par une considération des degrés. En effet, soit $(A_1, \ldots, A_r) \in \mathcal{R}_{j,r}$. Par définition, $d(A_r) \leq j$ et $d(A_i) < j-1$ pour tout entier $1 \leq i \leq r-1$. Si $d(A_r) = j$, alors $A_1P_1 + \ldots A_{r-1}P_{r-1} = -A_rP_r$ est de degré $j + d_r$, mais chacun des termes de la somme a un degré inférieur à $(j-1) + d_{r-1} < j + d_r$. Ainsi, $d(A_r) < j$ et $(A_1, \ldots, A_r) \in \mathcal{R}_{j,r+1}$.

Il faut prouver que tous les éléments des $\mathcal{R}_{j,\ell}$ sont engendrés par les R_i. L'égalité que l'on vient de montrer permet de passer de l'indice j à l'indice $j+1$. Une récurrence décroissante sur ℓ montre que si $\mathcal{R}_{j,\ell+1}$ est engendré par les relations R_i, alors $\mathcal{R}_{j,\ell}$ l'est aussi. Soit $(A_1, \ldots, A_r)$ dans $\mathcal{R}_{j,\ell}$. On peut écrire $A_\ell = \mu\partial_k^\ell + A'_\ell$ avec $\mu \in \mathcal{O}_{X,x}$ et A'_ℓ de degré $< \ell$. En particulier, $(A_1, \ldots, A'_\ell, \ldots, A_r) \in \mathcal{R}_{j,\ell+1}$ et l'hypothèse de récurrence sur $\mathcal{R}_{j,\ell+1}$ implique que $(A_1, \ldots, A_r) - \mu\partial_k^{\ell-1}R_{\ell+1} \in \mathcal{R}_{j,\ell+1}$. Il en découle que $\mathcal{R}_{j,\ell}$ est aussi engendré par les relations R_i. $\square$

Lemme 1.3.6. *Soit I et J deux idéaux non nuls de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ tels que $\mathcal{D}_{X,k,x}/I \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}/J$. Alors* $\mathrm{Exp}(I) = \mathrm{Exp}(J)$. *Plus généralement, si $\mathcal{D}_{X,k,x}/I$ est un sous-module de $\mathcal{D}_{X,k,x}/J$, alors* $\mathrm{Exp}(J) \subset \mathrm{Exp}(I)$.

Démonstration. On munit $\mathcal{D}_{X,k,x}$ de la graduation donnée par le degré en la dérivation ∂_k. On considère pour les idéaux de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ la filtration induite par l'intersection avec la filtration de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. On vérifie que si $\mathcal{D}_{X,k,x}/I \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}/J$, alors

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})/\,\mathrm{gr}(I) \simeq \mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})/\,\mathrm{gr}(J)$$

en tant que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})$-modules à gauche. On se ramène ainsi au cas commutatif. Les éléments inversibles des algèbres $\mathcal{D}_{X,k,x}$ et $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})$ sont exactement les éléments d'exposant nul d'après la proposition 1.2.5. On en déduit que $(\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x}))^\times = \kappa^\times$ et que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})/\,\mathrm{gr}(I) \simeq \mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})/\,\mathrm{gr}(J)$ via la multiplication par un élément α de $\kappa^\times$. Il en découle que $\mathrm{gr}(I)$ est isomorphe à $\mathrm{gr}(J)$ via la multiplication par α et donc que $\mathrm{Exp}(\mathrm{gr}(I)) =$

$\mathrm{Exp}(\mathrm{gr}(J))$. Enfin, il est clair que $\mathrm{Exp}(I) = \mathrm{Exp}(\mathrm{gr}(I))$ et que $\mathrm{Exp}(J) = \mathrm{Exp}(\mathrm{gr}(J))$, d'où le résultat. Le second point du lemme s'obtient en observant que $\mathrm{gr}(J)$ est isomorphe à un sous-module de $\mathrm{gr}(I)$ via la multiplication par un élément de $\kappa^\times$. □

Remarque 1.3.7. *Lorsque $k \geq 1$, $\mathcal{D}_{X,k,x}$ est un anneau de polynômes en la variable ∂_k. Il n'est pas nécessaire de prendre le gradué dans la preuve du lemme précédent pour conclure.*

1.3.2 Théorèmes de division dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

Les résultats de cette partie sont une adaptation des théorèmes de division énoncés par Laurent Garnier dans [10] pour $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ au cas des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Les preuves se généralisent immédiatement pour un niveau de congruence k.

Définition 1.3.8. *Soit P un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.*

1. *On appelle coefficient dominant de P son coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$. Si $|P|_k = 1$, il s'agit du coefficient dominant de $\bar{P} = (P \mod \omega)$ après réduction modulo ω.*
2. *On dit que P est dominant (où $\overline{N}_k$-dominant) si P est un opérateur fini d'ordre $\overline{N}_k(P)$. Cette condition signifie que le coefficient de plus haut degré de P est de norme maximale, ou de manière équivalente que P et $\bar{P}$ ont le même ordre lorsque $|P|_k = 1$.*

Proposition 1.3.9. *Soit P un opérateur non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On note b son coefficient dominant et V l'ouvert $U_{\{b\}} \cup \{x\}$ de U. Alors tout élément H de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme $H = QP + R + S$ avec :*

1. *$Q, R, S \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$;*
2. *R est d'ordre fini $< \overline{N}_k(P)$;*
3. *$S = \sum_{i \geq \overline{N}_k(P)} \mu_i \cdot (\omega^k \partial)^i$, $\mu_i \in K[t]$ de degré $< N_k(P)$;*
4. *$|H|_k = \max\{|Q|_k \cdot |P|_k, |R|_k, |S|_k\}$.*

Si $H \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$, alors R et S appartiennent à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(V)$. Si de plus $|P|_k = 1$, alors Q appartient à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(V)$.

Si $N_k(P) = 0$, alors $S = 0$ puisque ses coefficients sont des polynômes de degrés strictement inférieurs à $N_k(P)$. En se restreignant à l'ouvert $V = U_{\{b\}}$, on peut factoriser P par b et supposer que $N_k(P) = 0$. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.10. *Soit P un opérateur non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ de coefficient dominant b. Si $V = U_{\{b\}}$, alors tout élément H de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme $H = QP+R$ avec :*

1. *$Q, R \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$;*
2. *R est d'ordre fini $< \overline{N}_k(P)$;*
3. *$|H|_k = \max\{|Q|_k \cdot |P|_k, |R|_k\}$.*

Ces théorèmes de divisions permettent de démontrer deux versions du lemme de Hensel pour tout opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

Proposition 1.3.11 (Lemme de Hensel)**.** *Soit H un opérateur non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ de coefficient dominant b. On note encore $V = U_{\{b\}} \cup \{x\}$. Alors H se décompose uniquement sous la forme $H = QP + S$ avec*

1. *$Q, P, S \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$;*
2. *P est $\overline{N}_k$-dominant de coefficient dominant b ;*
3. *$S = \sum_{i \geq \overline{N}_k(H)} \mu_i \cdot (\omega^k \partial)^i$ avec $\mu_i \in K[t]$ de degré $< N_k(P)$;*
4. *$|Q|_k = 1$ et il existe un ouvert $W \subset U$ tel que Q soit inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(W)$;*
5. *$|S|_k < |H|_k$.*

En ne cherchant plus à énoncer une division sur un ouvert contenant x, on obtient la version suivante du lemme d'Hensel.

Proposition 1.3.12 (Lemme de Hensel)**.** *Soit $H \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \backslash \{0\}$ de coefficient dominant b. Alors H se décompose uniquement sous la forme $H = QP$ avec*

1. *$Q, P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_{\{b\}})$;*
2. *P est $\overline{N}_k$-dominant de coefficient dominant b ;*
3. *$|Q|_k = 1$ et Q est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_{\{b\}})$.*

Les deux corollaires suivant se déduisent immédiatement de la division selon un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.

Corollaire 1.3.13. *Soit $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent à gauche donné par un opérateur différentiel P de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Alors il existe un ouvert V de U (obtenu en retirant les zéros du coefficients dominant de P) sur lequel $\mathcal{M}_{|V} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\tilde{P}$ avec $\tilde{P}$ un opérateur $\overline{N}_k$-dominant de même coefficient dominant que P. De plus, $\mathcal{M}_{|V}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}$-module libre de rang $\overline{N}_k(P)$.*

Démonstration. On applique le lemme d'Hensel à P avec V l'ouvert sur lequel le coefficient dominant de P est inversible. On peut écrire $P = Q\tilde{P}$ avec $\tilde{P}$ vérifiant les conditions de l'énoncé et Q un opérateur inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. On en déduit que $\mathcal{M}_{|V} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\tilde{P}$.

La seconde partie de l'énoncé découle du théorème de division dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ puisque le coefficient dominant de $\tilde{P}$ est inversible sur V : tout élément H de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ s'écrit uniquement sous la forme $H = Q\tilde{P} + R$ avec $R \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ un opérateur différentiel fini d'ordre $< \overline{N}_k(P)$. $\square$

Ce corollaire implique le résultat suivant.

Corollaire 1.3.14. *Soient $P, Q \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ tels que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/Q$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à gauche. Alors $\overline{N}_k(P) = \overline{N}_k(Q)$.*

Démonstration. Soit V un ouvert contenu dans U sur lequel $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}}/P \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}}/\tilde{P}$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}}/Q \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}}/\tilde{Q}$ avec $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ des opérateurs finis d'ordre $\overline{N}_k(P)$ et $\overline{N}_k(Q)$ respectivement. Ces deux modules sont des $\mathcal{O}_{V,\mathbb{Q}}$-modules libres de rang $\overline{N}_k(P)$ et $\overline{N}_k(Q)$ respectivement. Puisqu'ils sont isomorphes en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}}$-modules, ils sont isomorphes en tant que $\mathcal{O}_{V,\mathbb{Q}}$-modules. On en déduit que $\overline{N}_k(P) = \overline{N}_k(Q)$. $\square$

La proposition suivante provient de l'existence d'une division « euclidienne » sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ (corollaire 1.3.10) et du lemme d'Hensel (proposition 1.3.12). La preuve est analogue à celle de la proposition 5.1.2 de l'article [10] de Laurent Garnier.

Proposition 1.3.15. *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x. Alors il existe un ouvert affine non vide V contenu dans U, un opérateur fini dominant P de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ et un entier n tels que*

$$\mathcal{M}_{|V} \simeq (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}}/P) \oplus (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}})^n$$

Remarque 1.3.16. *L'ouvert V donné dans la proposition ne contient pas nécessairement le point x. Pour avoir une division euclidienne, il faut pouvoir réduire l'ouvert en retirant les zéros du coefficient dominant de l'opérateur. On ne donc pas espérer avoir une telle description locale de $\mathcal{M}$ au voisinage de chaque point de $\mathfrak{X}$.*

1.3.3 Base de division d'un idéal de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

On termine cette section par rappeler ce qu'est une base de division d'un idéal cohérent non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Une telle base permettra de calculer la variété caractéristique du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$. On donne ensuite un résultat de division selon une base de division d'un tel idéal. On explicite aussi une résolution libre finie de l'idéal $\mathcal{I}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à gauche. On en déduit une résolution libre finie explicite de longueur deux du module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$. Les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes étant exactement les quotients de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ par un idéal non nul, on obtient ainsi une résolution libre finie de longueur trois pour n'importe quel module holonome.

On commence par définir la notion de base de division en x au niveau de la fibre spéciale X de $\mathfrak{X}$. Soit U un ouvert affine contenant x admettant une coordonnée locale associée à x. On rappelle que $\mathcal{D}_{X,k,x} = \mathcal{D}_{X,k}(U) \otimes_\kappa \mathcal{O}_{X,x}$ est la κ-algèbre des opérateurs différentiels en ∂_k à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante t. Les notions de base de division en x coïncident entre un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ et sa réduction modulo ω dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$.

Soit I un idéal de $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_\mathcal{V} \kappa$ et $x \in X$. Alors I_x est un idéal de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. On appelle *base de division* de I relativement au point x une base de division $(P_1, \dots, P_r)$ de l'idéal I_x. Les opérateurs $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $I(U)$ pour un certain ouvert affine U contenant x.

Soient maintenant $\mathcal{I}$ un idéal à gauche cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et $Q \in \mathcal{I}_x$; Q est un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour un certain ouvert affine U contenant x. On lui associe le couple $(N_k(Q), \overline{N}_k(Q))$ ne dépendant que de x appelé *exposant* de Q en x. Si Q est de norme un, on rappelle que $N_k(Q)$ et $\overline{N}_k(Q)$ sont respectivement la valuation et l'ordre de $(Q \mod \omega)$ dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$. *L'exposant* de $\mathcal{I}$ en x est

$$\operatorname{Exp}(\mathcal{I}_x) = \{(N_k(Q), \overline{N}_k(Q)), Q \in \mathcal{I}_x \backslash \{0\}\} \subset \mathbb{N}^2$$

On définit comme pour un idéal de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ une base de division de $\mathcal{I}$ relativement au point x. C'est une famille d'éléments $(P_1, \dots, P_r)$ de $\mathcal{I}_x$ échelonnée pour la fonction $\overline{N}_k$ telle que P_i soit de fonction N_k minimale parmi les éléments de même fonction $\overline{N}_k$, telle que $N_k(\mathcal{I}) = N_k(P_r)$ soit minimale parmi les éléments de $\mathcal{I}$ et telle que $\overline{N}_k(\mathcal{I}) = \overline{N}_k(P_1)$ soit minimale parmi les éléments de $\mathcal{I}$. On demande de plus que les P_i soient normalisés : pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $|P_i|_k = 1$.

Cette dernière condition permet d'assurer la compatibilité des bases de division dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ et dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$ après réduction modulo ω. En effet, soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ admettant une base de division en x. On note I la réduction modulo ω de $\mathcal{I}$; c'est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{X,k}$ et I_x est un idéal de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. Alors $(P_1, \dots, P_r)$ est une base de division de $\mathcal{I}$ relativement à x si et seulement si $(P_1 \mod \omega, \dots, P_r \mod \omega)$ est une base de division de l'idéal I_x. En particulier, les escaliers et les exposants des idéaux I et $\mathcal{I}$ coïncident en x.

Les résultats suivants sont démontrés pour $k = 0$ par Laurent Garnier toujours dans l'article [10], partie 4. Ils résultent de l'existence d'une division de tout élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ par une base de division de l'idéal $\mathcal{I}$ en x. Ses preuves s'adaptent immédiatement à un indice de congruence quelconque.

Lemme 1.3.17. *Toute base de division de $\mathcal{I}$ en x engendre l'idéal $\mathcal{I}_x$.*

Une base de division existe toujours pour les idéaux de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Cependant, ce n'est plus vrai pour les idéaux de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. Si $\mathcal{I}$ est un idéal non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$, alors il n'est pas toujours possible de normaliser les opérateurs P_i. En effet, de la ω-torsion peut poser problème. Le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'idéal $\mathcal{I}$ admette une base de division en x.

Lemme 1.3.18. *Un idéal cohérent $\mathcal{I}$ non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ admet une base de division relativement à x si et seulement si $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}$ est sans ω-torsion au voisinage de x.*

On a vu précédemment que tout idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ admet une résolution en tant que $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module à gauche de la forme

$$0 \longrightarrow (\mathcal{D}_{X,k,x})^{r-1} \longrightarrow (\mathcal{D}_{X,k,x})^{r} \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

Une telle résolution existe au voisinage de x pour un idéal cohérent $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ admettant une base de division relativement au point x. Cela provient du fait qu'une base de division de $\mathcal{I}$ en x coincide avec une base de division de en x de $(\mathcal{I} \mod \omega)$ dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$. La propriété suivante, à condition d'avoir une base de division, fournit une présentation finie d'un idéal cohérent à gauche de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module à gauche. Il s'agit de la proposition 4.3.1 de [10].

Proposition 1.3.19. *On suppose que x est un point κ-rationnel. Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ admettant une base de division $(P_1, \dots, P_r)$ relativement à x. Alors il existe un ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ contenant x et une matrice de relation $R \in \mathrm{M}_{r-1,r}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})$ obtenue à partir des P_i pour lesquels le complexe suivant de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules est exacte ;*

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k})^{r} \longrightarrow \mathcal{I}_{|U} \longrightarrow 0$$

Démonstration. Soit b_i le coefficient d'indice $\overline{N}_k(P_i)$ de P_i et $\lambda < 1$ tel que $D(0,\lambda^+)$ contienne toutes les racines des fonctions $b_{i|]x[}$. D'après le lemme d'Hensel, $b_{i|D(0,\lambda^+)}$ est le produit d'un polynôme de $\mathcal{V}[t]$ de degré $N(b_i,\lambda) = N(b_i) = N_k(P_i)$ à racines dans $D(0,\lambda^+)$ et d'une série μ_i inversible dans $D(0,\lambda^+)$ de norme 1. Comme $|b_i| = \lim_{\lambda\to 1^-} \|b_i\|_\lambda = 1$, on peut écrire

$$b_i = \left(t^{N_k(P_i)} + \sum_{j=0}^{N_k(P_i)-1} \alpha_j \cdot t^j \right) \cdot \mu_i$$

ou μ_i est inversible sur $]x[$ de norme spectrale 1. En particulier, μ_i se prolonge sur un ouvert U_K, ou U est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x. Ainsi, $\mu_i \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^{\times}(U)$ et quitte à modifier P_i, on peut supposer que $b_i = t^{N_k(P_i)} + \sum_{j=0}^{N_k(P_i)-1} \alpha_j \cdot t^j$. Puisque $\overline{N}_k(P_{i+1}) = \overline{N}_k(P_i) + 1$, $(t^{N_k(P_i)-N_k(P_{i+1})} P_{i+1} - \omega^k \partial P_i \mod \omega)$ est d'ordre strictement inférieur à $\overline{N}_k(P_{i+1})$ dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$. Dans la division de cet opérateur par la base de division $(P_j \mod \omega)_{1\leq j\leq r}$, seuls les opérateurs $P_1, \ldots, P_i$ interviennent (son exposant est dans l'escalier engendré par $P_1 \mod \omega, \ldots, P_i \mod \omega$) :

$$t^{N_k(P_i)-N_k(P_{i+1})} P_{i+1} = \omega^k \partial P_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_{i,j} P_j + \sum_{j=1}^{r} Q_{i,j} P_j$$

avec $\mu_{i,j} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et $Q_{i,j} \in \mathfrak{m} \cdot \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. Comme pour $\mathcal{D}_{X,k,x}$, on en déduit un complexe

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})^{r} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

où la matrice R est donnée par les relations obtenues si dessus. Modulo $\mathfrak{m}$, on trouve la matrice de relation de la suite 4.2. Il reste à prouver l'exactitude. Les termes étant complets pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, il suffit de le montrer modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ pour tout entier n et de manière équivalente pour la suite des gradués. Or la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de la suite est exacte (proposition 1.3.5 sur $\mathcal{D}_{X,k,x}$) puisque la réduction modulo ω de la base de division $(P_1, \ldots, P_r)$ est encore une base de division en x. Ainsi, la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{gr} \mathcal{V} \otimes_k (\mathcal{D}_{X,k,x})^{r-1} \longrightarrow \operatorname{gr} \mathcal{V} \otimes_k (\mathcal{D}_{X,k,x})^{r} \longrightarrow \operatorname{gr} \mathcal{V} \otimes_k (\mathcal{I}/\mathfrak{m}\mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

est aussi exacte puisque $\operatorname{gr} \mathcal{V} \simeq \kappa[X]$ est plat. Comme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ est sans $\mathfrak{m}$-torsion, la suite des gradués est isomorphe à la suite précédente, ce qui donne le résultat. □

Soit $\mathcal{I}^\circ$ un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ tel que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}^\circ$ soit sans ω-torsion au voisinage de x. Si $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}^\circ$ est un autre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent sans torsion tel que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}^\circ \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}^\circ$, alors $\operatorname{Exp}(\mathcal{I}^\circ_x) = \operatorname{Exp}(\mathcal{J}^\circ_x)$. Cela résulte du lemme 1.3.6 en réduisant ces $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-modules modulo ω. En effet, soit $I = (\mathcal{I}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)_x$ et $J = (\mathcal{J}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)_x$. Alors $\mathcal{D}_{X,k,x}/I \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}/J$, $\operatorname{Exp}(\mathcal{I}^\circ_x) = \operatorname{Exp}(I)$ et $\operatorname{Exp}(\mathcal{J}^\circ_x) = \operatorname{Exp}(J)$. Le lemme 1.3.6 implique que $\operatorname{Exp}(I) = \operatorname{Exp}(J)$. Soit maintenant $\mathcal{E}^\circ$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent sans ω-torsion tel que $\mathcal{E}^\circ_x \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}^\circ$. On définit son exposant comme étant celui de l'idéal $\mathcal{I}^\circ$: $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}^\circ_x) = \operatorname{Exp}(\mathcal{I}^\circ_x)$.

On démontre maintenant un résultat plus fort que le corollaire 1.3.14 : si $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à gauche, alors $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ ont le même exposant en x. En particulier, ces deux idéaux ont le même escalier.

Lemme 1.3.20. *Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux cohérents non nuls de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ tels que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J}$. Alors pour tout point x de $\mathfrak{X}$,* $\mathrm{Exp}(\mathcal{I}_x) = \mathrm{Exp}(\mathcal{J}_x)$.

Démonstration. Soit $P_1, \ldots, P_r$ une base de division de $\mathcal{I}$ relativement au point x. Les opérateurs $P_1, \ldots, P_r$ sont définis sur un certain ouvert affine U de $\mathfrak{X}$. La question étant locale en x, on peut supposer que $\mathfrak{X} = U$. Soit $\mathcal{I}^\circ$ l'idéal de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ engendré par les opérateurs $P_1, \ldots, P_r$. Le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}^\circ$ est sans ω-torsion d'après le lemme 1.3.18 puisque les opérateurs $P_1, \ldots, P_r$ forment une base de division de $\mathcal{I}^\circ$. Alors $\mathcal{E}_1^\circ = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}^\circ$ est un modèle entier de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$. Par construction de $\mathcal{I}^\circ$, on a $\mathrm{Exp}(\mathcal{I}^\circ_x) = \mathrm{Exp}(\mathcal{I}_x)$.

Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que si $\mathcal{E}_2^\circ = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}^\circ$ est un autre modèle entier de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$, alors $\mathrm{Exp}(\mathcal{J}^\circ_x) = \mathrm{Exp}(\mathcal{I}^\circ_x)$. Puisque $\mathcal{E}_1^\circ$ et $\mathcal{E}_2^\circ$ sont deux modèles entiers de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$, il existe deux entiers relatifs a et b tels que $\omega^a\mathcal{E}_1^\circ \subset \mathcal{E}_2^\circ \subset \omega^b\mathcal{E}_1^\circ$. Comme $\mathcal{E}_1^\circ$ est sans ω-torsion, $\mathcal{E}_1^\circ \simeq \omega^a\mathcal{E}_1^\circ$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-modules via la multiplication par ω^a. On en déduit que $\mathrm{Exp}((\omega^a\mathcal{E}_1^\circ)_x) = \mathrm{Exp}((\mathcal{E}_1^\circ)_x)$. On se ramène donc à montrer que $\mathcal{E}_1^\circ \subset \mathcal{E}_2^\circ$ implique $\mathrm{Exp}((\mathcal{E}_2^\circ)_x) \subset \mathrm{Exp}((\mathcal{E}_1^\circ)_x)$. Cette inclusion découle alors du lemme 1.3.6 en réduisant ces modules modulo ω. □

Chapitre 2

$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes

On adapte dans ce chapitre la dernière partie de l'article [10] de Laurent Garnier. On définit les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes comme étant les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents dont la variété caractéristique est de dimension au plus un. On démontre dans la partie 2.4 que les modules holonomes sont de longueur finie. Ce résultat découle de l'inégalité de Bernstein établie dans la partie 2.3 : un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est non nul si et seulement si les composantes irréductibles de sa variété caractéristique sont toutes de dimension au moins un. Elle généralise pour un niveau de congruence k l'inégalité démontrée par Laurent Garnier. On en déduit que les multiplicités des variétés caractéristiques vont s'additionner dans la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes et qu'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est nul si et seulement ses multiplicités sont toutes nulles. On désigne toujours par U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée locale.

2.1 Rappels sur la variété caractéristique

On rappelle brièvement dans cette partie la construction de la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Elle est adaptée de celle de Berthelot pour un indice de congruence k. Cette variété caractéristique est définie comme étant la variété caractéristique « classique » de la réduction modulo ω d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent, donc d'un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. On peut consulter les notes de Berthelot (par exemple la partie 5.2 de [7]) ou l'annexe A pour plus de détails sur la variété caractéristique.

On rappelle que $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est la réduction modulo ω de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. C'est un faisceau d'algèbres sur la fibre spéciale $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \operatorname{Spec} \kappa$ de $\mathfrak{X}$. Comme $\mathfrak{X}$ et X ont le même espace topologique, on identifie U à un ouvert affine de X. On note ∂_k l'image de $\omega^k \partial$ dans $\mathcal{D}_{X,k}$.

On a

$$\mathcal{D}_{U,k} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

On munit $\mathcal{D}_{X,k}$ de la filtration croissante donnée localement par l'ordre des opérateurs différentiels :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Fil}^m(\mathcal{D}_{U,k}) = \bigoplus_{0\leq n\leq m} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

On note $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{gr}_m\,\mathcal{D}_{X,k}$ le gradué associé et ξ_k l'image de ∂_k dans $\mathrm{gr}_1(\mathcal{D}_{U,k})$. Localement, $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U,k}) \simeq \mathcal{O}_U[\xi_k]$ est un anneau de polynômes en une variable sur $\mathcal{O}_U$. En particulier, le fibré cotangent T^*X de X est isomorphe à $\mathrm{Spec}\,\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k})$ en tant que κ-schéma. On identifie ces deux schémas dans la suite. On note $\pi : T^*X \to X$ la projection canonique.

Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un opérateur de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ d'ordre d. On lui associe un élément du gradué $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k}(U)$ appelé *symbole principal* de P par

$$\sigma(P) = a_d \cdot \xi_k^d \in \mathrm{gr}_d\,\mathcal{D}_{X,k}(U)$$

Remarque 2.1.1. *On rappelle que $[\omega^k\partial, x] = \omega^k \cdot \mathrm{id}$ dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. Pour $k \geq 1$, on a donc $[\partial_k, x] = 0$ dans $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Ainsi, $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est une algèbre commutative, donc une algèbre de polynômes en une variable : $\mathcal{D}_{X,k}(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$.*

Une filtration $(\mathrm{Fil}^\ell E)_{\ell\in\mathbb{N}}$ d'un $\mathcal{D}_{X,k}$-module quasi-cohérent à gauche E est une suite croissante $(\mathrm{Fil}^\ell E)_\ell$ de sous $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents de E telle que

1. $E = \bigcup_{\ell\geq 0} \mathrm{Fil}^\ell E$;
2. $\forall n, \ell \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{Fil}^n\,\mathcal{D}_{X,k}) \cdot (\mathrm{Fil}^\ell E) \subset \mathrm{Fil}^{\ell+n} E$.

Le gradué $\mathrm{gr}\,E$ pour une telle filtration est un $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k}$-module. La filtration est appelée *bonne filtration* si $\mathrm{gr}\,E$ est un $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. Puisque X est quasi-compacte, tout $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent admet une bonne filtration globale.

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent E muni d'une bonne filtration globale. On associe à E le $\mathcal{O}_{T^*X}$-module cohérent suivant

$$\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\mathrm{gr}\,E)$$

Définition 2.1.2. *La variété caractéristique de E est le support de $\tilde{E}$: $\mathrm{Car}\,E = \mathrm{Supp}\,\tilde{E}$.*

C'est une sous-variété fermée de T^*X puisque le module $\tilde{E}$ est cohérent. La variété caractéristique est indépendante du choix de la bonne filtration choisie.

On appelle *multiplicités* de E les multiplicités des composantes irréductibles de $\mathrm{Car}\,E$. Soit C une composante irréductible de $\mathrm{Car}\,E$ et η son point générique. Par définition, la multiplicité m_C de C est la longueur du $(\mathcal{O}_{T^*X})_\eta$-module artinien $\tilde{E}_\eta$. C'est un entier positif non nul dès que E est non nul. Lorsque C est un fermé irréductible non vide de T^*X non contenu dans $\operatorname{Car} E$, on pose $m_C = 0$.

On note $I(\operatorname{Car} E)$ l'ensemble des composantes irréductibles de la variété caractéristique de E. On définit le *cycle caractéristique* de E par la somme formelle

$$\mathrm{CC}(E) = \sum_{C \in I(\operatorname{Car} E)} m_C \cdot C$$

On rappelle le résultat classique suivant qu'on utilisera plus tard.

Proposition 2.1.3. *Soit* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{D}_{X,k}$-*modules cohérents. Alors* $\operatorname{Car} N = \operatorname{Car} M \cup \operatorname{Car} L$. *De plus si* C *est une composante irréductible de* $\operatorname{Car} N$, *alors* $m_C(N) = m_C(M) + m_C(L)$ *(avec* $m_C(M) = 0$ *ou* $m_C(L) = 0$ *si* C *n'est pas dans* $\operatorname{Car} M$ *ou* $\operatorname{Car} L$*).*

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent à gauche. Un *modèle entier* de $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent $\mathcal{E}^\circ$ sans ω-torsion tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} K$. Puisque $\mathcal{E}$ est cohérent, il existe toujours un modèle entier $\mathcal{E}^\circ$ de $\mathcal{E}$. La réduction $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ modulo ω de $\mathcal{E}^\circ$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent.

Définition 2.1.4. *La variété caractéristique de* $\mathcal{E}$ *est la variété caractéristique du* $\mathcal{D}_{X,k}$-*module cohérent* $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$: $\operatorname{Car}(\mathcal{E}) = \operatorname{Car}(\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$.

C'est un sous-schéma fermé du fibré cotangent T^*X de X indépendant du choix du modèle entier. On appelle *multiplicités* de $\mathcal{E}$ les multiplicités de sa variété caractéristique.

On termine cette partie par des exemples explicites de variétés caractéristiques. Ils permettent en pratique de calculer toutes les variétés caractéristiques.

Exemple 2.1.5. On suppose que $\mathfrak{X}$ est une courbe affine munie d'une coordonnée locale. On note toujours $\xi_k = \sigma(\partial_k)$ l'image de ∂_k dans le gradué $\mathrm{gr}_1(\mathcal{D}_{X,k})$.

1. Puisque le support de $\mathcal{D}_{X,k}$ est X tout entier, on a $\operatorname{Car} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = T^*X$.
2. Si $\mathcal{E} = 0$, alors sa variété caractéristique est vide.
3. Soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ avec $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$ un opérateur différentiel non nul. Quitte à multiplier P par une bonne puissance de ω, on peut supposer que $|P|_k = 1$. Alors $\mathcal{E}^\circ = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/P$ est un modèle entier de $\mathcal{E}$. On note $d = \overline{N}_k(P)$ et b le coefficient d'indice d de P. La réduction $\bar{P}$ de P modulo ω est un opérateur de $\mathcal{D}_{X,k}(X)$ d'ordre d. Son coefficient dominant est $\bar{b} = (b \mod \omega) \in \mathcal{O}_X(X)$.

On munit $\mathcal{E}^\circ \otimes_\mathcal{V} \kappa \simeq \mathcal{D}_{X,k}/\bar{P}$ de la filtration quotient. Alors

$$\mathrm{gr}(\mathcal{E}^\circ \otimes_\mathcal{V} \kappa) = \mathrm{gr}\, \mathcal{D}_{X,k}/(\sigma(\bar{P}))$$

où $\sigma(\bar{P}) = \bar{b} \cdot \xi_k^d$ est le symbole principal de $\bar{P}$. L'annulateur du module $\mathrm{gr}(\mathcal{E}^\circ \otimes_\mathcal{V} \kappa)$ est l'idéal engendré par $\sigma(\bar{P})$. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ est donc donnée par l'équation

$$\mathrm{Car}(\mathcal{E}) = \{(t,\xi) \in T^*X : \sigma(\bar{P})(t,\xi) = \bar{b}(t) \cdot \xi^d = 0\}$$

4. Plus généralement, soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal cohérent non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. On se donne un modèle entier $\mathcal{E}^\circ = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J}$ de $\mathcal{E}$, avec $\mathcal{J}$ un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ tel que $\mathcal{J} \otimes_\mathcal{V} K = \mathcal{I}$. On note I la réduction modulo ω de $\mathcal{J}$. C'est un idéal de $\mathcal{D}_{X,k}$. Alors

$$\mathrm{Car}(\mathcal{E}) = \{(t,\xi) \in T^*X : \sigma(P)(t,\xi) = 0 \quad \forall P \in I\}$$

2.2 Réduction au cas des $\mathcal{D}_{X,k,x}$-modules cohérents

Soit $x \in X$ et E un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module cohérent. On associe, de la même manière que dans la partie précédente, au module E une variété caractéristique $\mathrm{Car}\, E$ définie comme un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}\left(\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})\right)$. On note $s : X \to T^*X$ la section nulle du fibré cotangent. Le lemme suivant montre que les notions de variétés caractéristiques et de multiplicités coïncident entre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{D}_{X,k,x}$.

Lemme 2.2.1. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et $\mathcal{E}^\circ$ un modèle entier. On dispose d'un isomorphisme*

$$\mathrm{Car}(\mathcal{E}^\circ \otimes \kappa) \times_X \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq \mathrm{Car}(\mathcal{E}^\circ_x \otimes \kappa)$$

De plus, les multiplicités de $\mathrm{Car}(\mathcal{E}^\circ_x \otimes \kappa)$ sont les multiplicités des composantes irréductibles de $\mathrm{Car}(\mathcal{E}^\circ \otimes \kappa)$ contenant $s(x)$.

Démonstration. On note $E = \mathcal{E}^\circ \otimes_\mathcal{V} \kappa$. C'est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. L'isomorphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules $\mathcal{E}^\circ_x \otimes_\mathcal{V} \kappa \simeq (\mathcal{E}^\circ \otimes_\mathcal{V} \kappa)_x$ est en fait un isomorphisme de $\mathcal{D}_{X,k,x}$-modules car 2.1 est un isomorphisme de κ-algèbres. Le problème se ramène donc à démontrer que $\mathrm{gr}(E) \otimes \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathrm{gr}(E_x)$ en tant que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})$-modules. La question étant locale en x, on peut supposer X affine.

Comme E est $\mathcal{D}_{X,k}$-cohérent, E est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Il est donc suffisant d'étudier le module des sections globales $E(X)$. Puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est le localisé de $\mathcal{O}_X(X)$ en x, $E(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à E_x en tant que $\mathcal{O}_{X,x}$-module. En particulier, le morphisme $\mathcal{D}_{X,k}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{D}_{X,k,x} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{X,x} \cdot \partial_k^n$ est un isomorphisme de

$\mathcal{O}_{X,x}$-modules car $\mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X \cdot \partial_k^n$. Il s'agit d'un isomorphisme de κ-algèbres pour le produit sur $\mathcal{D}_{X,k}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ induit par le produit tensoriel :

$$\mathcal{D}_{X,k}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{D}_{X,k,x} \tag{2.1}$$

On en déduit que $E(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \simeq E_x$ est un $\mathcal{D}_{X,k,x}$-isomorphisme.

On munit $E(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ de la filtration $\mathrm{Fil}^n(E(X)) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ et E_x de la filtration image. Alors $\mathrm{gr}(E(X)) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathrm{gr}(E_x)$ en tant que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x}(X))$-modules. Il reste à vérifier que leurs supports coïncident. Soit $y \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{X,x})$. On a

$$(\mathrm{gr}(E(X)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x})_y = (\mathrm{gr}\, E(X))_{\varphi^{-1}(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\varphi^{-1}(y)}} (\mathcal{O}_{X,x})_y$$

où φ est le morphisme canonique $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$. Comme $\mathcal{O}_X(X)$ est intègre, ce module est non nul si et seulement si $(\mathrm{gr}\, E(X))_{\varphi^{-1}(y)}$ est non nul. □

Remarque 2.2.2. *On a demontré que $\mathcal{D}_{X,k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}$ en tant que κ-algèbres. On identifie par la suite ces deux algèbres.*

On désigne maintenant le $\mathcal{D}_{X,k}$-module $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ simplement par $\mathcal{E} \otimes \kappa$ et le $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module $\mathcal{E}_x^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ par $\mathcal{E}_x \otimes \kappa$. Ces notations sous-entendent le choix d'un modèle entier. Puisque la variété caractéristique ne dépend pas du modèle entier, les variétés $\mathrm{Car}(\mathcal{E} \otimes \kappa)$ et $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$ sont définis sans ambiguïté.

Lorsque x est un point κ'-rationnel pour une extension finie κ' de κ, il sera parfois nécessaire d'étendre les scalaires à κ'. Cependant, si E est un $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module cohérent, les variétés caractéristiques de E et de $E \otimes_\kappa \kappa'$ auront la même dimension puisque l'extension d'algèbres κ'/κ est finie. Il est donc suffisant de tout démontrer au niveau de κ pour les points rationnels.

Définition 2.2.3. *On appelle multiplicités de $\mathcal{E}$ en x les multiplicités de la variété caractéristique* $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$.

D'après le lemme 2.2.1, il s'agit des multiplicités des composantes irréductibles de la variété caractéristique de $\mathcal{E}$ contenant $s(x)$.

L'étude de la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent se ramène donc à étudier les variétés caractéristiques des $\mathcal{D}_{X,k,x}$-modules cohérents. On explicite dans ce paragraphe la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module cohérent non nul E. On peut tout d'abord se ramener au cas où $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k,x}$. En effet, puisque E est cohérent, E est engendré par des sections globales $e_1, \ldots, e_r$. Si $I_i = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_{X,k,x}}(e_i)$, alors $\mathcal{D}_{X,k,x} \cdot e_i \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}/I_i$. Comme la variété caractéristique est un support et puisque le support d'une somme est l'union des supports des termes de la somme, on a

$$\mathrm{Car}(E) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Car}(\mathcal{D}_{X,k,x}/I_i)$$

Ainsi on peut supposer que $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/I$. Si $I = 0$, alors $\operatorname{Car} E = \operatorname{Spec}\left(\operatorname{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})\right)$ car le support de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ est l'espace tout entier. On se place maintenant dans le cas où I est un idéal non nul. Soit $P_1 \dots, P_r$ une base de division de I comme définie dans la partie 1.3.1. Les symboles principaux $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_r)$ engendrent le gradué $\operatorname{gr}(I)$ comme $\operatorname{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})$-module. On note $d = d(I)$ et $\alpha = v(I)$. Par définition, le couple (α, d) est l'exposant de l'idéal I. On écrit $\operatorname{Exp}(P_1) = (d, \alpha_1)$, $\operatorname{Exp}(P_2) = (d+1, \alpha_2)$, $\dots$, $\operatorname{Exp}(P_r) = (d+r-1, \alpha)$ où $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha$. Quitte à normaliser les P_i, on a $\sigma(P_i) = t^{\alpha_i} \cdot \xi_k^{d+i-1}$. La variété caractéristique de E est alors

$$\operatorname{Car}(E) = \left\{(t, \xi_k) \in \operatorname{Spec}\left(\operatorname{gr}(\mathcal{D}_{X,k,x})\right) : \quad t^{\alpha_1} \cdot \xi_k^d = t^{\alpha_2} \cdot \xi_k^{d+1} = \cdots = t^{\alpha} \cdot \xi_k^{d+r-1} = 0\right\}$$

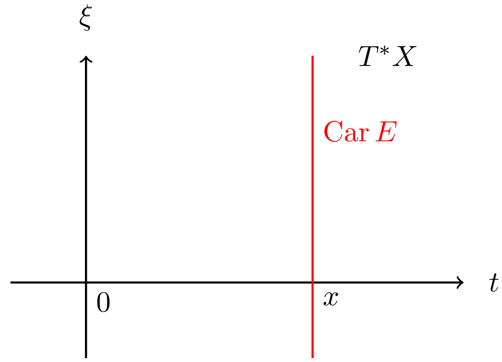
Dans $\mathcal{D}_{X,k,x}$, la condition I non nul n'est pas équivalente à avoir $\alpha \neq 0$ ou $d \neq 0$. En effet, il est possible que I soit nul tout en ayant $\alpha = d = 0$. C'est le cas par exemple pour $I = (t^{pn}, \partial_k^{\ell})$ avec $n, \ell \in \mathbb{N}$. Les équations de la variété caractéristique de $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/I$ se réduisent aux équations suivantes :

$$\operatorname{Car}(\mathcal{D}_{X,k,x}/I) = \begin{cases} t \cdot \xi_k = 0 \;\text{ si }\; d(I) \neq 0 \;\text{ et }\; v(I) \neq 0 \\ \xi_k = 0 \quad \text{si }\; v(I) = 0 \\ t = 0 \quad\; \text{si }\; d(I) = 0 \\ t = 0 \;\text{ et }\; \xi_k = 0 \;\text{ si }\; d(I) = 0 \;\text{ et }\; v(I) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Lorsque $\dim(\operatorname{Car} E) = 1$, la variété caractéristique de E admet une ou deux composantes irréductibles données par les équations $t = 0$ et $\xi_k = 0$. Lorsque $\dim(\operatorname{Car} E) = 0$, $\operatorname{Car} E = (0, 0)$. Mais E n'est pas nécessairement nul, par exemple $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/(t^p, \partial_k)$. En particulier, l'inégalité de Bernstein est fausse pour les $\mathcal{D}_{X,k}$-modules cohérents. Cependant, si E provient d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent, on montrera que le dernier cas de 2.2 n'est pas possible. La variété caractéristique de E sera donc donnée par l'une des trois premières équations.

Exemple 2.2.4.

1. Si $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/(t^{\alpha} \cdot \partial_k^d)$ avec $\alpha, d \geq 1$, alors $\operatorname{Car} E$ a deux composantes irréductibles d'équations $t = 0$ et $\xi_k = 0$.
2. Si $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/(t^{pn}, \partial_k^{\ell})$, alors $\operatorname{Car} E = (0, 0)$.
3. Soit $E = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/x$ un $\mathcal{D}_{X,k}$-module supporté en x. La variété caractéristique de E en x est la droite d'équation $t = 0$. Soit U un ouvert affine de X contenant x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales (t, ∂). Le module E étant nul en dehors de U, on peut supposer que $X = U$. Alors T^*X est affine et l'on note (t, ξ) le système de cordonnées locales de T^*X associé à (t, ∂_k). On a $\operatorname{Car}(E) = \{(t, \xi) \in T^*X : t = x\}$. La variété caractéristique de E est la droite verticale de T^*X passant par x :



Un tel module est appelé un Dirac.

Un $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/I$ distinct de $\mathcal{D}_{X,k,x}$ a deux multiplicités correspondant aux composantes $t = 0$ et $\xi_k = 0$, avec multiplicité nulle si la composante est un point ou si la composante est vide. Lorsque x est κ-rationnel, ces multiplicités correspondent aux nombres $d(I)$ et $v(I)$. Cela a été prouvé par P.Maisonobe dans [16], partie III, paragraphe 2.1.

Soit maintenant $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}$ avec $\mathcal{I}$ un idéal non nul. D'après ce que l'on vient de dire, $\mathcal{E}$ a deux multiplicités en x (potentiellement nulles) correspondant aux composantes irréductibles $t = 0$ et $\xi_k = 0$ de la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$. Ces multiplicités en un point rationnel sont les fonctions $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$:

Proposition 2.2.5. *Soit x un point κ-rationnel et $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ tel que $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}$ soit sans ω-torsion. Alors $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$ sont les multiplicités de $\mathcal{E}$ en x des composantes $(\xi_k = 0)$ et $(t = 0)$ de la variété caractéristique* $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}$ est sans ω-torsion, $\mathcal{I}$ admet une base de division dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ d'après le lemme 1.3.17. L'énoncé étant local en x, on peut supposer $\mathfrak{X} = U$ affine. La proposition 1.3.19 permet d'obtenir la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^1_{\mathcal{V}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) \longrightarrow \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \longrightarrow 0$$

Par hypothèse, $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}$ est sans ω-torsion. Donc $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{V}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) = 0$. On obtient donc

$$\mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}/(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)_x$$

Ainsi, le module $\mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est donné par l'idéal $I = \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. On rappelle que $\mathcal{I}$ et I ont le même escalier en x et que les fonctions $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$ coïncident avec $v(I)$ et $d(I)$. Comme les multiplicités de $\mathcal{D}_{X,k,x}/I$ sont respectivement l'ordre et la valuation de l'idéal I en x, on obtient le résultat. $\square$

Soit enfin $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal $\mathcal{I}$ non nul. Si $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}'$ pour un autre idéal $\mathcal{I}'$, alors le lemme 1.3.20 implique que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ ont les mêmes fonctions $\overline{N}_k$ et N_k. Les entiers $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$ ne dépendent donc pas du choix de l'idéal $\mathcal{I}$ définissant $\mathcal{E}$ comme un quotient de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Lorsque $\mathcal{I} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot P$ avec $P \neq 0$, ces nombres sont simplement $\overline{N}_k(P)$ et $N_k(P)$.

On rappelle qu'un modèle entier d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent $\mathcal{E}^\circ$ sans ω-torsion tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} K$. On peut choisir, localement au voisinage de x, un modèle entier de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}^\circ$. On a $\mathrm{Exp}(\mathcal{I}) = \mathrm{Exp}(\mathcal{I}^\circ)$. Cela a été montré par exemple dans la preuve du lemme 1.3.20. En particulier, $\overline{N}_k(\mathcal{I}) = \overline{N}_k(\mathcal{I}^\circ)$ et $N_k(\mathcal{I}) = N_k(\mathcal{I}^\circ)$. On déduit alors le résultat suivant de la proposition 2.2.5.

Corollaire 2.2.6. *Soit x un point κ-rationnel et $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ non nul. Alors $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$ sont les multiplicités de $\mathcal{E}$ en x des composantes irréductibles $(\xi_k = 0)$ et $(t = 0)$ de la variété caractéristique* $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$.

2.3 Inégalité de Bernstein

Cette partie est consacrée à la démonstration de l'inégalité de Bernstein : un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est non nul si et seulement si sa variété caractéristique est de dimension au moins un, ou de manière équivalente si ses multiplicités ne sont pas toutes zéros.

Comme on a pu le voir dans la partie précédente, l'inégalité de Bernstein est fausse pour les $\mathcal{D}_{X,k,x}$-modules cohérents. Par exemple, la variété caractéristique du module cohérent $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/(t^p, \partial_k)$ est réduite à un point. L'inégalité de Bernstein étant vraie pour un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent, cela signifie que E ne provient pas d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. On peut cependant remarquer que E est un κ-espace vectoriel de dimension finie (égale à p). Ce résultat est vrai plus généralement pour les $\mathcal{D}_{X,k,x}$-modules cohérents dont la variété caractéristique est un point.

Lemme 2.3.1. *Soit $x \in X$ et E un $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module de type fini tel que* $\mathrm{Car}\, E$ *soit un point. Alors E est un κ-espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. On traite tout d'abord le cas où x est un point κ-rationnel. On se donne une bonne filtration $(\mathrm{Fil}^i E)_{i\in\mathbb{N}}$ du module E. La filtration est bonne si et seulement si $\mathrm{Fil}^i(\mathcal{D}_{X,k,x}) \cdot \mathrm{Fil}^j(E) = \mathrm{Fil}^{i+j}(E)$ à partir d'un rang j et si les $\mathrm{Fil}^i(E)$ sont des $\mathcal{O}_{X,x}$-modules de type fini. Quitte à décaler la filtration, on peut supposer que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Fil}^i(\mathcal{D}_{X,k,x}) \cdot \mathrm{Fil}^j(E) = \mathrm{Fil}^{i+j}(E)$$

En particulier, $\mathrm{Fil}^i(E) = \mathrm{Fil}^i(\mathcal{D}_{X,k,x}) \cdot \mathrm{Fil}^0(E)$. Ainsi, tout système de générateurs $(e_1, \ldots, e_r)$ de $\mathrm{Fil}^0(E)$ en tant que $\mathcal{O}_{X,x}$-module engendre E en tant que $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module. On note $\mathrm{gr}\, E$ le gradué associé.

On suppose que la variété caractéristique $\mathrm{Car}\, E$ est réduite à un point. L'idéal définissant $\mathrm{Car}\, E$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}[\xi_k]$ homogène en ξ_k : le point $\mathrm{Car}(E)$ correspond nécessairement à l'idéal (t, ξ_k). Il existe donc deux entiers d et v tels que t^v et ξ_k^d annulent le gradué $\mathrm{gr}\, E$. En particulier, $\xi_k^d \cdot \mathrm{gr}^i(E)$ est nul dans $\mathrm{gr}^{d+i}(E)$. Sur la filtration, cela se traduit par

$$\partial_k^d \cdot \mathrm{Fil}^i E \subset \mathrm{Fil}^{i+d-1}(E) = \mathrm{Fil}^{d-1}(\mathcal{D}_{X,k,x}) \cdot \mathrm{Fil}^i(E)$$

Pour $i = 0$ on obtient

$$\partial_k^d \cdot \mathrm{Fil}^0(E) \subset \mathrm{Fil}^{d-1}(\mathcal{D}_{X,k,x}) \cdot \mathrm{Fil}^0(E)$$

Autrement dit, pour tout entier i,

$$\mathrm{Fil}^i(E) = \mathrm{Fil}^i(\mathcal{D}_{X,k,x}) \cdot \mathrm{Fil}^0(E) \subset \mathrm{Fil}^{d-1}(\mathcal{D}_{X,k,x}) \cdot \mathrm{Fil}^0(E)$$

La filtration de E est donc stationnaire et $\mathrm{Fil}^n(E) = E$ pour tout entier $n \geq d-1$. Ainsi, E est engendré sur $\mathcal{O}_{X,x}$ par les $\partial_k^j \cdot e_i$ pour $j \in \{0, \ldots, d-1\}$ et $i \in \{1, \ldots, r\}$: E est donc un $\mathcal{O}_{X,x}$-module de type fini.

On rappelle que $\mathrm{Fil}^0(E)$ est annulé par t^v. Lorsque $k \geq 1$, la κ-algèbre $\mathcal{D}_{X,k,x}$ est commutative. Puisque $\mathrm{Fil}^0(E)$ engendre E en tant que $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module, E est annulé par t^v. Sinon le fait que t^v annule $\mathrm{gr}\, E$ implique que $t^{v(\ell+1)}$ annule $\mathrm{Fil}^\ell(E)$. En particulier, t^{vd} annule $E = \mathrm{Fil}^{d-1}(E)$. Dans tous les cas, E est annulé par une puissance de t que l'on note encore t^v.

Ainsi, $E = E/t^v E$ est un $\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$-module de type fini. Pour conclure, il suffit de prouver que $\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$ est un κ-espace vectoriel de dimension finie. On le montre par récurrence sur v. On dispose de la suite exacte d'anneaux

$$0 \longrightarrow t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0$$

avec $t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x} \simeq \kappa = \mathcal{O}_{X,x}/t\mathcal{O}_{X,x}$ (via la multiplication par t^{v-1}). La première flèche $\kappa \to \mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$ munit $\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$ d'une structure de κ-espace vectoriel. La suite reste exacte en considérant les quotients comme des κ-espaces vectoriels. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{O}_{X,x}/t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x}$ est un κ-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi, $\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$ est aussi de dimension finie sur κ.

Si maintenant x est un point quelconque, alors x est κ'-rationnel pour une extension finie κ' de κ. Le même raisonnement montre que E est un κ'-espace vectoriel de dimension finie. Puisque κ' est de dimension finie sur κ, E sera un κ-espace vectoriel de dimension finie. □

Proposition 2.3.2 (inégalité de Bernstein). *Soit* $\mathcal{E}$ *un* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$*-module cohérent non nul. Alors toute composante irréductible de la variété caractéristique* $\mathrm{Car}\, \mathcal{E}$ *est de dimension au moins un. En particulier,* $\dim(\mathrm{Car}\, \mathcal{E}) \geq 1$. *De plus, les multiplicités de* $\mathcal{E}$ *sont non nulles.*

Démonstration. On note $E = \mathcal{E} \otimes \kappa$ la réduction modulo ω d'un modèle entier $\mathcal{E}^\circ$ de $\mathcal{E}$. On rappelle que par définition, $\operatorname{Car}\mathcal{E} = \operatorname{Car} E$. Si $\mathcal{E}$ est non nul, alors E est aussi non nul. Dans ce cas, $\operatorname{Car}\mathcal{E} \neq \emptyset$.

On suppose qu'une composante irréductible de la variété caractéristique $\operatorname{Car}\mathcal{E}$ est un point $z = (x, \xi)$. Alors $\operatorname{Car}\mathcal{E}_x = \operatorname{Car} E_x$ est contenue dans un point. Si cette variété caractéristique est vide, alors $\mathcal{E}_x = 0$ et $E_x = 0$. Sinon le lemme 2.3.1 montre que E_x est un κ-espace vectoriel de dimension finie.

On en déduit que $\mathcal{E}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie au voisinage de x. En effet, soit $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ une base de E_x comme κ-espace vectoriel. On note $e_1, \dots, e_r$ des relèvements de ces éléments dans $\mathcal{E}^\circ_x$ et $\mathcal{F} = \mathcal{V}\cdot e_1 + \cdots + \mathcal{V}\cdot e_r$. C'est un sous-$\mathcal{V}$-module fermé de $\mathcal{E}^\circ_x$ pour la topologie ω-adique. Soit $y \in \mathcal{E}^\circ_x$. On montre que $y \in \mathcal{F}$. Puisque $\bar{y} \in E = \kappa\cdot\bar{e}_1 + \cdots + \kappa\cdot\bar{e}_r$, il existe $y_1 \in \mathcal{F}$ et $z_1 \in \omega\cdot\mathcal{E}^\circ_x$ tels que $y = y_1 + z_1$. De même, $\omega^{-1} z_1$ s'écrit sous la forme $y_2 + \tilde{z}_2$ avec $y_2 \in \mathcal{F}$ et $\tilde{z}_2 \in \omega\cdot\mathcal{E}^\circ_x$. On obtient $y = (y_1 + \omega y_2) + z_2$ avec $y_1, y_2 \in \mathcal{F}$ et $z_2 = \omega\tilde{z}_2 \in \omega^2\cdot\mathcal{E}^\circ_x$. Une récurrence montre que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}$ et $z_n \in \omega^n \cdot \mathcal{E}^\circ_x$ tels que

$$y = y_1 + \omega y_2 + \cdots + \omega^{n-1} y_n + z_n$$

Puisque $\mathcal{F}$ est complet pour la topologie ω-adique, le terme $y_1 + \omega y_2 + \cdots + \omega^{n-1} y_n$ converge vers un élément $y_\infty \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, comme $\mathcal{E}^\circ$ est sans ω-torson, $\mathcal{E}^\circ$ est séparé pour la topologie ω-adique. Ainsi la suite $(z_n)_n$ converge vers zéro. Le passage à la limite $n \to \infty$ donne $y = y_\infty \in \mathcal{F}$. Autrement dit, $\mathcal{E}^\circ_x = \mathcal{F} = \mathcal{V}\cdot e_1 + \cdots + \mathcal{V}\cdot e_r$. On obtient donc que $\mathcal{E}_x \simeq \mathcal{E}^\circ_x \otimes_{\mathcal{V}} K = K\cdot e_1 + \cdots + K\cdot e_r$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que $[\omega^k\partial, t] = \omega^k \cdot \mathrm{id}$. Comme $\mathcal{E}_x$ est un K-espace vectoriel de dimension finie, on a

$$\operatorname{Tr}([\omega^k\partial, t]) = 0 = \operatorname{Tr}(\omega^k \cdot \mathrm{id}) = \omega^k \cdot \operatorname{Tr}(\mathrm{id}) = (\omega^k \dim_K \mathcal{E}_x)\cdot \mathrm{id}$$

Puisque K est de caractéristique nulle, $\dim_K \mathcal{E}_x = 0$. Donc $\mathcal{E}_x = 0$ et $\mathcal{E}$ est nul au voisinage de x.

Dans tous les cas $E_x = 0$ et E est nul au voisinage de x. Ainsi, le support de E est un sous-schéma fermé propre de X : sa dimension est strictement inférieure à $\dim X = 1$ puisque X est irréductible. Le support de E consiste donc en un nombre fini de points. Autrement dit, E est une somme directe de Dirac (ie de $\mathcal{D}_{X,k}$-modules supportés en un point). Mais la variété caractéristique d'un Dirac est de dimension un (exemple 2.2.4). Alors d'après la proposition 2.1.3, la variété caractéristique de E en x est une union finie de droites. Cela contredit l'hypothèse qu'une composante irréductible est un point. Ainsi, soit $\mathcal{E}$ est nul, soit les composantes irréductibles de $\operatorname{Car}\mathcal{E}$ sont de dimension au moins un.

On rappelle que $\operatorname{Car} E = \operatorname{Supp}\tilde{E}$ où $\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\operatorname{gr}\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\operatorname{gr} E)$ est un $\mathcal{O}_{T^*X}$-module cohérent. Soit η le point générique d'une composante irréductible C de $\operatorname{Car}\mathcal{E}$. La multiplicité m_C de C est la longueur du $(\mathcal{O}_{T^*X})_\eta$-module artinien $\tilde{E}_\eta$. Si $\mathcal{E}$ est non nul, alors $\tilde{E}_\eta$ est aussi non nul. Sa longueur m_C est donc au moins un. Autrement dit, les multiplicités des composantes irréductibles de $\operatorname{Car}\mathcal{E}$ sont toutes non nulles. $\square$

Corollaire 2.3.3. *Un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est nul si et seulement* $\dim(\operatorname{Car}\mathcal{E}) = 0$, *ou de manière équivalente si toutes ses multiplicités sont nulles.*

Démonstration. Le premier point découle de la proposition 2.3.2. On sait que $\mathcal{E} \neq 0$ implique $\operatorname{Car}\mathcal{E} \neq \emptyset$. En particulier, $\operatorname{Car}\mathcal{E} = \emptyset$ implique $\mathcal{E} = 0$. Dans ce cas, les multiplicités de $\mathcal{E}$ en les fermés irréductibles non vides de T^*X sont nulles par définition. Ainsi, le module $\mathcal{E}$ est nul si et seulement si ses multiplicités sont toutes nulles. □

2.4 Modules holonomes

On énoncedans cette partie plusieurs caractérisations équivalentes des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes. On démontre en particulier que les modules holonomes sont exactement les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents de longueur finie.

Définition 2.4.1. *Un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est appelé module holonome si $\mathcal{E} = 0$ ou si* $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{E}) = \dim X = 1$.

Par l'inégalité de Bernstein, un module $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si $\dim \operatorname{Car}\mathcal{E} \leq 1$. La catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes est une sous-catégorie abélienne des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents d'après la proposition 2.1.3. On réécrit ci-dessous son énoncé pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

Proposition 2.4.2. *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Alors* $\operatorname{Car}\mathcal{N} = \operatorname{Car}\mathcal{M} \cup \operatorname{Car}\mathcal{L}$. *En particulier, $\mathcal{N}$ est holonome si et seulement si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ le sont.*

Voici un exemple de modules holonomes : tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ est holonome dès que $\mathcal{I}$ est un idéal non nul.

On regarde tout d'abord le cas très explicite où $\mathfrak{X} = U$ est affine et $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ pour un opérateur différentiel $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$ non nul. On normalise P afin d'avoir $|P|_k = 1$. Soit $\bar{P}$ l'image de P dans $\mathcal{D}_{X,k}(X)$ et $x \in X$. On écrit $\bar{P} = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial_k^n$ avec $d = \overline{N}_k(P)$. On note $\alpha = N_k(P)$ la valuation de a_d dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Quitte à multiplier $\bar{P}$ par un élément inversible de $\mathcal{O}_{X,x}$, on peut supposer que le coefficient dominant de $\bar{P}$ est de la forme t^α. Par définition, (d, α) est l'exposant de P et de $\bar{P}$. On note $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/\bar{P}$. Lorsque x est κ-rationnel, les multiplicités de E sont d et α. L'idéal annulateur de E est le radical de l'idéal engendré par le symbole principal $\sigma(\bar{P}) = t^\alpha \cdot \xi_k^d$. On suppose P non inversible au voisinage de x, ce qui est équivalent à avoir $\alpha \neq 0$ ou $d \neq 0$ d'après le corollaire 1.2.5. Dans ce cas, E est un $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module non nul. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ en x est alors donnée par les équations

$$\operatorname{Car} E = \begin{cases} t \cdot \xi_k = 0 & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \quad et \quad d \neq 0 \\ \xi_k = 0 & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ t = 0 & \text{si} \quad d = 0 \end{cases}$$

Ces composantes irréductibles sont toutes de dimension 1 et $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa) = 1$. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ est donc de dimension 1 et $\mathcal{E}$ est holonome. Si P est inversible au voisinage de x, alors $E = 0$ et la variété caractéristique de $\mathcal{E}$ en x est vide. Cette condition est équivalente à $\alpha = d = 0$. On retrouve ainsi l'inégalité de Bernstein.

On passe au cas où $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal $\mathcal{I}$ non nul. Soit $\mathcal{E}^\circ = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}^\circ$ un modèle entier de $\mathcal{E}$ sur un voisinage affine U de x. La réduction modulo ω de $\mathcal{I}^\circ$ est un idéal de $\mathcal{D}_{X,k}$ que l'on note I. L'exposant de I_x est le couple $(N_k(\mathcal{I}), \overline{N}_k(\mathcal{I}))$. Le $\mathcal{D}_{X,k,x}$-module $E = \mathcal{D}_{X,k,x}/I_x$ est isomorphe à $\mathcal{E}_x \otimes \kappa$. Si $\mathcal{E} \neq 0$, alors $\mathcal{E}_x \otimes \kappa \neq 0$ pour au moins un élément x de $\mathfrak{X}$. D'après les formules 2.2 et l'inégalité de Bernstein, on a

$$\operatorname{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa) = \begin{cases} t \cdot \xi_k = 0 & \text{si} \quad N_k(\mathcal{I}) \neq 0 \quad et \quad \overline{N}_k(\mathcal{I}) \neq 0 \\ \xi_k = 0 & \text{si} \quad N_k(\mathcal{I}) = 0 \\ t = 0 & \text{si} \quad \overline{N}_k(\mathcal{I}) = 0 \end{cases}$$

La variété caractéristique de $\mathcal{E}_x \otimes \kappa$ est donc de dimension 1. Si $\mathcal{E} \neq 0$, on en déduit que $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{E}) = 1$ et $\mathcal{E}$ est holonome. Réciproquement, on démontre à la fin de cette partie que tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est de cette forme.

Proposition 2.4.3. *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-*modules holonomes. Alors* $\mathrm{CC}(\mathcal{N}) = \mathrm{CC}(\mathcal{M}) + \mathrm{CC}(\mathcal{L})$. *Autrement dit, les multiplicités s'additionnent.*

Démonstration. La proposition 2.1.3 nous assure que $\operatorname{Car} \mathcal{N} = \operatorname{Car} \mathcal{M} \cup \operatorname{Car} \mathcal{L}$. Elle nous dit aussi que si $C \in I(\operatorname{Car} \mathcal{N})$ (ensemble des composantes irréductibles de $\operatorname{Car} \mathcal{N}$), alors $C \in I(\operatorname{Car} \mathcal{M})$ ou $C \in I(\operatorname{Car} \mathcal{L})$ et que $m_C(\mathcal{N}) = m_C(\mathcal{M}) + m_C(\mathcal{L})$. On suppose $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}$ non nuls. Autrement dit, $\dim \operatorname{Car} \mathcal{N} = \dim \operatorname{Car} \mathcal{M} = \dim \operatorname{Car} \mathcal{L} = 1$ et toutes les composantes irréductibles sont de dimension un d'après l'inégalité de Bernstein.

Soit I une composante irréductible de $\operatorname{Car} \mathcal{M}$ (ou de $\operatorname{Car} \mathcal{L}$). Alors I est un fermé irréductible de $\operatorname{Car}(\mathcal{N})$ de dimension maximale $1 = \dim \operatorname{Car} \mathcal{N}$: C est donc une composante irréductible de $\operatorname{Car} \mathcal{N}$. Ainsi, $I(\operatorname{Car} \mathcal{N}) = I(\operatorname{Car} \mathcal{M}) \cup I(\operatorname{Car} \mathcal{L})$. L'égalité des cycles en découle puisqu'alors les multiplicités s'additionnent d'après la proposition 2.1.3. $\square$

Remarque 2.4.4. *En général, si la dimension des variétés caractéristiques n'est plus un, une composante irréductible de* $\operatorname{Car} \mathcal{L}$ *ou de* $\operatorname{Car} \mathcal{M}$ *n'est pas toujours une composante irréductible de* $\operatorname{Car} \mathcal{N}$. *Les multiplicités ne s'additionnent donc pas dans la catégorie des* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-*modules cohérents.*

On rappelle que X est une courbe quasi-compacte. Dans ce cas, le fibré cotangent T^*X de X est aussi quasi-compact. Il est de plus noethérien. La variété caractéristique de tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent a donc un nombre fini de composantes irréductibles et un nombre fini de multiplicités non nulles. Puisque les multiplicités sont additives et puisqu'un module dont les multiplicités sont nulles est nul, tout module holonome va être de longueur finie.

Proposition 2.4.5. *Tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est de longueur finie, inférieure ou égale à la somme de toutes ses multiplicités.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. Sa variété caractéristique a un nombre fini de composantes irréductibles et $\mathcal{E}$ n'a qu'un nombre fini de multiplicités non nulles. Puisque le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est noetherien, il suffit de montrer que toute suite décroissante $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules de $\mathcal{E}$ est stationnaire. On suppose que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}_n$ est inclus dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_n$ est holonome. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1} \longrightarrow 0$$

de modules holonomes. Les multiplicités de $\mathcal{E}_n$ sont la somme de celles de $\mathcal{E}_{n+1}$ et de $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1}$. En particulier, les suites des multiplicités sont décroissantes. Elles sont donc stationnaires à partir d'un certain rang commun n_0 puisqu'il n'y a qu'un nombre fini fixé de multiplicités non nulles, donné par le nombre de multiplicités non nulles de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. Alors pour tout entier $n \geq n_0$, les multiplicités de $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1}$ sont nulles par additivité. Autrement dit, $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1} = 0$ par l'inégalité de Bernstein. Donc $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est de longueur finie inférieure à la somme de ses multiplicités. $\square$

Le théorème suivant de Stafford, énoncé initialement pour les algèbres de Weyl, implique que tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est monogène. La preuve étant élémentaire, on en redonne une démontrée dans l'article [15], partie 4.

Théoreme 2.4.6 (Stafford)**.** *Soit R un anneau simple de longueur infinie en tant que R-module à gauche. Alors tout R-module à gauche de longueur finie est monogène.*

Démonstration. Soit M un R-module de longueur finie. On commence par démontrer que M est engendré par deux éléments α et β par récurrence sur la longueur ℓ de M. Si $\ell = 1$, alors M est simple et donc engendré par un élément. Soit $\alpha \in M\backslash\{0\}$. Si $M \neq R\cdot\alpha$, alors $M/R\alpha \neq 0$. Puisque $\ell(M/R\alpha) < \ell$, l'hypothèse de récurrence implique que $M/R\alpha$ est engendré par un élément $\bar{\beta}$ pour un certain $\beta \in M$. Alors M est engendré par α et β en tant que R-module : $M = R\alpha + R\beta$. On suppose dans la suite que $R\alpha \neq R\beta$. Pour toute paire d'éléments (x, y) de M, on note

$$\ell(x,y) = (\ell(R/y), \ell((Rx+Ry)/Rx)) \in \mathbb{N}^2$$

On dit que $(x',y') < (x,y)$ si $\ell(x',y') < \ell(x,y)$ pour l'ordre lexicographique. On suppose que pour tout $(\alpha',\beta') < (\alpha,\beta)$, il existe $\gamma' \in M$ tel que $R\alpha' + R\beta' = R\gamma'$.

Puisque $\ell(R) = +\infty$, $L(\alpha) = \mathrm{Ann}_R(\alpha) \neq 0$ (l'application $R \to R\alpha, \quad a \mapsto a\alpha$ n'est pas injective car $\ell(R\alpha) < \infty$). On fixe un élément $f \in L(\alpha)\backslash\{0\}$. Comme R est simple, on peut trouver des éléments $s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_m \in R$ tels que $1 = \sum_{i=1}^m s_i \cdot f \cdot r_i$.

S'il existe $x \in L(\alpha)$ et $y \in L(\beta)$ tels que $1 = xr + y$ pour un certain $r = r_i$, alors M est engendré par un élément. En effet, $\beta = (xr+y)\beta = xr\beta = x(\alpha + r\beta)$ car $y\beta = x\alpha = 0$ et $\alpha = (\alpha + r\beta) - r\beta$. Ainsi, $\alpha, \beta \in R\cdot(\alpha + r\beta)$ et $M = R\alpha + R\beta = R\cdot(\alpha + r\beta)$. On considère maintenant le cas où $R \neq L(\alpha) + L(\beta)\cdot r_i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, m\}$.

Puisque $\sum_{i=1}^m s_i \cdot f \cdot r_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^m R\cdot f \cdot r_i = R$ et $\sum_{i=1}^m R\cdot f r_i \beta = R\beta$. Comme $R\alpha \neq R\beta$, il existe un $r = r_i$ tel que $R\cdot fr\beta \not\subset R\alpha$.
L'inclusion stricte $L(\beta) + R\cdot fr \subset L(\beta) + L(\alpha)\cdot r \subsetneq R$ implique

$$R\cdot fr\beta \simeq (L(\beta) + R\cdot fr)/L(\beta) \subsetneq R/L(\beta) \simeq R\beta$$

Autrement dit, $(\alpha, fr\beta) < (\alpha,\beta)$. Par hypothèse, il existe $\gamma' \in M$ tel que $R\gamma' = R\cdot fr\beta + R\alpha$. Puisque $R\cdot fr\beta \not\subset R\alpha$, $R\alpha \subsetneq R\gamma'$. On en déduit que

$$\ell((R\gamma' + R\beta)/R\gamma') = \ell((R\alpha + R\beta)/R\gamma') < \ell((R\alpha + R\beta)/R\alpha)$$

Ainsi, $(\gamma',\beta) < (\alpha,\beta)$. A nouveau par hypothèse, il existe $\gamma \in M$ tel que

$$R\gamma = R\gamma' + R\beta = R\alpha + R\beta = M$$

Cet élément γ engendre M en tant que R-module. □

Corollaire 2.4.7. *Tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est monogène.*

Démonstration. Soit (U_i) un recouvrement affine de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. Les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i)$ sont simples par la proposition 1.2.6. Elles sont aussi de longueurs infinies (à gauche et à droite). En effet, soit (t,∂) un système de coordonnée locale sur U_i. La suite $\left(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i)\cdot(\omega^k\partial)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puisque les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i)$ sont intègres (la norme $|\cdot|_k$ est multiplicative).

D'après la proposition 2.4.5, les modules $\mathcal{E}(U_i)$ sont de longueurs finies car $\mathcal{E}$ est holonome. Le théorème 2.4.6 assure alors l'existence d'éléments $u_i \in \mathcal{E}(U_i)$ tels que $\mathcal{E}_{|U_i} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_i,k,\mathbb{Q}}\cdot u_i$. On a $\mathcal{E}_{|U_i\cap U_j} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_i\cap U_j,k,\mathbb{Q}}\cdot u_i = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_i\cap U_j,k,\mathbb{Q}}\cdot u_j$. On en déduit que u_i et u_j diffèrent d'un élément inversible de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i\cap U_j)$. Les u_i se recollent donc en une section globale u de $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\cdot u$. □

Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. Il est monogène donc engendré par un élément u. On pose $\mathcal{I} = \mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(u)$. C'est un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Autrement l'application $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-linéaire $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{E}$, $P \mapsto P \cdot u$ serait injective et $\mathcal{E}$ serait aussi de longueur infinie. Ainsi, $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal $\mathcal{I}$ non nul. Réciproquement, on a vu que tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent de la forme $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un idéal non nul, est holonome. On peut maintenant énoncer plusieurs caractérisations des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes.

Proposition 2.4.8. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. Les points suivants sont équivalents :*

1. *$\mathcal{E}$ est holonome.*
2. *$\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.*
3. *$\mathcal{E}$ est de longueur finie.*
4. *$\mathcal{E}$ est de torsion : pour tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ et pour toute section $m \in \mathcal{E}(U)$, il existe $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ non nul tel que $P \cdot m = 0$.*

Démonstration. Les deux premiers points sont équivalents. D'après le théorème de Stafford et le corollaire 2.4.7, le point 3 est équivalent aux premiers.

On suppose maintenant $\mathcal{E}$ de longueur finie. Soit U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ et $(P \mod \mathcal{I}(U))$ un opérateur non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)/\mathcal{I}(U)$. Puisque $\mathcal{E}(U)$ est de longueur finie et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est de longueur infinie, l'application $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \to \mathcal{E}(U)$, $Q \mapsto Q \cdot (P \mod \mathcal{I}(U))$ n'est pas injective. Ainsi, $(P \mod \mathcal{I}(U))$ est annulé par un élément non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ et $\mathcal{E}$ est de torsion.

Réciproquement, on suppose $\mathcal{E}$ de torsion. On se ramène au cas où $\mathfrak{X}$ est affine en considérant un recouvrement affine fini de $\mathfrak{X}$. Comme $\mathcal{E}$ est cohérent, $\mathcal{E}$ est engendré par des sections globales $m_1, \ldots, m_r$. On démontre par récurrence sur r que $\mathcal{E}$ est holonome. Si $r = 1$, alors $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est l'idéal annulateur de m_1. Il est non nul car m_1 est de torsion et donc $\mathcal{E}$ est holonome. Sinon, par hypothèse de récurrence, $\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot m_2 + \cdots + \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot m_r$ est de longueur finie. Puisque $\mathcal{E}/\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot \overline{m_1}$ est aussi de longueur finie, $\mathcal{E}$ est forcément de longueur finie. En effet, $\mathcal{E}$ est sous-module du module de longueur finie $\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}/\mathcal{E}'$. Comme tout sous-module d'un module de longueur finie est de longueur finie, $\mathcal{E}$ est de longueur finie. □

On relie maintenant les modules holonomes aux modules à connexion intégrable. On identifie X avec la section nulle $s : X \to T^*X$ du fibré cotangent T^*X de X. Le lemme suivant caractérise les modules à connexion intégrale. Par définition, un tel module est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent vérifiant l'un des énoncés équivalents de ce lemme.

Lemme 2.4.9. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. *Le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini.*
2. *La variété caractéristique* $\mathrm{Car}(\mathcal{E})$ *de $\mathcal{E}$ est incluse dans X.*
3. *Le module $\mathcal{E}$ est localement de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ avec P un opérateur différentiel fini unitaire d'ordre égale au rang de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. On peut supposer que le schéma X est affine muni d'une coordonnée locale. Dans ce cas, $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k}) \simeq \mathcal{O}_X[\xi]$. On suppose de plus que le module $\mathcal{E}$ est non nul. Puisque $\mathcal{E}$ est holonome, $\mathcal{E}$ est de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal cohérent non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Alors $E = \mathrm{gr}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$ est un $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k})$-module cohérent de la forme $\mathcal{O}_X[\xi]/I$ pour un certain idéal I non nul. Par définition de la variété caractéristique, $\mathrm{Car}(\mathcal{E}) = \mathrm{Car}(E)$.

On suppose tout d'abord que $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini d. Il en découle que E est un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang d. Il existe des sections $e_1, \dots, e_d$ de $E(X)$ telles que $E = \mathcal{O}_X \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X \cdot e_d$. La famille $\{\xi^n \cdot e_i\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée sur $\mathcal{O}_X$. On peut donc trouver un entier $m \geq 1$ et des fonctions $a_j \in \mathcal{O}_X(X)$ telles que $(\xi^m + a_{m-1}\xi^{m-1} + \dots a_0) \cdot e_i = 0$. Autrement dit, la section e_i est annulée par un polynôme unitaire P_i de $\mathcal{O}_X[\xi]$. Le polynôme unitaire $P = P_1 \dots P_n$ de $\mathcal{O}_X[\xi]$ annule tous les éléments $e_1, \dots, e_n$. Donc P annule le module $E = \mathcal{O}_X \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X \cdot e_d$. On en déduit que $P \in I$ et que $E = \mathcal{O}_X[\xi]/I$ est un sous-$\mathcal{O}_X[\xi]$-module de $\mathcal{O}_X[\xi]/P$. Il en découle que $\mathrm{Car}(\mathcal{E}) = \mathrm{Car}(E) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{O}_X[\xi]/P)$. Puisque P est unitaire, on a $\mathrm{Car}(\mathcal{O}_X[\xi]/P) = X$. Ainsi, $\mathrm{Car}(\mathcal{E}) \subset X$.

On suppose maintenant que la variété caractéristique de $\mathcal{E}$ est contenue dans X. Soit x un point de X. Quitte à étendre les scalaires κ par une extension finie, on peut supposer que x est κ-rationnel. L'hypothèse $\mathrm{Car}(E) \subset X$ et la proposition 2.2.5 impliquent que $N_k(\mathcal{I}) = N_k(I) = v_{\mathcal{O}_{X,x}}(I) = 0$. Toute base de division de $\mathcal{I}$ en x est donc réduite à un unique opérateur différentiel P vérifiant $N_k(P) = 0$. La condition $N_k(P) = 0$ signifie que le coefficient d'ordre $\overline{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ au voisinage de x. Un tel opérateur P est défini sur un ouvert affine de X contenant x. Quitte à réduire X, on peut supposer que $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(X)$ et que le coefficient d'ordre $\overline{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Puisque P est une base de division de $\mathcal{I}$, on sait que P engendre l'idéal $\mathcal{I}$. Ainsi, $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$. Le corollaire 1.3.13 assure l'existence d'un opérateur différentiel Q unitaire d'ordre $\overline{N}_k(P)$ tels que $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/Q$. On obtient le troisième point de la proposition.

Enfin, le corollaire 1.3.13 implique que $\mathcal{E}$ est, localement au voisinage de x, un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang $\overline{N}_k(Q)$. Le schéma formel $\mathfrak{X}$ étant irréductible, le nombre $\overline{N}_k(Q)$ ne dépend ni de Q ni de x d'après le corollaire 1.3.14. On note d cet entier. Pour résumer, $\mathcal{E}$ est localement un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang d. On en déduit que $\mathcal{E}$ est globalement un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang d. $\square$

On en déduit une caractérisation des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes via les modules à connexion intégrable. Elle n'est vraie qu'en dimension un. En effet, lorsque $\dim(\mathfrak{X}) = 1$, il n'y a pas de variété intermédiaire entre la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent non nul et T^*X tout entier pour des raisons de dimension. Ce qui bien sur est faux dès que $\mathfrak{X}$ est de dimension supérieure ou égale à deux.

Corollaire 2.4.10. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{E}_{|U}$ soit un module à connexion intégrale.*

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $\mathcal{E}$ est holonome. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ a un nombre fini de composantes irréductibles verticales. On note U l'ouvert de $\mathfrak{X}$ obtenu en ôtant à $\mathfrak{X}$ les abscisses des composantes verticales de $\mathrm{Car}(\mathcal{E})$. Par définition de U, on a $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_{|U}) \subset U$. On en déduit que $\mathcal{E}_{|U}$ est un module à connexion intégrale d'après le lemme 2.4.9.

Réciproquement, soit U un ouvert non vide de $\mathfrak{X}$ pour lequel $\mathcal{E}_{|U}$ est un module à connexion intégrale. Dans ce cas, $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_{|U}) \subset U$, toujours d'après le lemme 2.4.9. Si $\mathcal{E}$ n'est pas holonome, alors $\mathrm{Car}(\mathcal{E}) = T^*X$. En effet, T^*X est irréductible puisque X l'est et $\mathrm{Car}(\mathcal{E})$ est une sous-variété fermée de T^*X de dimension maximale deux. En particulier, on aurait $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_{|U}) = T^*U$. Cela contredit l'hypothèse $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_{|U}) \subset U$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est holonome. $\square$

2.5 Caractérisation cohomologique des modules holonomes

On rappelle tout d'abord plusieurs résultats démontrés par Anne Virrion dans l'article [19] pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Les preuves s'adaptent immédiatement pour un niveau de congruence k quelconque. On démontre ensuite qu'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}$ est holonome si et seulement si

$$\forall i \neq 1, \quad \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$$

Enfin, on définit un foncteur dualité de la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes dans elle même vérifiant un isomorphisme de bidualité.

La proposition suivante correspond au théorème 4.3 de [19] dans le cas où $\mathfrak{X}$ est une courbe formelle lisse.

Proposition 2.5.1. *La dimension cohomologique de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ est égale à trois et la dimension cohomologique de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est inférieure ou égale à trois.*

Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. On pose

$$\dim \mathcal{M} = \dim(\mathrm{Car}(\mathcal{M})) \in \{0,1,2\},$$

$$\operatorname{codim} \mathcal{M} = 2\dim X - \dim \mathcal{M} = 2 - \dim \mathcal{M}$$

L'inégalité de Bernstein se traduit de la manière suivante : $\mathcal{M} \neq 0$ si et seulement si $\operatorname{codim} \mathcal{M} \leq 1$. Par ailleurs, $\mathcal{M}$ est un module holonome si et seulement si $\operatorname{codim} \mathcal{M} = 1$. On note

$$\omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} = \left(\wedge_{i=0}^{1} \Omega^1_{\mathfrak{X}}\right) \otimes_{\mathcal{V}} K$$

C'est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang un. La proposition 2.1.1 de [19] implique le résultat suivant.

Proposition 2.5.2. *Le foncteur $\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à droites et la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à gauche.*

On note $D^b_c(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ la catégorie dérivée formée des complexes bornés de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents. On identifie la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents avec les complexes concentrés en degré zéro. Pour tout complexe $\mathcal{M}$ de $D^b_c(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$, on définit son dual $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ par

$$\mathbb{D}(\mathcal{M}) := \mathcal{RH}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}[1]) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$$

Les résultats de la partie trois de l'article [19] de Virrion impliquent que $\mathbb{D}$ est un foncteur de la catégorie $D^b_c(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ dans elle même et que pour tout complexe $\mathcal{M}$ de $D^b_c(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$, il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{M} \simeq \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{M})$.

On rassemble dans la proposition suivante le corollaire 2.3 et la proposition 3.5 de [19].

Proposition 2.5.3. *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent non nul. Alors*

1. $\forall i \geq 0$, $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})) \geq i$;
2. $\operatorname{codim} \mathcal{M} = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} : \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \neq 0 \right\}$.

On peut maintenant démontrer la caractérisation cohomologique suivante des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes.

Proposition 2.5.4. *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors $\mathcal{M}$ est holonome si et seulement si*

$$\forall i \neq 1, \quad \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$$

De plus, si $\mathcal{M}$ est holonome, alors $\mathcal{M}^d := \mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est aussi un module holonome.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent que l'on peut supposer non nul. Par construction, $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent. Il vérifie donc l'inégalité de Bernstein. Autrement dit, $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}))\leq 1$ ou $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})=0$. Par ailleurs, on sait que $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}))\geq i$ d'après la proposition 2.5.3. Ainsi, $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})\neq 0$ implique $i\leq 1$. On a donc toujours $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})=0$ dès que $i\geq 2$.

On suppose maintenant que $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome non nul. Alors $\dim\mathcal{M}=\operatorname{codim}\mathcal{M}=1$. Le second point de la proposition 2.5.3 implique que $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})=0$ pour tout entier $i\neq 1=\operatorname{codim}\mathcal{M}$. Réciproquement, on suppose que $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})=0$ dès que $i\neq 1$. Le second point de la même proposition implique que $\operatorname{codim}(\mathcal{M})=1$. Autrement dit, $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome.

Il reste à montrer que le module $\mathcal{M}^d=\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est holonome dès que $\mathcal{M}$ est holonome. On sait d'après la proposition 2.5.3 que $\operatorname{codim}\mathcal{M}^d\geq 1$. Si $\operatorname{codim}\mathcal{M}^d=2$, alors $\mathcal{M}^d=0$ d'après l'inégalité de Bernstein. Cela contredit l'hypothèse $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})\neq 0$! Donc $\operatorname{codim}\mathcal{M}^d=1$ et le module $\mathcal{M}^d$ est holonome. □

Corollaire 2.5.5. *Le foncteur dualité préserve la catégorie des modules holonomes. De plus, pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome $\mathcal{M}$, on a*

$$\mathbb{D}(\mathcal{M})\simeq\mathcal{M}^d=\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$$

On dispose donc d'un isomorphisme naturel $(\mathcal{M}^d)^d\simeq\mathcal{M}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. On note $\mathcal{M}^d$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. On sait d'après la proposition 2.5.4 que pour tout entier $i\neq 0$, $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})=0$. On a donc $\mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\mathcal{M}))=0$ pour tout entier $i\neq 0$. On en déduit que $\mathbb{D}(\mathcal{M})\simeq\mathcal{H}^0(\mathbb{D}(\mathcal{M}))\simeq\mathcal{M}^d$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. L'isomorphisme de bidualité $\mathcal{M}\simeq(\mathcal{M}^d)^d$ provient du théorème 3.6 de [19]. □

Un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à connexion intégrale est un module holonome. Son dual est donc un module holonome. En fait, son dual est aussi un module à connexion intégrale de même rang, comme on peut le voir dans le lemme suivant.

Lemme 2.5.6. *Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à connexion intégrale de rang n. Alors son dual $\mathcal{M}_k^d$ est aussi un module à connexion intégrale de rang n.*

Démonstration. D'après le lemme 2.4.9, on peut se ramener au cas où $\mathfrak{X}$ est affine tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ avec P un opérateur différentiel fini unitaire. Il suffit de vérifier que $\mathcal{M}_k^d$ est aussi de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P^t$ avec P^t fini unitaire. On considère la suite exacte courte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \xrightarrow{\times P} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow 0$$

Puisque $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$, on obtient la suite exacte courte suivante de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à droites en prenant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \arrow[d] & \\
 & & & \mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ sont intègres et comme $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ avec P non nul, on a $\mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$. Par ailleurs, $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à droite. Le morphisme $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \to \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ ci dessus correspond via cette correspondance au morphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \xrightarrow{P\times} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ multiplication à gauche par P. La suite exacte précédente s'écrit donc

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \xrightarrow{P\times} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0$$

On en déduit que $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P \cdot \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à droite. On écrit $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot (\omega^k \partial)^\ell \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. On définit son adjoint formel P^t par $P^t = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \cdot (\omega^k \partial) \cdot a_\ell$. On vérifie alors que

$$\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P^t$$

Comme P est unitaire d'ordre n, P^t est aussi unitaire d'ordre n. Ainsi, $\mathcal{M}_k^d$ est un module à connexion intégrale de rang n. $\square$

2.6 Microlocalisation de $\mathcal{D}_{X,k}$ pour $k \geq 1$

Cette partie est indépendante des autres. Elle permet de comprendre l'intérêt du microlocalisé et de voir son lien avec la variété caractéristique. On construit ici un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ pour tout niveau de congruence $k \geq 1$ permettant de retrouver la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents en dehors de la section nulle. Il s'agit du cas le plus simple dans lequel on peut construire un microlocalisé. En effet, pour un niveau de congruence $k \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative : on peut appliquer les constructions classiques d'algèbre commutative pour localiser la κ-algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$.

Soit $\pi : T^*X \to X$ la projection canonique. L'application π est ouverte : pour tout ouvert U de X, $V = \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de T^*X. En effet, $T^*X = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{Sym}\,\Theta_X) \to X$, où Θ_X est le faisceau cotangent de X. Puisque X est lisse, Θ_X est un module localement libre de rang fini. En particulier le morphisme $T^*X \to X$ est plat de présentation finie. Il est donc ouvert d'après [18, Tag 00I1]. On note $s : X \to T^*X$ la section nulle du fibré cotangeant et $T^*_0X = T^*X \backslash s(X)$.

Pour un niveau de congruence $k \geq 1$ fixé, on construit un microlocalisé de $\mathcal{D}_{X,k}$ redonnant la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent en dehors de la section nulle. Le microlocalisé est un $\mathcal{O}_{T^*X}$-module plat L_k défini sur $T^*_0(X)$ vérifiant pour tout $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent M l'égalité

$$\mathrm{Car}(M) \cap T^*_0(X) = \mathrm{Supp}(L_k \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(M))$$

Soit U un ouvert affine de X sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. On rappelle que la κ-algèbre $\mathcal{D}_{U,k} = \mathcal{O}_U[\partial_k]$ est commutative. Si ∂'_k est une dérivation donnée par une autre coordonnée locale sur U, alors $\partial'_k = \alpha \cdot \partial_k$ pour un élément inversible α de $\mathcal{O}_U(U)$. Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot {\partial'_k}^n = \sum_{n=0}^d a_n \cdot (\alpha\partial_k)^n \in \mathcal{O}_U[\partial'_k]$. Puisque l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative, $P = \sum_{n=0}^d (a_n\alpha^n) \cdot \partial_k^n$. Ainsi, la description de l'algèbre $\mathcal{D}_{U,k}$ comme l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_U[\partial_k]$ ne dépend pas du choix du système de coordonnée locale.

On considère le système de coordonnées locales (t, ξ) sur $V = \pi^{-1}(U) \subset T^*(X)$ associé à la coordonnée de départ sur U. Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. On lui associe une fonction de l'algèbre $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ en envoyant P sur l'élément $P(t,\xi) = \sum_{n=0}^d a_n(t) \cdot \xi^n$. On note $D_k(V)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ provenant d'un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Puisque $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutatif, le produit de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ induit un produit sur $D_k(V)$ coincidant avec le produit de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Autrement dit, $D_k(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. L'algèbre $D_k(V)$ ne dépend pas non plus du choix du système de coordonnées locales (t, ξ). Les ouverts V de T^*X provenant d'ouverts affines U de X sur lequel on dispose d'une coordonnée locale forment une base d'ouverts de T^*X. Ainsi, les algèbres $D_k(V)$ se recollent en un faisceau D_k sur le fibré cotangent T^*X.

On a $D_k(V) = \mathcal{O}(U)[\xi]$. Autrement dit, $D_k \simeq \mathcal{O}_{T^*X}$ en tant que κ-faisceaux. On identifie par la suite ces deux faisceaux. Comme pour $\mathcal{D}_{X,k}$, on munit D_k de la filtration donnée localement par l'ordre des éléments en ξ. On a

$$\mathrm{Fil}^{\ell}(D_k(V)) = \bigoplus_{n=0}^{\ell} \mathcal{O}(U) \cdot \xi^n$$

Cette filtration est compatible avec la filtration de $\mathcal{D}_{X,k}$ via l'isomorphisme défini précédemment $\mathcal{D}_{X,k}(U) \simeq D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Le gradué est encore un anneau de polynôme sur $\mathcal{O}_U$: $\mathrm{gr}\, D_k(V) \simeq \mathcal{O}(U)[\zeta]$, où ζ est l'image de ξ dans $\mathrm{gr}_1\, D_k(U)$. L'application de D_k dans son gradué $\mathrm{gr}\, D_k$ est donnée par le symbole principal σ. Si $P(t,\xi) = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \xi^n$ est un opérateur d'ordre d de D_k, alors $\sigma(P) = a_d \cdot \zeta^d$.

On se restreint maintenant à $T_0^*X = T^*X \backslash s(X)$ où la variable ξ n'est jamais nulle. Soit donc V un ouvert affine contenu dans T_0^*X. On pose $U = \pi(V)$. On suppose que U est affine, quitte à réduire V.

Définition 2.6.1. *On note $E_k(V)$ le localisé de $D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$ pour la partie multiplicative $\{\xi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On a $E_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\xi, \xi^{-1}]$.*

Les algèbres $E_k(V)$ ne dépendent pas non plus du choix des coordonnées locales. Elles se recollent pour former un faisceau E_k sur T_0^*X admettant $\mathcal{O}_{T^*X}$ comme sous-faisceau. Localement, $E_k(V) \simeq \mathcal{O}(U)[\xi, \xi^{-1}]$. On note encore degré d'un élément $P(t,\xi) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n(t) \cdot \xi^n$ de $E_k(V)$ le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ et $a_m = 0$ pour tout $m > n$. On munit $E_k(V)$ de la filtration donnée par le degré. Dans ce cas, $\mathrm{gr}(E_k(V)) \simeq \mathcal{O}(U)[\zeta, \zeta^{-1}]$. On rappelle que $\mathrm{gr}(D_k(V)) \simeq \mathcal{O}(U)[\zeta]$.

On considère sur $E_k(V)$ la valuation v_ξ donnée par moins le degré en ξ :

$$v_\xi(P(t,\xi)) = -\deg_\xi P(t,\xi)$$

Définition 2.6.2. *On note $L_k(V)$ le complété de $E_k(V)$ pour cette valuation. Autrement dit, $L_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[[\xi^{-1}]][\xi]$.*

Un élément Q de $L_k(V)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$Q(t,\xi) = \sum_{-\infty \leq n < +\infty} a_n(t) \cdot \xi^n, \quad a_n(t) \in \mathcal{O}_X(U)$$

On définit son degré comme l'opposé de sa valuation ξ-adique : $\deg Q = -v_\xi(Q)$. C'est le plus grand entier n pour lequel le coefficient a_n est non nul. On munit à nouveau $L_k(V)$ de la filtration donnée par le degré des éléments en ξ. On a

$$\mathrm{gr}(L_k(V)) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\zeta, \zeta^{-1}] \simeq \mathrm{gr}(E_k(V))$$

L'application de $E_k(V)$ dans $\operatorname{gr} L_k(V)$ est encore donnée par le symbole principal :

$$\sigma(Q) = a_{\deg Q}(t) \cdot \zeta^{\deg(Q)}$$

On note toujours σ le symbole principal sur $L_k(V)$ puisqu'il est compatible avec les inclusions $D_k(V) \subset E_k(V) \subset L_k(V)$.

Les algèbres $L_k(V)$ se recollent en un faisceau d'algèbres L_k sur T_0^*X. Puisque $\mathcal{O}_X$ est localement noetherien, il est clair que L_k est plat sur D_k. Le faisceau L_k est le microlocalisé recherché.

Le lemme suivant est le résultat clé permettant de faire le lien entre L_k et la variété caractéristique. Le localisé est justement construit comme le plus petit faisceau d'algèbres sur T_0^*X contenant D_k et vérifiant cette propriété.

Lemme 2.6.3. *Soit V un ouvert affine de T_0^*X muni de coordonnées locales $(t,\xi) \in T_0^*X$ et $P(t,\xi) = \sum_{n=0}^{d} a_n(t) \cdot \xi^n$ un élément d'ordre d de l'algèbre $D_k(V)$. Il existe un voisinage ouvert W de (t,ξ) dans T_0^*X pour lequel P est inversible dans $L_k(W)$ si et seulement si $\sigma(P)(t,\xi) = a_d(t) \cdot \xi^d \neq 0$.*

Démonstration. Si P est inversible dans $L_k(W)$ pour un certain voisinage ouvert W de (t,ξ), alors l'image de P dans le gradué est inversible au voisinage de (t,ξ). Cette image est $\sigma(P) = a_d(t) \cdot \xi^d$ par définition. Il suffit qu'elle soit non nulle en (t,ξ) pour être inversible localement.

Réciproquement, on suppose que $\sigma(P)(t,\xi) = a_d(t) \cdot \xi^d \neq 0$. Puisque le terme $a_d(t) \cdot \xi^d$ est non nul évalué en (t,ξ), il est inversible sur un voisinage $W \subset V$ de (t,ξ) (en retirant les zéros potentiels de a_n dans V). On se restreint maintenant à cet ouvert W. Alors $P \cdot (a_n\xi^n)^{-1}$ s'écrit sous la forme $1 + R$ avec R un élément de $E_k(W)$ de degré < 0. On note $S_m = 1 + R + \cdots + R^m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. C'est un élément de $E_k(W)$ de degré $\leq -m$. En particulier, la suite $(S_m)_m$ converge dans $L_k(W)$ vers un élément que l'on note S. Par ailleurs on observe que $\deg(S_m \cdot P \cdot (a_n\xi^n)^{-1} - 1) \leq -m+1$. Ainsi, le passage à la limite $m \to +\infty$ donne $S \cdot P \cdot (a_n\xi^n)^{-1} = 1$ dans $L_k(W)$. Autrement dit, P est inversible dans le microlocalisé $L_k(W)$. $\square$

Soit maintenant M un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. On définit un L_k-module cohérent par

$$\tilde{M}^L := L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(M)$$

Le support de ce module coïncide avec la variété caractéristique de M en dehors de la section nulle. Pour montrer ce résultat, on va se ramener au cas où $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. On identifie I avec un idéal de $D_k = \mathcal{O}_{T^*X}$. On pose $\tilde{I} = L_k \cdot I$ l'idéal de L_k engendré par I. On munit I et $\tilde{L}$ des filtrations obtenues par intersections de celles de D_k et L_k respectivement. On peut montrer alors que $\operatorname{gr}(\tilde{I})$ est engendré par $\sigma(I)$: $\operatorname{gr}(\tilde{I}) = \operatorname{gr}(L_k) \cdot \sigma(I)$.

Proposition 2.6.4. *On a* $\mathrm{Car}(M) \cap T_0^*(X) = \mathrm{Supp}(\tilde{M}^L)$.

Démonstration. On note $\mathrm{Car}^*(M) = \mathrm{Car}(M) \cap T_0^*(X)$. On peut se ramener au cas où X est affine et $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. En effet, puisque M est cohérent, M est engendré par des sections globales $e_1, \ldots, e_r$. Si $I_i = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_{X,k,x}}(e_i)$, alors $\mathcal{D}_{X,k,x} \cdot e_i \simeq \mathcal{D}_{X,k,x}/I_i$. Comme la variété caractéristique est un support et puisque le support d'une somme est l'union des supports des termes de la somme, on a

$$\mathrm{Car}(M) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Car}(\mathcal{D}_{X,k,x}/I_i)$$

On suppose donc que $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$. On note encore I l'image de I dans le faisceau D_k. Alors $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ en tant que D_k-module, où $\tilde{I} = L_k \cdot I$ est l'idéal de L_k engendré par I. Soit $(t,\xi) \notin \mathrm{Supp}\,\tilde{M}^L$. Cela signifie que sur un voisinage affine V de (t,ξ), $L_{k|V} = \tilde{I}_{|V}$. Dans ce cas, $\sigma(\tilde{I}_V) = \mathrm{gr}(E_{k|V}) \cdot \sigma(I_{|V}) = \mathrm{gr}(E_{k|V})$. En particulier, $I_{|V}$ contient un élément P tel que $\sigma(P)(t,\xi) \neq 0$. On rappelle que

$$\mathrm{Car}\, M \cap T^*V = \{(t,\xi) \in T^*V : \sigma(P)(t,\xi) = 0 \quad \forall P \in I(V)\}$$

On en déduit que $(t,\xi) \notin \mathrm{Car}^*(M)$.

Réciproquement, on suppose que $(t,\xi) \notin \mathrm{Car}^*(M)$. Cela signifie que I contient un élément P défini sur un voisinage affine V de (t,ξ) tel que $\sigma(P)(t,\xi) \neq 0$. Alors d'après le lemme 2.6.3 et quitte à réduire l'ouvert V, l'élément $P \in \tilde{I}(V)$ est inversible dans le microlocalisé $L_k(V)$. Ainsi, $\tilde{I} = L_k$ au voisinage de (t,ξ) et $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ est nul en (t,ξ). Autrement dit, $(t,\xi) \notin \mathrm{Supp}(\tilde{M}^L)$. □

On rappelle que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent, alors $\mathrm{Car}\,\mathcal{M} = \mathrm{Car}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$ où $\mathcal{M}^\circ$ est un modèle entier de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. On a alors

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cap T_0^*(X) = \mathrm{Supp}\left(L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)\right)$$

Chapitre 3

$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles

On rappelle dans ce chapitre quelques propriétés du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et la définition des modules coadmissibles. On introduit ensuite la notion de module faiblement holonome pour la courbe formelle $\mathfrak{X}$ en reprenant la définition de Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley donnée dans l'article [3]. On donne enfin une sous-catégorie abélienne de la catégorie des modules faiblement holonomes constituée de modules de longueur finie.

3.1 Définitions et propriétés

Pour plus de détails sur le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ et sur les propriétés des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles, le lecteur peut consulter l'article [13] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch.

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnée locale associé à x. Pour tout entier naturel k, on rappelle que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)$ est une sous-algèbre de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On considère dans la suite les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ induits par ces inclusions locales. On définit le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ comme la limite projective des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.

Définition 3.1.1. *On note* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ est un faisceau de K-algèbres sur le schéma formel $\mathfrak{X}$. Il vérifie les trois points suivants :

1. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est une K-algèbre de Fréchet-Stein et sa topologie est induite par les normes $|\cdot|_k$ des algèbres de Banach $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$;
2. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) = \bigcap_{k\geq 0} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$;
3. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n : \, a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \;\text{ tq }\; \forall \eta > 0, \; \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \eta^n = 0 \right\}$.

Le lemme suivant caractérise les opérateurs différentiels finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ à l'aide des fonctions $\overline{N}_k$ pour tout niveau de congruence k. On en déduit les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$.

Lemme 3.1.2. *Soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. La suite $(\overline{N}_k(P))_{k\geq 0}$ est croissante. De plus, P est un opérateur fini de degré $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si la suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est stationnaire de valeur limite d.*

Démonstration. On écrit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$, avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On commence par montrer que la suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante. Les coefficients de P dans la base $(\omega^k \partial)^n$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ sont les fonctions $\omega^{-kn} \cdot a_n$. Donc

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |\omega|^{-kn} \cdot |a_n| = |P|_k\}$$

Soit $n_0 = \overline{N}_{k+1}(P)$. Puisque $|P|_{k+1} = |\omega^{-(k+1)n_0} \cdot a_{n_0}| > |\omega^{-(k+1)n} \cdot a_n|$ par définition de n_0, on a

$$\forall n > n_0, \quad |\omega^{-kn} \cdot a_n| = |\omega|^n \cdot |\omega^{-(k+1)n} \cdot a_n| < |\omega|^{n_0} \cdot |\omega^{-(k+1)n_0} \cdot a_{n_0}| = |\omega^{-kn_0} \cdot a_{n_0}|$$

On en déduit que $\overline{N}_k(P) \leq n_0 = \overline{N}_{k+1}(P)$.

On suppose maintenant que $\overline{N}_k(P) = d$ à partir d'un certain niveau de congruence k_0. Cela signifie que pour tout entier $k \geq k_0$ et pour tout entier $n > d$,

$$|a_n| \cdot |\omega|^{-kn} < |a_d| \cdot |\omega|^{-kd}$$

Autrement dit, $|a_n| < |a_d| \cdot |\omega|^{k(n-d)}$. Mais $|\omega|^{k(n-d)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Le passage à la limite $k \to \infty$ implique que $|a_n| = 0$. Ainsi, P est un opérateur fini d'ordre d. $\square$

Corollaire 3.1.3. *Les éléments inversibles de la K-algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ sont exactement les fonctions inversibles :*

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)^\times = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$$

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ un opérateur différentiel inversible. Alors P est inversible dans l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$. De manière équivalente, $\overline{N}_k(P) = 0$ pour tout entier k et le coefficient constant de P est inversible d'après le corollaire 1.2.5. Le lemme 3.1.2 implique que P est un opérateur fini d'ordre 0. Autrement dit, P est un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. $\square$

On termine cette partie en rappelant la définition des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles et en détaillant un exemple de module coadmissible.

Définition 3.1.4. *Un module coadmissible est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module $\mathcal{M}$ isomorphe à une limite projective $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$ tels que les applications de transitions $\mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ soient $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-linéaires et tels que pour chaque niveau de congruence k, on dispose d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-isomorphisme induit par l'application de transition :*

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$$

La catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles est abélienne. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Il est démontré dans [13] et [17] que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \mathcal{M}$ et que $\mathcal{M} \simeq \varprojlim_k \left(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \mathcal{M}\right)$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. On peut donc choisir pour $\mathcal{M}_k$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \mathcal{M}$.

On explicite dans l'exemple ci-dessous un opérateur infini P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ vérifiant $\overline{N}_k(P) = k$ pour tout niveau de congruence k. Plus précisément, on montre que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible isomorphe à une limite projective de la forme $\varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P_k$ avec P_k un opérateur différentiel fini d'ordre k de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

Exemple 3.1.5.

1. Tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module cohérent est coadmissible.
2. Soit $P = \prod_{n\geq 1}(1 - \omega^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors $\overline{N}_k(P) = k$. En effet, le coefficient de ∂^n est à un signe près

$$\omega^{1+2+\cdots+n} \cdot (1 + \omega + \omega^2 + \dots) = \omega^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot a_n$$

avec a_n un élément de $\mathcal{V}$ de valeur absolue 1. Dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, le coefficient d'ordre n de P est $\pm\omega^{n\left(\frac{n+1}{2}-k\right)} \cdot a_n$. Par définition, $\overline{N}_k(P)$ est le plus grand entier n maximisant la norme $|\omega|^{n\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}$. On cherche donc l'entier n minimisant la puissance $n\left(\frac{n+1}{2} - k\right)$.

La fonction $x \mapsto x\left(\frac{x+1}{2} - k\right)$ est minimale en $x = k - \frac{1}{2}$, de valeur $-k^2 - k + \frac{3}{4}$. L'entier le plus proche est $-k^2 - k + 1$. Donc l'entier $n\left(\frac{n+1}{2} - k\right)$ est minimal pour $n = k$. Ceci prouve que $\overline{N}_k(P) = k$. On a de plus

$$|P_k|_k = |\omega|^{k\left(\frac{k+1}{2}-k\right)} = |\omega|^{-k^2/2+k/2}$$

Dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, P s'écrit $P = P_k \cdot Q_k$ avec $P_k = \prod_{1\leq n\leq k}(1-\omega^n\partial)$ un opérateur fini d'ordre $\overline{N}_k(P_k) = k$ et $Q_k = \prod_{n>k}(1-\omega^n\partial)$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. En effet, $\overline{N}_k(Q_k) = 0$ et le coefficient constant de Q_k est inversible. On en déduit que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P_k$. Par ailleurs, $P_{k+1} = (1-\omega^{k+1}\partial)\cdot P_k$ avec $1-\omega^{k+1}\partial$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On a donc $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P_k$. Autrement dit, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P \simeq \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P_k$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible.
On peut retrouver P à partir des opérateurs P_k puisque la suite $(P_k)_k$ converge vers P dans l'algèbre de Banach $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet, il suffit de le montrer pour toutes les normes $|\cdot|_m$. On a $P-P_k = (Q_k-1)\cdot P_k$. Pour $k\geq m$, on observe que $\bar{N}_m(P_k) = m$ et que $|P_k|_m = |\omega|^{-\frac{1}{2}(m^2-m)}$. Le coefficient constant de Q_k-1 est nul et le coefficient de ∂^n est de la forme $\omega^{k+(k+1)+\cdots+(k+n-1)}\cdot a_n$, où $a_n\in\mathcal{V}$ est de valeur absolue 1. Dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},m,\mathbb{Q}}(U)$, le coefficient de $(\omega^k\partial)^n$ est $\omega^{n(k+\frac{n-1}{2}-m)}\cdot a_n$. Les coefficients de Q_k-1 sont presque ceux de P_k : il suffit de remplacer k par $m+1-k$. La fonction $x(k+\frac{x-1}{2}-m)$ est donc minimale pour $x = m+1-k-1/2$. Pour k suffisamment grand, par exemple $k\geq m+1$, ce terme est négatif. La norme de $1-Q_k$ est donc donnée par le coefficient d'indice un : $\overline{N}_k(Q_k-1) = 1$ et $|Q_k-1|_m = |\omega|^{k-m}$. Il vient

$$|P-P_k|_m = |1-Q_k|_m\cdot|P_k|_m = |\omega|^{k-\frac{m^2}{2}-\frac{m}{2}} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

3.2 Modules faiblement holonomes

On définit dans cette partie les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles faiblement holonomes au sens de Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley dans l'article [3]. Un module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ sur la courbe formelle $\mathfrak{X}$ est appelé faiblement holonome si

$$\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M},\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt^0_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$$

De manière équivalente, $\mathcal{M}$ est faiblement holonome si et seulement si les modules $\mathcal{M}_k$ sont tous holonomes à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Puisque $\mathcal{M}_k$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent à gauche, on peut munir le groupe abélien $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent à droite. En effet, la question étant locale, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est un ouvert affine suffisamment petit pour que le module $\mathcal{M}_k$ soit de présentation finie :

$$(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^m \to (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^n \to \mathcal{M}_k \to 0$$

En appliquant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$, on en déduit que $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ est un sous-module de type fini du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent à droite

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^n, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^n$$

Il en découle que le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à droite $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ est cohérent.

Lemme 3.2.1. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, on dispose d'un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à droites :*

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \simeq \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})$. On lui associe une application $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$-linéaire

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}, \quad P \otimes m \mapsto P \cdot \varphi(m)$$

On en déduit une application entre les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$-modules à droite

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X}) &\to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \\ \varphi \otimes Q &\mapsto \tilde{\varphi} \cdot Q\end{aligned}$$

On dispose d'une telle application sur chaque ouvert U de $\mathfrak{X}$. On obtient ainsi un morphisme entre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents à droite

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

On montre maintenant que ce morphisme est un isomorphisme. Il suffit de le vérifier localement. On suppose que $\mathfrak{X}$ est affine afin que $\mathcal{M}_{k+1}$ soit de présentation finie :

$$(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})^m \to (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})^n \to \mathcal{M}_{k+1} \to 0$$

En tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$, on obtient une présentation $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^m \to (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^n \to \mathcal{M}_k \to 0$ de $\mathcal{M}_k$. En appliquant les foncteurs $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})$ et $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$, on obtient le diagramme commutatif suivant entre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à droites.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}\left(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}\right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left(\mathcal{M}_{k}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})^n, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}\right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^n, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})^m, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}\right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^m, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right)
\end{tikzcd}$$

On déduit du fait que les deux dernières flèches horizontales soient des isomorphismes que la première flèche en est aussi un. $\square$

On définit un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible à droite $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ par

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

Plus généralement, le groupe abélien $\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ admet une structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à droite. On démontre maintenant que pour tout entier naturel d, les modules $\left\{\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible à droite.

Pour tout entier $d \geq 2$ et pour tout niveau de congruence k, il a été vu dans la preuve de la proposition 2.5.4 que $\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$. Ainsi, pour $d \geq 2$, on peut définir le module $\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ simplement par

$$\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$$

pour les morphismes de transition triviaux. Le cas $d = 0$ correspond au lemme 3.2.1. Il reste donc à traiter le cas $d = 1$.

Proposition 3.2.2. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, le morphisme de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à droites*

$$\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

induit par le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-linéaire

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \to \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

du lemme 3.2.1 est un isomorphisme. De plus, le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module à droite $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ est cohérent.

Démonstration. On vérifie localement que le morphisme

$$\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

est un isomorphisme. Soit $x \in \mathfrak{X}$ et U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x sur lequel $\mathcal{M}_{k+1}$ est de présentation finie. On va montrer que le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{M}_{k+1}$ admet localement, sur un certain voisinage ouvert V de x, une résolution projective de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})_{|V} \longrightarrow 0$$

avec P un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k+1,\mathbb{Q}}$-module projectif et L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k+1,\mathbb{Q}}$-modules libres de rang fini. On sait d'après la proposition 2.5.1 que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$ est de longueur cohomologique inférieure ou égale à trois. Ainsi $\mathrm{Ext}^d_{(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x}((\mathcal{M}_{k+1})_x,\mathcal{N}_x)=0$ pour tout entier $d>3$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{W,k+1,\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{N}$ défini sur un certain voisinage ouvert W de x. Comme $\mathcal{M}_{k+1}$ est de présentation finie sur l'ouvert U, il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k+1,\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini L^0 et un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k+1,\mathbb{Q}}$-module cohérent K tels que l'on ait une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})_{|U} \longrightarrow 0$$

Comme L^0 est un module libre de rang fini, on a $\mathrm{Ext}^d_{(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x}(L^0_x,\mathcal{N}_x)=0$ pour tout entier $d\geq 1$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{W,k+1,\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{N}$ défini sur un voisinage ouvert W de x. En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte précédente, on obtient

$$\forall d\in\mathbb{N},\ \forall\mathcal{N},\quad \mathrm{Ext}^d_{(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x}(K_x,\mathcal{N}_x) \simeq \mathrm{Ext}^{d+1}_{(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x}((\mathcal{M}_{k+1})_x,\mathcal{N}_x)$$

En particulier, $\mathrm{Ext}^d_{(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x}(K_x,\mathcal{N}_x)=0$ pour tout $d>2$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{W,k+1,\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{N}$ défini sur un voisinage ouvert W de x. Par une récurrence finie, et quitte à réduire l'ouvert U contenant x, on obtient une résolution locale de $\mathcal{M}_{k+1}$ de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})_{|U} \longrightarrow 0$$

avec L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k+1,\mathbb{Q}}$-modules libres de rangs finis et $\operatorname{Ext}^d_{(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x}(P_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d > 0$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{W,k+1,\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{N}$ défini sur un voisinage ouvert W de x. Autrement dit, P est un module projectif au voisinage de x.

On écrit $L^i \simeq (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k+1,\mathbb{Q}})^{n_i}$ avec $n_i \in \mathbb{N}$. Comme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k+1,\mathbb{Q}}$, on obtient la suite exacte suivante en tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}}$:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k+1,\mathbb{Q}}} P \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{n_2} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{n_1} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{n_0} \longrightarrow (\mathcal{M}_k)_{|U} \longrightarrow 0$$

Soit $0 \longrightarrow P^3 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ une résolution projective finie du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k+1,\mathbb{Q}}} P$ sur ouvert contenant x que l'on note encore U. On en déduit la résolution projective suivante du module $(\mathcal{M}_k)_{|U}$:

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{n_2} \arrow[r] & (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{n_1} \arrow[r] & (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{n_0} \arrow[r] & (\mathcal{M}_k)_{|U} \arrow[r] & 0 \\
P^0 \arrow[u] & P^1 \arrow[l] & P^2 \arrow[l] & P^3 \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{X} = U$ est affine pour simplifier. On obtient finalement le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}\left(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}\right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}\right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}\right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}\right) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Le groupe $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}})$ est donné par les morphisme φ et ψ. Le groupe $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ est quant à lui donné par les morphismes $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}$ et $\psi \otimes \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}$. On en déduit que

$$\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \simeq \mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

Enfin les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules à droite $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ sont cohérents car ce sont localement des quotients du module $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}\left((\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^n, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}\right) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})^n$. □

Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ et pour tout entier naturel d, on note $\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible à droite limite projective des modules $\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$:

$$\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$$

Pour tout entier $d \geq 2$, on rappelle que $\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$.

Définition 3.2.3. *Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est appelé faiblement holonome si $\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$.*

De manière équivalente, un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est faiblement holonome si et seulement si $\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$ pour tout entier $d \neq 1$. Dans l'article [3], Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley définissent les modules faiblement holonomes de la manière suivante. Soit X_K un espace analytique rigide lisse de dimension n. Un $\widehat{\mathcal{D}}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ sur X_K est faiblement holonome si les groupes de cohomologie $\mathrm{Ext}^d_{\widehat{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}})$ sont nuls pour tout entier $d \neq n$. La définition 3.2.3 correspond aux modules faiblement holonomes en considérant une courbe formelle à la place d'un espace analytique rigide.

Proposition 3.2.4. *Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome si et seulement si il existe un niveau de congruence k_0 à partir duquel les modules $\mathcal{M}_k$ sont tous holonomes.*

Démonstration. Si les modules $\mathcal{M}_k$ sont holonomes, alors $\mathcal{E}xt^0_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$ d'après la proposition 2.5.4. Il en découle que $\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = \varprojlim_k \mathcal{E}xt^0_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$. Réciproquement, on suppose que $\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$. Comme ce module est coadmissible, on a $\mathcal{E}xt^0_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = \mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = 0$. On en déduit que $\mathcal{M}_k$ est holonome toujours la proposition 2.5.4. □

On en déduit immédiatement que la catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne. Elle est de plus non triviale. Elle contient par exemple les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules cohérents de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/\mathcal{I}$ avec $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$.

Corollaire 3.2.5. *La catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne.*

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Alors pour tout niveau de congruence k, on dispose d'une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0$$

D'après la proposition 2.4.2, $\mathcal{N}_k$ est holonome si et seulement si $\mathcal{M}_k$ et $\mathcal{L}_k$ le sont. On en déduit que les modules $\mathcal{N}_k$ sont holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k si et seulement les modules $\mathcal{M}_k$ et $\mathcal{L}_k$ le sont aussi. La proposition 3.2.4 implique enfin que $\mathcal{N}$ est faiblement holonome si et seulement $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont faiblement holonomes. □

Remarque 3.2.6. *Lorsque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome, on dispose localement d'une résolution libre finie des modules $\mathcal{M}_k$ donnée par la proposition 1.3.19. En effet, le module $\mathcal{M}_k$ est holonome pour k suffisamment grand. Il existe donc un idéal cohérent non nul $\mathcal{I}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}_k$. Soit $x \in \mathfrak{X}$. Une base de division relativement au point x fournit une présentation explicite de $\mathcal{I}_k$ sur un voisinage U de x :*

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{r} \longrightarrow \mathcal{I}_{k|U} \longrightarrow 0$$

La matrice R s'exprime entièrement en fonction de la base de division. Combinée avec la suite exacte courte $0 \to \mathcal{I} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{M}_k \to 0$, on obtient la présentation suivante du module $\mathcal{M}_k$ sur l'ouvert U :

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}})^{r} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_{k|U} \longrightarrow 0$$

On retrouve bien que $\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) = 0$ pour tout entier $d \geq 2$. Par ailleurs, cette résolution permet de calculer explicitement le groupe $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ au voisinage de x en fonction d'une base de division relativement au point x.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible et d un entier naturel. Les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents à gauche $\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible à gauche. En effet, cela résulte du lemme 2.2 de l'article [19] de Anne Virrion :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes & \left(\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \right) \\
& \simeq \mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \left(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \right) \\
& \simeq \left(\mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \\
& \simeq \mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}
\end{aligned}
$$

On note $\mathcal{M}^d_k$ le dual du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}_k$:

$$\mathcal{M}^d_k := \mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$$

Il a été vu dans la partie 2.5 que si le module $\mathcal{M}_k$ est holonome, alors son dual $\mathcal{M}^d_k$ est aussi holonome. Par ailleurs, on dispose d'un isomorphisme naturel de bidualité $(\mathcal{M}^d_k)^d \simeq \mathcal{M}_k$.

Définition 3.2.7. *Le dual d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est le module coadmissible*

$$\mathcal{M}^d := \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \right)$$

On démontre maintenant que si $\mathcal{M}$ est faiblement holonome, alors son dual $\mathcal{M}^d$ l'est aussi.

Proposition 3.2.8. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible faiblement holonome. Alors son dual $\mathcal{M}^d$ est aussi un module faiblement holonome. De plus, on dispose d'un isomorphisme de bidualité : $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible faiblement holonome. Par définition, il existe un niveau de congruence k_0 tel que $\mathcal{M}_k$ soit un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome pour tout entier $k \geq k_0$. Alors $\mathcal{M}^d_k = \mathcal{E}xt^d_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_{k}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est un module holonome d'après la proposition 2.5.4. La proposition 3.2.4 implique ensuite que le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \mathcal{M}^d_k$ est faiblement holonome. Enfin, les isomorphismes de bidualité $(\mathcal{M}^d_k)^d \simeq \mathcal{M}_k$ pour chaque niveau de congruence $k \geq k_0$ induise un isormorphisme $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$ en prenant la limite projective. $\square$

3.3 Une catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de longueur finie

On introduit maintenant une sous-catégorie abélienne pleine des modules faiblement holonomes dont les objects sont tous de longueur finie en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules. Cette dernière est non triviale. En effet, elle contient les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles à connexion intégrable et les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles localement de la forme $\mathcal{D}_{U,\infty}/P$ avec P un opérateur différentiel fini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$.

Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. On note $m(\mathcal{M}_k)$ la longueur du cycle caractéristique de $\mathcal{M}_k$. Si $I(\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k))$ est l'ensemble des composantes irréductibles de la variété caractéristique de $\mathcal{M}_k$, alors

$$m(\mathcal{M}_k) = \sum_{C \in I(\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k))} m_C(\mathcal{M}_k) \in \mathbb{N}$$

Cette longueur est un entier naturel puisque les multiplicités $m_C(\mathcal{M}_k)$ le sont. Le corollaire 2.3.3 implique que $\mathcal{M}_k = 0$ si et seulement si $m(\mathcal{M}_k) = 0$.

Soit maintenant $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. On suppose qu'il existe un niveau de congruence $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}_k$ soit un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome pour tout entier $k \geq k_0$. Autrement dit, $\mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module faiblement holonome comme défini dans la partie précédente. On note $k_{\mathcal{M}}$ le plus petit entier naturel pour lequel $\mathcal{M}_k$ est holonome dès que $k \geq k_{\mathcal{M}}$. On associe à un tel module coadmissible $\mathcal{M}$ une multiplicité $m(\mathcal{M})$ définie par

$$m(\mathcal{M}) = \limsup_{k \geq k_{\mathcal{M}}} \{m(\mathcal{M}_k)\} = \inf_{k \geq k_{\mathcal{M}}} \left\{ \sup_{k' \geq k} m(\mathcal{M}_{k'}) \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Définition 3.3.1. *On note $\mathcal{H}$ la catégorie constituée des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ vérifiant les deux points suivants.*

1. *Le module $\mathcal{M}$ est faiblement holonome : il existe un niveau de congruence à partir duquel les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$ sont tous holonomes.*
2. *La multiplicité $m(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ est finie, autrement dit $m(\mathcal{M}) \in \mathbb{N}$.*

C'est une sous-catégorie pleine de la catégorie abélienne des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles faiblement holonomes. On démontre dans ce qui suit que la catégorie $\mathcal{H}$ est abélienne et que tout object $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ est de longueur finie inférieure ou égale à $m(\mathcal{M})$.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un object de $\mathcal{H}$. Par définition, $m(\mathcal{M}) < \infty$. Autrement dit, il existe un entier $k_0 \geq k_{\mathcal{M}}$ pour lequel $\sup_{k \geq k_0}\{m(\mathcal{M}_k)\} < \infty$. La suite $(\sup_{k' \geq k}\{m(\mathcal{M}_{k'})\})_{k \geq k_0}$

est décroissante formée d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire. Sa valeur limite est exactement $m(\mathcal{M})$. On en déduit qu'il existe un niveau de congruence $k_1 \geq k_{\mathcal{M}}$ pour lequel

$$\forall k \geq k_1, \quad m(\mathcal{M}) = \sup_{k' \geq k}\{m(\mathcal{M}_{k'})\}$$

Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Pour tout entier naturel k, cette suite induit une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0$$

On note $k_0 = \max\{k_{\mathcal{M}}, k_{\mathcal{N}}, k_{\mathcal{L}}\} \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $k \geq k_0$, les modules $\mathcal{N}_k$, $\mathcal{M}_k$ et $\mathcal{L}_k$ sont holonomes par définition de $\mathcal{H}$. Pour $k \geq k_0$, on sait d'après la proposition 2.4.3 que $\mathrm{CC}(\mathcal{N}_k) = \mathrm{CC}(\mathcal{M}_k) + \mathrm{CC}(\mathcal{L}_k)$. Il en découle que pour tout $k \geq k_0$,

$$m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{M}_k) + m(\mathcal{L}_k)$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$*-modules coadmissibles faiblement holonomes. Alors*

1. $m(\mathcal{M}) \leq m(\mathcal{N})$ *et* $m(\mathcal{L}) \leq m(\mathcal{N})$ *;*
2. $m(\mathcal{N}) \leq m(\mathcal{M}) + m(\mathcal{L})$.

En particulier, $\mathcal{N} \in \mathcal{H}$ *si et seulement si* $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$ *et* $\mathcal{L} \in \mathcal{H}$.

Démonstration. On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Il existe un niveau de congruence $k_1 \geq \max\{k_{\mathcal{M}}, k_{\mathcal{N}}, k_{\mathcal{L}}\}$ pour lequel $m(\mathcal{M}) = \sup_{k' \geq k}\{m(\mathcal{M}_{k'})\}$, $m(\mathcal{N}) = \sup_{k' \geq k}\{m(\mathcal{N}_{k'})\}$ et $m(\mathcal{L}) = \sup_{k' \geq k}\{m(\mathcal{L}_{k'})\}$ dès que $k \geq k_1$.

Pour tout entier naturel $k \geq k_1$, on a $m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{M}_k) + m(\mathcal{L}_k)$ d'après la proposition 2.4.3. Les inégalités $m(\mathcal{N}_k) \geq m(\mathcal{M}_k)$ pour $k \geq k_1$ donnent $m(\mathcal{N}) \geq m(\mathcal{M})$ en passant à la borne supérieure sur $k \geq k_1$. De même, $m(\mathcal{N}_k) \geq m(\mathcal{L}_k)$. Enfin les inégalités

$$m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{M}_k) + m(\mathcal{L}_k) \leq \sup_{k \geq k_1}\{m(\mathcal{M}_k)\} + \sup_{k \geq k_1}\{m(\mathcal{M}_k)\} = m(\mathcal{M}) + m(\mathcal{L})$$

pour tout entier $k \geq k_1$ impliquent que $m(\mathcal{N}) = \sup_{k \geq k_1}\{m(\mathcal{N}_k)\} \leq m(\mathcal{M}) + m(\mathcal{L})$. $\square$

Remarque 3.3.3. *Bien que* $m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{M}_k) + m(\mathcal{L}_k)$ *pour un niveau de congruence* k *fixé, la multiplicité* m *n'est a priori pas additive pour les modules coadmissibles. En effet, ces égalités deviennent seulement des inégalités en passant à la borne supérieure.*

Cette proposition montre que la catégorie $\mathcal{H}$ est abélienne. L'exemple suivant assure qu'elle n'est pas triviale : elle contient les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour P un opérateur différentiel fini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$.

Exemple 3.3.4. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$. On considère le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$. Les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$ sont tous holonomes d'après la proposition 2.4.8.

1. On regarde tout d'abord ce qu'il se passe lorsque P est un opérateur infini. La suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante et diverge vers $+\infty$ d'après le lemme 3.1.2. La proposition 2.2.5 implique que $m(\mathcal{M}_k) \geq \overline{N}_k(P)$. On en déduit que $m(\mathcal{M}) = +\infty$. Donc $\mathcal{M}$ n'est pas un object de la catégorie $\mathcal{H}$.
2. On suppose maintenant que $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d. Alors $\overline{N}_k(P) = d$ pour k assez grand d'après le lemme 3.1.2. On ne considère maintenant que ces indices k. On sait d'après la proposition 2.2.5 que les multiplicités de $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ en x sont les nombres $\overline{N}_k(P) = d$ et $N_k(P, x) = N(a_d, x) =$ valuation de $(a_d \mod \omega)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$. En particulier, x est l'abscisse d'une composante irréductible verticale de $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}_k$ si et seulement si $N_k(P, x) > 0$. La multiplicité de cette composante est alors $N_k(P, x)$. Si $x_1, \dots, x_s$ sont les zéros de a_d, alors pour k suffisamment grand,
$$m(\mathcal{M}_k) = d + N(a_d, x_1) + \cdots + N(a_d, x_s)$$
Ces multiplicités ne dépendent plus de k. On en déduit que
$$m(\mathcal{M}) = \limsup_{k\geq 0}\{m(\mathcal{M}_k)\} = d + N(a_d, x_1) + \cdots + N(a_d, x_s) < \infty$$
Autrement dit, le module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ appartient à la catégorie $\mathcal{H}$.

Le lemme suivant montre que la multiplicité m caractérise les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes nuls. Cela provient du fait qu'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome $\mathcal{M}_k$ est nul si et seulement si $m(\mathcal{M}_k) = 0$.

Lemme 3.3.5. *Un élément $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ est nul si et seulement si $m(\mathcal{M}) = 0$.*

Démonstration. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Si $\mathcal{M} = 0$, alors $\mathcal{M}_k = 0$. Les multiplicités de $\mathcal{M}_k$ sont toutes nulles par définition et $m(\mathcal{M}_k) = 0$. Alors $m(\mathcal{M}) = 0$.

On suppose maintenant que $m(\mathcal{M}) = 0$. Par définition de $m(\mathcal{M})$, il existe un rang k à partir duquel $m(\mathcal{M}_k) = 0$. Autrement dit, les multiplicités de $\mathcal{M}_k$ sont toutes nulles et $\mathcal{M}_k = 0$ d'après le corollaire 2.3.3. Ainsi, $\mathcal{M}_k = 0$ pour k suffisamment grand et donc $\mathcal{M} = 0$. □

Bien que la multiplicité m ne soit pas additive sur les suites exactes, on peut démontrer que les éléments de $\mathcal{H}$ sont de longueur finie en utilisant la proposition 3.3.2 et le lemme 3.3.5.

Proposition 3.3.6. *Soit $\mathcal{M}$ un élément de $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{M}$ est de longueur finie inférieure ou égale à $m(\mathcal{M})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un élément de $\mathcal{H}$. On démontre que toute suite décroissante $(\mathcal{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de $\mathcal{M}$ est stationnaire. On peut supposer que $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}$. Comme $\mathcal{M}^n$ est un sous-module de $\mathcal{M}$, on sait que $m(\mathcal{M}^n) \leq m(\mathcal{M})$ d'après la proposition 3.3.2. La suite $(m(\mathcal{M}^n))_n$ est une suite décroissante d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire. Il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $m(\mathcal{M}^{n+1}) = m(\mathcal{M}^n)$. On suppose dans la suite que $n \geq n_0$. On écrit $\mathcal{M}^n = \varprojlim_k \mathcal{M}^n_k$. Il existe un rang $k_n \geq \max\{k_{\mathcal{M}^n}, k_{\mathcal{M}^{n+1}}\}$ pour lequel

$$\forall k \geq k_n, \quad m(\mathcal{M}^n) = \sup_{k'\geq k}\{m(\mathcal{M}^n_{k'})\} = m(\mathcal{M}^{n+1}) = \sup_{k'\geq k}\{m(\mathcal{M}^{n+1}_{k'})\} \tag{3.1}$$

Pour tout $k \geq k_n$, on considère la suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^{n+1}_k \longrightarrow \mathcal{M}^n_k \longrightarrow \mathcal{M}^n_k/\mathcal{M}^{n+1}_k \longrightarrow 0$$

On sait d'après la proposition 2.4.3 que

$$m(\mathcal{M}^n_k) = m(\mathcal{M}^{n+1}_k) + m(\mathcal{M}^n_k/\mathcal{M}^{n+1}_k)$$

En particulier, si $m(\mathcal{M}^{n+1}) = m(\mathcal{M}^{n+1}_k)$ pour un certain niveau de congruence $k \geq k_n$, alors $m(\mathcal{M}^n) = m(\mathcal{M}^n_k)$ d'après 3.1 puisque $m(\mathcal{M}^n_k) \geq m(\mathcal{M}^{n+1}_k)$. On en déduit que $m(\mathcal{M}^{n+1}_k) = m(\mathcal{M}^n_k)$ et que $m(\mathcal{M}^n_k/\mathcal{M}^{n+1}_k) = 0$. Le corollaire 2.3.3 implique alors que $\mathcal{M}^n_k/\mathcal{M}^{n+1}_k = 0$. Autrement dit, $\mathcal{M}^n_k \simeq \mathcal{M}^{n+1}_k$. Puisque l'égalité 3.1 est vérifiée pour tout entier $k \geq k_n$, il existe une infinité d'entiers $k \geq k_n$ pour lesquels $\mathcal{M}^n_k \simeq \mathcal{M}^{n+1}_k$.

Alors $\mathcal{M}^n \simeq \mathcal{M}^{n+1}$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. En effet, soit $(k_\ell)_{\ell\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}^n_{k_\ell} = \mathcal{M}^{n+1}_{k_\ell}$. La propriété universelle de la limite projective permet d'obtenir des isomorphismes de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules $\mathcal{M}^n \simeq \varprojlim_\ell \mathcal{M}^n_{k_\ell}$ et $\mathcal{M}^{n+1} \simeq \varprojlim_\ell \mathcal{M}^{n+1}_{k_\ell}$. Puisque $\mathcal{M}^{n+1}$ est un sous-module de $\mathcal{M}^n$, les morphismes de transitions des modules $\mathcal{M}^{n+1}_k$ sont induits par ceux des $\mathcal{M}^n_k$. On en déduit que les morphismes de transitions $\mathcal{M}^n_{k_{\ell+1}} = \mathcal{M}^{n+1}_{k_{\ell+1}} \to \mathcal{M}^n_{k_\ell} = \mathcal{M}^{n+1}_{k_\ell}$ des modules $\mathcal{M}^n_{k_\ell}$ sont aussi les morphismes de transitions des $\mathcal{M}^{n+1}_{k_\ell}$. Il en découle, en passant à la limite projective sur ℓ, que $\mathcal{M}^n \simeq \mathcal{M}^{n+1}$.

On a démontré que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{M}^n \simeq \mathcal{M}^{n+1}$. La suite $(\mathcal{M}^n)_n$ est donc stationnaire. On a aussi démontré que $m(\mathcal{M}^{n+1}) = m(\mathcal{M}^n)$ implique $\mathcal{M}^{n+1} \simeq \mathcal{M}^n$ lorsque $\mathcal{M}^{n+1}$ est un sous-module de $\mathcal{M}^n$. Comme la suite $(m(\mathcal{M}^n))_n$ est décroissante de terme initial $m(\mathcal{M}) < \infty$, la longueur d'une suite strictement décroissante de sous-modules de $\mathcal{M}$ est de longueur au plus $m(\mathcal{M})$. De même, toute suite strictement croissante de sous-modules de $\mathcal{M}$ est de longueur au plus $m(\mathcal{M})$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module de longueur finie inférieure ou égale à $m(\mathcal{M})$. $\square$

Exemple 3.3.7. On continue l'exemple 3.3.4. On suppose toujours que $\mathfrak{X} = U$ est affine muni d'une coordonnée locale. Soit $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$. On note $x_1, \ldots, x_s$ les zéros de a_d. On rappelle que $N(a_d, x)$ est la valuation de $(a_d \mod \omega)$ dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ est de longueur finie inférieure ou égale à $m(\mathcal{M}) = d + N(a_d, x_1) + \cdots + N(a_d, x_s)$.

On termine cette partie en démontrant que tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module à connexion intégrable est de longueur finie.

Lemme 3.3.8. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un module coadmissible tel que les $\mathcal{M}_k$ soient des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules libres de rang n pour k suffisamment grand. Alors $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang n.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un niveau de congruence $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}_k$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang n pour tout entier $k \geq k_0$. On ne considère maintenant que les indices k supérieurs ou égaux à k_0. On note $\lambda_k : \mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ le morphisme de transition pour le rang k. Ce dernier est $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-linéaire donc $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire. Par hypothèse, l'application $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$, $P \otimes e \mapsto P \cdot \lambda_k(e)$ est un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-linéaire. Cela implique que l'image $\lambda_k(\mathcal{M}_{k+1})$ de λ_k est dense dans $\mathcal{M}_k$ pour la topologie ω-adique. Comme $\mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini, $\lambda_k(\mathcal{M}_{k+1})$ est un sous-$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module fermé de $\mathcal{M}_k$. Puisqu'il est dense, $\lambda(\mathcal{M}_k) \simeq \mathcal{M}_k$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules. Autrement dit, l'application $\lambda_k : \mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ est surjective. Comme $\mathcal{M}_k$ et $\mathcal{M}_{k+1}$ sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules libre de même rang fini n, λ_k est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules. On en déduit que $\mathcal{M} \simeq \varprojlim_{k \geq k_0} \mathcal{M}_k \simeq \mathcal{M}_{k_0}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module. Ainsi, $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini n. $\square$

La réciproque de ce lemme est vraie : si $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible et un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang n, alors il existe un niveau de congruence k à partir duquel $\mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang n. Ce résultat est démontré plus tard dans le chapitre 6.

Définition 3.3.9. *Un module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est appelé module à connexion intégrable de rang $n \in \mathbb{N}$ s'il existe un niveau de congruence k à partir duquel chaque $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini n.*

Avec cette définition, on vérifie que les modules à connexion intégrable sont de longueur finie.

Proposition 3.3.10. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module à connexion intégrable. Alors $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module de longueur finie inférieure ou égale au rang $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{M})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un module à connexion intégrable de rang n. D'après le lemme 2.4.9 et le corollaire 2.2.6, les modules $\mathcal{M}_k$ ont une unique multiplicité égale à n. On déduit alors de la proposition 3.3.6 que tout module à connexion est de longueur finie. $\square$

Chapitre 4

Microlocalisation de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$

Pour définir une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles par microlocalisation, il faut inverser les opérateurs différentiels qu'on désire être holonomes. On souhaite que les modules de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ soient holonomes si et seulement si P est un opérateur fini. Comme on a pu le voir dans le chapitre précédent, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ n'admet que très peu d'éléments inversibles : $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)^{\times} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^{\times}$. On construit dans ce chapitre un faisceau microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty}$ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ vérifiant la condition suivante : un élément P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ si et seulement si P est un opérateur différentiel fini dont le coefficient dominant est inversible dans l'anneau de fonctions $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

Pour cela, on commence par microlocaliser les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Afin d'avoir des morphismes de transition commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$, on introduit un nouveau paramètre $r \in \mathbb{N}^*$. On définit des faisceaux microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ pour tout entier $k \geq r$ admettant des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$. Les faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r} := \varprojlim_{k\geq r} \mathcal{F}_{k,r}$ vont être des microlocalisés de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$. On montre qu'il existe des morphismes naturels de faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r+1} \to \mathcal{F}_{\infty,r}$. Alors $\mathcal{F}_{\infty} := \varinjlim_{r\geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$.

4.1 Microlocalisations de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

On introduit dans cette section des microlocalisés du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ pour un niveau de congruence k supérieur ou égale à un. Pour cela, on utilise une localisation non commutative décrite dans l'annexe écrite par Peter Schneider de l'article [20] de Gergely Zábrádi. On commence par rappeler les principales propriétés de ce microlocalisé. La condition pour construire un tel microlocalisé est d'être une algèbre quasi-abélienne. Comme déjà dit en introduction, les K-algèbres de Banach $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ sont quasi-abéliennes dès que

$k \geq 1$. On inverse en pratique la partie multiplicative $S = \{\partial^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ des puissances de la dérivation ∂. Une difficulté est de construire des microlocalisés des algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour la partie multiplicative S admettant des morphismes de transition commutant avec les morphismes injectifs $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

Soient $k \geq r \geq 1$. On peut définir un tel microlocalisé en inversant les éléments de S dans l'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour toutes les normes quasi-abéliennes $|\cdot|_r, \ldots, |\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On obtient ainsi une K-algèbre de Banach noétherienne $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ dont la norme est seulement sous-multiplicative. Les faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$, pour un niveau r fixé, vont admettre des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. En passant à la limite projective sur $k \geq r$, on construit un faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$. Localement, $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une K-algèbre de Fréchet-Stein. On introduit dans cette section les faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$. On démontre ensuite plusieurs de leurs propriétés. On définit le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$ plus tard dans la section 4.2.

4.1.1 Microlocalisation d'une algèbre de Banach quasi-abélienne

On résume et rappelle dans cette partie quelques résultats vérifiés par le microlocalisé d'une algèbre de Banach quasi-abélienne construit dans l'annexe de l'article [20]. On démontre ensuite que l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que U est un ouvert affine sur lequel on dispose d'une coordonnée étale.

Soit K un corps valué complet non archimédien et A une K-algèbre de Banach munie d'une norme multiplicative $|\cdot|$ non archimédienne.

Définition 4.1.1. *On dit que A est quasi-abélienne pour la norme $|\cdot|$ s'il existe un réel $\gamma \in [0, 1[$ tel que pour tout couple $(a, b) \in A^2$,*

$$|ab - ba| = |[a, b]| \leq \gamma \cdot |ab| = \gamma \cdot |a||b|$$

On fixe maintenant m normes $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_m$ quasi-abéliennes sur A. Une partie multiplicative de A est un sous ensemble S de A vérifiant

1. $0 \notin S$ et $1 \in S$;
2. S est stable par multiplication : $\forall s, t \in S,\ s \cdot t \in S$.

Soit S une partie multiplicative de A. Il existe alors une unique K-algèbre de Banach $B = A\langle |\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_m, S\rangle$ munie d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ non archimédienne et d'un morphisme isométrique de K-algèbres

$$\phi : (A, \max\{|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_m\}) \to (B, \|\cdot\|)$$

telle que $\phi(S) \subset B^\times$ et telle que les éléments de B de la forme $s^{-1}a$ pour $(s,a) \in S \times A$ soient denses dans B. On identifie A à une sous-algèbre de B via ϕ : on note encore a l'image d'un élément a de A et s^{-1} l'inverse de $s \in S$ dans B. Par ailleurs, le morphisme $\phi : A \to B$ vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition 4.1.2. *Soit $(D, \|\cdot\|_D)$ une K-algèbre de Banach munie d'un morphisme de K-algèbres $f : A \to D$ tel que $f(S) \subset D^\times$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ pour laquelle*

$$\forall (s,a) \in S \times A, \quad \|f(s)^{-1} \cdot f(a)\|_D \leq c \cdot \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ |s|_i^{-1} \cdot |a|_i \right\}$$

Alors il existe un unique morphisme continu de K-algèbres $\tilde{f} : B \to D$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & D \end{tikzcd}$$

commute. De plus, si $c = 1$ et si la norme $\|\cdot\|_D$ de D est sous-multiplicative, alors $\tilde{f}$ est 1-lipschitzienne :

$$\forall b \in B, \quad \|\tilde{f}(b)\|_D \leq \|b\|$$

Remarque 4.1.3. *La condition vérifiée par f permet de la prolonger naturellement par uniforme continuité sur B. En effet, puisque $s(s^{-1}a) = a$ dans B et puisque $\tilde{f}$ est multiplicative, on a nécessairement $\tilde{f}(s^{-1}a) = f(s)^{-1}f(a)$. La condition sur f (impliquant au passage la continuité de f) signifie que l'application $S \times A \to D$, $(s,a) \mapsto f(s)^{-1}f(a)$ est uniformément continue. Ainsi, puisque les éléments de la forme $s^{-1}a$ sont denses dans B, elle se prolonge uniquement en une application continue $\tilde{f} : B \to D$.*

On se donne une constante $\gamma \in [0,1[$ telle que

$$\forall a,b \in A, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad |ab - ba|_i \leq \gamma \cdot |ab|_i$$

Proposition 4.1.4. *Pour tout $(e_1, \ldots, e_n) \in B^n$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a*

$$\|e_1 \ldots e_n - e_{\sigma(1)} \ldots e_{\sigma(n)}\| \leq \gamma \|e_1 \ldots e_n\|$$

En particulier, B est quasi-abélienne de constante γ et $\|ab\| = \|ba\|$. Par ailleurs, dans le cas ou B est le localisé de A pour une unique norme, la norme de B est multiplicative.

Le lemme suivant relie la norme des éléments de B de la forme $s^{-1}a$ avec les normes $|\cdot|_i$ de s et de a.

Lemme 4.1.5. *Pour $a, b \in A$ et $s, t \in S$, on a*

1. $\|s^{-1}a - s^{-1}b\| = \max_{1\leq i\leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a-b|_i\}$;

2. $\|s^{-1}a\| = \max_{1\leq i\leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a|_i\}$;

3. $\|s^{-1}a - t^{-1}b\| = \max_{1\leq i\leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |t|_i^{-1} \cdot |a-b|_i\}$.

Exemple 4.1.6. Ce microlocalisé coïncide avec la notion classique de localisation lorsque A est une K-algèbre commutative munie d'une norme multiplicative $|\cdot|$ (en particulier, A est intègre). Soit $S \subset A$ une partie multiplicative et $S^{-1}A$ le localisé classique de A. On le munit de la norme multiplicative $|s^{-1}a| = |s^{-1}| \cdot |a|$. Cette dernière est bien définie puisque A est intègre. On note $\widehat{S^{-1}A}$ le complété de $S^{-1}A$ pour cette norme. Alors $\widehat{S^{-1}A}$ et $B = A\langle|\cdot|, S\rangle$ sont isométriques.

En effet, soit f le morphisme composé $A \to S^{-1}A \to \widehat{S^{-1}A}$. On a $|f(s)^{-1}f(a)| = |s|^{-1}|a|$ en notant encore $|\cdot|$ la norme de $\widehat{S^{-1}A}$. Ainsi f vérifie la condition de la propriété universelle de B. Il existe donc un unique morphisme $\varepsilon : B \to \widehat{S^{-1}A}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & \widehat{S^{-1}A} \end{tikzcd}$$

On a $\varepsilon(s^{-1}a) = f(s)^{-1}f(a) = s^{-1}a$ et $|\varepsilon(s^{-1}a)| = |f(s)|^{-1} \cdot |f(a)| = |s|^{-1} \cdot |a|$. Autrement dit, ε est une isométrie sur les éléments de la forme $s^{-1}a$. Ces derniers étant denses dans B, on en déduit que ε est une isométrie. Ainsi l'image de B par ε est un fermé dans $\widehat{S^{-1}A}$ contenant les $s^{-1}a$. Puisqu'ils sont denses, ε est un isomorphisme isométrique.

On démontre maintenant que la K-algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que le niveau de congruence k est supérieur ou égale à un. On désigne toujours par U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'un système d'une coordonnée locale. On rappelle que les sections du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ sur l'ouvert U sont données par

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) = \left\{ P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \quad \text{tq} \quad |a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

On munit la K-algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ toujours de la norme multiplicative complète $|\cdot|_k$ définie par $|P|_k = \max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\}$. On note encore $\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$. Par définition, le coefficient dominant de P est son coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$.

On rappelle que la norme $|\cdot|_k$ et la fonctions $\overline{N}_k$ ne dépendent pas du choix du système de coordonnées locales. L'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ est une K-algèbre de Banach et sa topologie est équivalente à la topologie ω-adique.

Proposition 4.1.7. *Pour tout entier $k \geq 1$, l'algèbre de Banach $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne de constante optimale $|\omega|^k = p^{-k}$.*

Démonstration. Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ et $Q = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ deux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On a

$$
\begin{aligned}
PQ &= \sum_{i\geq 0} a_i \cdot (\omega^k\partial)^i \cdot \left(\sum_{j\geq 0} b_j \cdot (\omega^k\partial)^j\right) \\
&= \sum_{i,j\geq 0} a_i \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{i} \binom{i}{\ell} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j) \cdot \omega^{k(i+j-\ell)} \cdot \partial^{i+j-\ell}\right) \\
&= \sum_{u\geq 0} \left(\sum_{\substack{\ell\geq 0 \\ 0\leq j\leq u}} \binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot a_{u+\ell-j} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j) \right) \cdot (\omega^k\partial)^u
\end{aligned}
$$

On en déduit que le coefficient d'indice u de $PQ - QP$ est

$$\alpha_u = \sum_{\substack{\ell\geq 0 \\ 0\leq j\leq u}} \omega^{k\ell}\binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot \big(a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j)\big)$$

Pour $\ell = 0$, la somme sur j est nulle. Il vient

$$\alpha_u = \omega^k \sum_{\substack{\ell\geq 1 \\ 0\leq j\leq u}} \omega^{k(\ell-1)}\binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot \big(a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j)\big)$$

Quitte à normaliser P et Q, on peut supposer que $|P|_k = |Q|_k = 1$. Chaque terme de la somme a une norme inférieure à 1. La somme est donc aussi de norme inférieure à 1. Ainsi, $|\alpha_u| \leq |\omega^k| = p^{-k}$ et $|PQ - QP|_k = \max_{u\in\mathbb{N}}\{|\alpha_u|\} \leq p^{-k}$. □

Remarque 4.1.8. *L'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},0,\mathbb{Q}}(U)$ n'est pas quasi-abélienne puisque par exemple $[\partial, x] = 1$. Pour $k > 0$, on a $[\omega^k\partial, x] = \omega^k$ avec $|\omega^k\partial|_k = 1 = |x|$ et $|\omega^k| < 1$.*

4.1.2 Un premier microlocalisé $\mathcal{E}_k$

On suppose à partir de maintenant, et dans la suite de ce chapitre, que le niveau de congruence k est supérieur ou égale à un. Ainsi la K-algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne. On peut donc la localiser pour n'importe quelle partie multiplicative. On choisit concrètement pour partie multiplicative de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ les puissance de $\partial : S = \{\partial^n,\ \ n \in \mathbb{N}\}$.

Définition et premières propriétés

On localise dans cette partie l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour la seule norme $|\cdot|_k$. Le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ obtenu possède de très bonnes et plaisantes propriétés en tant qu'algèbre de Banach. En particulier, on peut déterminer facilement ses éléments inversibles. Cependant, il n'existe pas de morphismes de transition naturels $\mathcal{E}_{k+1}(U) \to \mathcal{E}_k(U)$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. On ne peut donc pas obtenir à partir des algèbres $\mathcal{E}_k(U)$ un microlocalisé au niveau de l'algèbre limite projective $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) = \bigcap_k \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

On introduit dans la partie suivante un autre mircolocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ admettant quant à lui des morphismes de transition injectifs $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Néanmoins, ce microlocalisé est plus compliqué : sa norme n'est plus multiplicative, mais seulement sous-multiplicative. Cependant, on obtient facilement une injection naturelle $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ continue. Ainsi, bien connaitre l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ permet d'en déduire de nombreuses propriétés pour l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On commence donc par étudier le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$.

Définition 4.1.9. *On définit l'algèbre $\mathcal{E}_k(U) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\langle |\cdot|_k, S\rangle$ comme le microlocalisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ donné par la partie multiplicative S et la norme $|\cdot|_k$. On note $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ le morphisme de K-algèbres associé.*

Le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ est une K-algèbre de Banach. Puisqu'on a localisé par rapport à la seule norme $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ est encore multiplicative. De plus le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ est une isométrie. Autrement dit, la norme d'un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est la même aussi bien dans $\mathcal{E}_k(U)$ que dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On identifie $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$ via le morphisme ϕ_k. On peut noter encore $|\cdot|_k$ la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ sans ambiguïté.

Remarque 4.1.10. *Il revient au même de prendre comme partie multiplicative les puissances de $\omega^k\partial$ puisque l'uniformisante ω est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.*

On a $|\partial|_k = |\omega|^{-k} = p^{-k}$. Le lemme 4.1.5 nous dit que $|\partial^{-1}|_k = |\omega|^k = p^k$. De manière équivalente, $|\omega^k\partial|_k = |(\omega^k\partial)^{-1}|_k = 1$.

Proposition 4.1.11. *Tout élément S de $\mathcal{E}_k(U)$ s'écrit uniquement sous la forme d'une série $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ tels que $a_n \to 0$ lorsque $n \to \pm\infty$. De plus, $|S|_k = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\}$.*

Démonstration. On commence par démontrer que $\mathcal{E}_k(U)$ contient les sommes de cette forme. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ vérifiant $a_n \to 0$ lorsque $n \to \pm\infty$. On pose $S_m = \sum_{n\geq -m} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{E}_k(U)$ contient $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ et les puissances de ∂^{-1}, les séries S_m appartiennent à $\mathcal{E}_k(U)$. Pour tout $\ell \geq 0$, on a $S_{m+\ell} - S_m = \sum_{-(m+\ell)\leq n<-m} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ et

$$|S_{m+\ell} - S_m|_k \leq \max_{-(m+\ell)\leq n<-m} \left\{|a_n \cdot (\omega^k\partial)^n|_k\right\} = \max_{-(m+\ell)\leq n<-m} \{|a_n|\}$$

Puisque la suite a_n converge vers 0 pour $n \to -\infty$, la suite $(S_m)_m$ est de Cauchy dans l'algèbre complète $\mathcal{E}_k(U)$. Elle converge donc vers un élément de $\mathcal{E}_k(U)$ que l'on note $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$. Par ailleurs, on a $|S_m|_k = \max_{n\geq -m} |a_n|$. En effet, $S_m \cdot (\omega^k\partial)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(\omega^k\partial)^n$. Puisque la norme $|\cdot|_k$ est multiplicative et comme $|\omega^k\partial|_k = 1$, on obtient

$$|S_m|_k = |S_m \cdot (\omega^k\partial)^m|_k = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_{n-m}| = \max_{n\geq -m} |a_n|$$

On en déduit en passant à la limite $m \to \infty$ que $|S|_k = \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. En particulier, $S = 0$ si et seulement si tous ses coefficients a_n sont nuls. Ainsi, une telle écriture est unique.

On démontre maintenant que $\mathcal{E}_k(U)$ coïncide avec l'ensemble de ces séries. On note F le sous-ensemble de $\mathcal{E}_k(U)$ constitué des éléments de la forme $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ avec $a_n \to 0$ pour $n \to \pm\infty$. On va vérifier que F contient les éléments $(\omega^k\partial)^n \cdot P$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ et que F est fermé. Puisque l'ensemble des $(\omega^k\partial)^n \cdot P$ est dense dans $\mathcal{E}_k(U)$, on aura bien $\mathcal{E}_k(U) = F$.

Pour le premier point, il suffit de prouver que si f est un élément de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$, alors $\partial^{-1}f \in F$. On a $[\partial, f] = \partial f - f\partial = \partial(f)$, soit $\partial f = \partial(f) + f\partial$. Il vient

$$\partial^{-1}\partial f = f = \partial^{-1}\partial(f) + \partial^{-1}f\partial$$

Ainsi, $\partial^{-1}f = f\partial^{-1} - \partial^{-1}\partial(f)\partial^{-1}$. En réitérant ce calcule pour $\partial^{-1}\partial(f)$ et en modifiant ce terme dans l'expression de $\partial^{-1}f$, on obtient $\partial^{-1}\partial^n(f) = \partial^n(f)\partial^{-1} - \partial^{-1}\partial^{n+1}(f)\partial^{-1}$. Une récurrence montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\partial^{-1}f = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\partial^j(f)\partial^{-(j+1)} + (-1)^n\partial^{-1}\partial^n(f)\partial^{-n}$$

On a

$$|\partial^j(f)\partial^{-(j+1)}|_k = |\partial^j(f)| \cdot |\partial^{-(j+1)}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(j+1)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$|\partial^{-1}\partial^n(f)\partial^{-n}|_k = |\partial^{-1}|_k \cdot |\partial^n(f)| \cdot |\partial^{-n}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La somme partielle définissant $\partial^{-1}f$ converge donc lorsque $n \to \infty$. On en déduit que

$$\partial^{-1}f = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\partial^n(f) \cdot \partial^{-(n+1)} \in F$$

Enfin puisque la norme d'un élément $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ de F est $|S|_k = \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$, toute suite de Cauchy d'éléments $S_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n,m} \cdot (\omega^k\partial)^n$ de F converge aussi vers un élément de F. En effet, le fait que la suite (S_m) soit de Cauchy implique que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la suite $(a_{n,m})_m$ est de Cauchy. Elle converge donc vers un élément $\alpha_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. La suite $(S_m)_m$ converge alors vers $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot (\omega^k\partial)^n$. Cela prouve que F est fermé. Il en résulte que $\mathcal{E}_k(U) = F$. □

Remarque 4.1.12. *On a démontré dans cette preuve que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$,*

$$\partial^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(f) \cdot \partial^{-(n+1)} \in \mathcal{E}_k(U)$$

En particulier, ∂^{-1} commute avec les scalaires : pour tout $\lambda \in K$, $\partial^{-1} \cdot \lambda = \lambda \cdot \partial^{-1}$.

On démontre le résultat suivant en considérant la graduation de $\mathcal{E}_k(U)$ induite par la norme $|\cdot|_k$.

Proposition 4.1.13. *La K-algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est noetherienne à gauche et à droite. De plus, le morphisme d'algèbres $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ est plat à gauche et à droite.*

Démonstration. Soit x un point donné de $\mathfrak{X}$. C'est un point κ' rationnel pour une extension finie κ' de κ de degré $s \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la norme spectrale de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ relative au point x est à valeur dans $p^{\frac{1}{s}\cdot\mathbb{Z}}$ (corollaire 1.5.4 de l'article [10] de Laurent Garnier). Les valeurs prises par la norme spectrale étant indexées par $\mathbb{Z}$, on peut supposer que x est un point κ-rationnel et que $|\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)| = p^{\mathbb{Z}}$. On munit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ de la filtration indexée par $\mathbb{Z}$ fournie par la norme spectrale :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) : |f| \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}$$

Elle est croissante exhaustive. Soit $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$ le gradué associé. Si $|f| = p^m$, on définit $\gamma(f)$ comme étant l'image de f dans le gradué $\mathrm{gr}_m\, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m)/\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m-1)$. On note $\gamma : \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \to \mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$ l'application associée, et $\gamma : K \to \mathrm{gr}\, K$ la restriction à K. Cette application permet de doter $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)$ d'un produit et donc d'une structure de $\mathrm{gr}\, K$-algèbre. Le gradué $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$ est noetherien puisque l'algèbre $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ est noetherienne.

Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ un élément non nul de $\mathcal{E}_k(U)$. Par construction, sa norme $|P|_k = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\}$ appartient à $p^{\mathbb{Z}}$. On munit aussi $\mathcal{E}_k(U)$ de la filtration donnée par la norme :

$$\mathcal{E}_k(U)(m) = \{P \in \mathcal{E}_k(U) : |P|_k \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}$$

C'est une filtration croissante indexée par $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{E}_k(U)(m) \cdot \mathcal{E}_k(U)(m') \subset \mathcal{E}_k(U)(m + m')$$

On note $\mathrm{gr}_m\,\mathcal{E}_k(U)=\mathcal{E}_k(U)(m)/\mathcal{E}_k(U)(m-1)$ et $\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_k(U)=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{gr}_m\,\mathcal{E}_k(U)$ la gradué associé. Soit ζ_k l'image de $\omega^k\partial$ dans $\mathrm{gr}_0\,\mathcal{E}_k(U)$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_k(U)(m)$ est isomorphe à $\mathcal{E}_k(U)(m+\lambda)$ via la multiplication par ω^λ. On en déduit que $gr_m\mathcal{E}_k(U)\simeq\mathrm{gr}_{m+\lambda}\,\mathcal{E}_k(U)$ via la multiplication par $\gamma(\omega^\lambda)$. On peut donc identifier $\gamma(\omega^\lambda)\cdot\zeta_k$ avec l'image de $\omega^\lambda\cdot(\omega^k\partial)$ dans le gradué $\mathrm{gr}_\lambda\,\mathcal{E}_k(U)$.

On suppose que $|P|_k=p^m$ pour un certain entier $m\in\mathbb{Z}$. L'image de P dans le gradué $\mathrm{gr}_m\,\mathcal{E}_k(U)$ est l'élément

$$\gamma(P)=\sum_{\overline{n}_k(P)\leq n\leq\overline{N}_k(P)}\gamma(a_n)\cdot\zeta_k^n$$

où $\overline{n}_k(P)$ le plus petit entier naturel ℓ pour lequel $|P|_k=|a_\ell|$. On définit ainsi une application $\gamma:\mathcal{E}_k(U)\to\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_k(U)$ dont l'image engendre le gradué en tant que $\mathrm{gr}\,K$-algèbre. Puisque $\mathcal{E}_k(U)$ est une algèbre quasi-abélienne, le gradué est commutatif. On en déduit que

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_k(U)\simeq\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_k^{-1}]$$

en tant que $\mathrm{gr}\,K$-algèbre. En particulier, $\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_k(U)$ est une $\mathrm{gr}\,K$-algèbre noetherienne. La proposition 1.1 de l'article [17] implique alors que l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est noetherienne à gauche et à droite.

De même, on munit l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ de la filtration donnée par la norme. L'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\hookrightarrow\mathcal{E}_k(U)$ induit une inclusion entre les gradués $\mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\hookrightarrow\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_k(U)$. On a $\mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\simeq\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$ en tant que $\mathrm{gr}\,K$-algèbre. Le morphisme de $\mathrm{gr}\,K$-algèbres $\mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\hookrightarrow\mathrm{gr}\,\mathcal{E}_k(U)$ est donc plat. D'après la propositions 1.2 de l'article [17], on en déduit que le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\hookrightarrow\mathcal{E}_k(U)$ est plat à gauche et à droite. □

Elements inversibles de $\mathcal{E}_k(U)$

On rappelle que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ est l'ensemble des éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ de norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un. On note $\mathcal{D}_{X,k}=\kappa\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ la réduction modulo ω de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. C'est le faisceau de κ-algèbres sur la fibre spéciale $X=\mathfrak{X}\times_{\mathcal{V}}\mathrm{Spec}\,\kappa$ de $\mathfrak{X}$ engendré localement sur U par $\mathcal{O}_{X|U}$ et par la dérivation ∂_k image de $\omega^k\partial$ après réduction modulo ω. Les schémas $\mathfrak{X}$ et X ont même espace topologique ; on identifie U à un ouvert affine de X. On a

$$\mathcal{D}_{X,k}(U)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_X(U)\cdot\partial_k$$

C'est une κ-algèbre commutative puisque $[\omega^k\partial,t]=\omega^k$ dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ et puisque $k\geq 1$. Ainsi, $\mathcal{D}_{X,k}(U)=\mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$ est un anneau de polynôme en la variable ∂_k. On en déduit que $\mathcal{D}_{X,k}(U)^\times=\mathcal{O}_X(U)^\times$.

Soit $\mathcal{E}_k^\circ(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ de norme $|\cdot|_k$ inférieure on égale à un. C'est une $\mathcal{V}$-algèbre de Banach contenant $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. On note $E_k(U)=\mathcal{E}_k^\circ(U)\otimes_{\mathcal{V}}\kappa$ la réduction modulo ω de $\mathcal{E}_k^\circ(U)$. C'est une κ-algèbre contenant $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ dans laquelle la dérivation ∂_k est inversible. Puisque l'algèbre $(\mathcal{E}_k(U),|\cdot|_k)$ est quasi-abélienne, $E_k(U)$ est une κ-algèbre commutative. Il en découle que $E_k(U)=\mathcal{O}_X(U)[\partial_k,\partial_k^{-1}]$. Après réduction modulo ω, $E_k(U)$ est donc le localisé classique commutatif de l'algèbre de polynômes $\mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$ pour la partie multiplicative constituée des puissances de la dérivation ∂_k. On en déduit l'égalité

$$E_k(U)^\times=\left\{a\cdot\partial_k^n,\quad a\in\mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } n\in\mathbb{Z}\right\}$$

Définition 4.1.14. *Pour tout élément $P=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\cdot(\omega^k\partial)^n\in\mathcal{E}_k(U)$, on pose*

$$\overline{N}_k(P)=\max\{n\in\mathbb{Z}:|a_n|=|P|_k\}$$

$$\overline{n}_k(P)=\min\{n\in\mathbb{Z}:|a_n|=|P|_k\}$$

La fonction $\overline{N}_k$ généralise celle de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. La proposition suivante caractérise l'inversibilité des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ en fonctions de $\overline{N}_k$ et de $\overline{n}_k$.

Proposition 4.1.15. *Un élément P de $\mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si $\overline{N}_k(P)=\overline{n}_k(P)$ et si son coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.*

Démonstration. Quitte à normaliser P, on peut supposer que $|P|_k=1$. Alors $P\in\mathcal{E}_k^\circ(U)$. On note $\bar{P}=(P\mod\omega)$ l'image de P dans $E_k(U)=\mathcal{E}_k^\circ(U)\otimes_{\mathcal{V}}\kappa$. On commence par démontrer que P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si $\bar{P}$ est inversible dans $E_k(U)$. Le sens direct est évident. On suppose que $\bar{P}$ est inversible dans $E_k(U)$: il existe $Q\in\mathcal{E}_k^\circ(U)$ tel que $\bar{P}\bar{Q}=1$. Ainsi PQ est de la forme $1+\omega R$ pour un certain élément $R\in\mathcal{E}_k^\circ(U)$. Puisque $|\omega R|_k\leq|\omega|<1$, l'élément $1+\omega R$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. En effet, son inverse est donné par la série « classique »

$$(1+\omega R)^{-1}=\sum_{i\geq 0}(-\omega R)^i$$

Cette somme est bien convergente dans l'algèbre de Banach $\mathcal{E}_k(U)$ puisque $|\omega R|_k<1$. On en déduit que $P\cdot Q(1+\omega R)^{-1}=1$ dans $\mathcal{E}_k(U)$. Autrement dit, P est inversible à droite dans $\mathcal{E}_k(U)$. De même, P est inversible à gauche puisque $\bar{Q}\bar{P}=1$. Ainsi P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$.

On rappelle que $E_k(U)^\times=\{a\cdot\partial_k^n,\ \ a\in\mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } n\in\mathbb{Z}\}$. L'élément P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si $\bar{P}$ est de la forme $\bar{a}\cdot\partial_k^n$ avec $\bar{a}\in\mathcal{O}_X(U)^\times$. La réduction modulo ω de P est un monôme si et seulement si $\overline{N}_k(P)=\overline{n}_k(P)$. Le terme $\bar{a}$ est inversible dans $\mathcal{O}_X(U)$ si et seulement si a est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$. Il s'agit exactement des conditions données dans l'énoncé de la proposition. ☐

Remarque 4.1.16.

1. *Ce critère est analogue à la condition d'inversibilité des séries de Laurent convergentes $K\langle T\rangle$ à coefficients dans un corps ultramétrique complet K.*
2. *On peut démontrer ce résultat sans réduire modulo ω les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ et $\mathcal{E}^{\circ}_k(U)$. En effet, on peut raisonner de manière analogue en utilisant le gradué de $\mathcal{E}_k(U)$ pour la filtration induite par la norme $|\cdot|_k$. On rappelle que*

$$\operatorname{gr}\mathcal{E}_k(U)\simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_k^{-1}]$$

Les éléments inversibles de ce gradué sont aussi les éléments de la forme $\alpha\cdot\zeta_k$ avec α inversible dans $\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$. Il est clair qu'un élément inversible de $\mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{E}_k(U)$. La preuve est alors similaire à celle de la proposition 4.1.15.

Soit $P=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\cdot(\omega^k\partial)^n$ un élément inversible de $\mathcal{E}_k(U)$. Son inverse s'exprime explicitement en fonction des coefficients a_n. On note $d=\overline{N}_k(P)$ l'ordre de P. Puisque P est inversible, on sait que $\overline{N}_k(P)=\overline{n}_k(P)$ et que le coefficient a_d de P est inversible d'après la proposition 4.1.15. On a

$$P=a_d\cdot\underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{a_{n+d}}{a_d}\cdot(\omega^k\partial)^n\right)}_{Q}\cdot(\omega^k\partial)^d$$

Le coefficient constant de Q est égale à 1. Ses autres coefficients sont de normes strictement inférieures à 1. Son inverse est comme précédemment donné par $Q^{-1}=\sum_{i\geq 0}(-(Q-1))^i$. On obtient

$$P^{-1}=(\omega^k\partial)^{-d}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(-\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{a_{n+d}}{a_d}\cdot(\omega^k\partial)^n\right)^i\cdot a_d^{-1}$$

Le lemme suivant servira dans la démonstration de l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmisibles.

Lemme 4.1.17. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On note $\mathcal{E}_k(U)\cdot\mathcal{I}$ l'idéal à gauche de $\mathcal{E}_k(U)$ engendré par $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{E}_k(U)\cdot\mathcal{I}=\mathcal{E}_k(U)$, alors $\mathcal{I}\cap\mathcal{E}_k(U)^{\times}\neq\emptyset$.*

Démonstration. On reprend les notations de la proposition 4.1.13 vis à vis des gradués. Pour tout $m\in\mathbb{Z}$, on pose $\mathcal{I}(m)=\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)(m)\cap\mathcal{I}$. On définit ainsi une filtration croissante exhaustive sur $\mathcal{I}$. Le gradué associé $\operatorname{gr}\mathcal{I}$ est un idéal de $\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On note $\gamma:\mathcal{I}\to\operatorname{gr}\mathcal{I}$ la restriction à $\mathcal{I}$ de l'application $\gamma:\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\to\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On observe alors que $\operatorname{gr}\mathcal{I}=\operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U))\cdot\gamma(\mathcal{I})$. De même, $\operatorname{gr}(\mathcal{E}_k(U))\cdot\mathcal{I})=\operatorname{gr}(\mathcal{E}_k(U))\cdot\gamma(\mathcal{I})$ pour la filtration

$(\mathcal{E}_k(U))\cdot\mathcal{I})(m) = \mathcal{E}_k(U)(m) \cap (\mathcal{E}_k(U))\cdot\mathcal{I})$. On rappelle que $\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$ et que $\operatorname{gr}\mathcal{E}_k(U) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_k^{-1}]$.

L'hypothèse $\mathcal{E}_k(U)\cdot\mathcal{I} = \mathcal{E}_k(U)$ implique $\operatorname{gr}(\mathcal{E}_k(U)\cdot\mathcal{I}) = \operatorname{gr}(\mathcal{E}_k(U))\cdot\gamma(\mathcal{I}) = \operatorname{gr}\mathcal{E}_k(U)$. Autrement dit, il existe des opérateurs $P_1,\dots,P_s \in \mathcal{I}$ et $Q_1,\dots,Q_s \in \operatorname{gr}\mathcal{E}_k(U)$ tels que

$$Q_1\cdot\gamma(P_1) + \cdots + Q_s\cdot\gamma(P_s) = 1$$

Puisque $\operatorname{gr}\mathcal{E}_k(U) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_k^{-1}]$, on peut trouver un entier naturel n pour lequel $\zeta_k^n\cdot Q_1,\dots,\zeta_k^n\cdot Q_s \in \operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$. On note $R_i = \zeta_k^n\cdot Q_i \in \operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Alors

$$\zeta_k^n = R_1\cdot\gamma(P_1) + \cdots + R_s\cdot\gamma(P_s) \in \operatorname{gr}\mathcal{I} = \operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U))\cdot\gamma(\mathcal{I})$$

Puisque ζ_k^n est un monôme de norme un, $\zeta_k^n \in \operatorname{gr}_0\mathcal{I} = \mathcal{I}(0)/\mathcal{I}(-1)$. En particulier, ζ_k^n se relève en un élément P de $\mathcal{I}$ vérifiant $\gamma(P) = \zeta_k^n$. Cela signifie que $\overline{N}_k(P) = n_k(P) = n$ et que le coefficient d'indice n de P est inversible. D'après la proposition 4.1.15, P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. □

Pas de morphismes de transition $\mathcal{E}_{k+1}(U) \to \mathcal{E}_k(U)$

On ne dispose pas de morphismes naturels de transition $\mathcal{E}_{k+1}(U) \to \mathcal{E}_k(U)$ prolongeant les inclusions $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. La propriété universelle du microlocalisé ne fournit pas de tel morphisme. En effet, le morphisme

$$f_k := \phi_{k|\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$$

ne vérifie pas la condition d'uniforme continuité de la propriété universelle 4.1.2 appliquée à l'algèbre $\mathcal{E}_{k+1}(U)$. Cette condition s'écrit

$$\exists c>0 \ \text{ tq } \ \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U),\quad |\partial^{-n}\cdot P|_k \leq c\cdot|\partial|_{k+1}^{-n}\cdot|P|_{k+1}$$

On a $|\partial^{-1}|_k = |\omega|^k = p^{-k}$ et $|\partial^{-1}|_{k+1} = p^{-k+1}$. Ainsi pour $P=1$, il n'est pas possible de trouver une telle constante c. Le morphisme f_k ne se factorise donc pas naturellement en un morphisme de $\mathcal{E}_{k+1}(U)$ dans $\mathcal{E}_k(U)$ étendant l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)$ dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

Pour tout $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)$, on a $|P|_k \leq |P|_{k+1}$ avec égalité stricte dés que $\overline{N}_k(P) > 0$. En effet, si $P = \sum_{n\geq 0} a_n\cdot\partial^n$, alors

$$|P|_k = \max_{n\in\mathbb{N}}\left\{|a_n|\cdot p^{kn}\right\} \leq |P|_{k+1} = \max_{n\in\mathbb{N}}\left\{|a_n|\cdot p^{(k+1)n}\right\}$$

Puisque la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ est multiplicative, cette inégalité est inversée dès que l'on inverse ∂. L'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ est inversée dès que l'on considère des opérateurs dont les puissances de ∂ sont toutes négatives. Par exemple, $P = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{<0}} \omega^{-n} \cdot (\omega^{k+1}\partial)^n$ est un élément de $\mathcal{E}_{k+1}(U)\backslash\mathcal{E}_k(U)$. Il n'existe donc pas de morphisme injectif continu de $\mathcal{E}_{k+1}(U)$ dans $\mathcal{E}_k(U)$ prolongeant l'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

Le faisceau de K-algèbres $\mathcal{E}_k$

Dans ce qui précède, on a défini le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ sur un ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ sur lequel on dispose d'un système de coordonnée locale. On rappelle que la K-algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), |\cdot|_k)$ ne dépend pas du système de coordonnée locale. Puisque l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est définie par une propriété universelle au dessus de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ est indépendant du système de coordonnée locale.

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts affines de $\mathfrak{X}$ sur lesquels on dispose d'une coordonnée locale. C'est une base de voisinages ouverts de $\mathfrak{X}$.

Proposition 4.1.18. *Il existe un unique faisceau $\mathcal{E}_k$ de K-algèbres sur $\mathfrak{X}$ tel que pour tout ouvert U de $\mathcal{U}$, $\mathcal{E}_k(U) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\,\langle|\cdot|_k, \{\partial^n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$.*

Démonstration. Soit $V \subset U$ deux ouverts de $\mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{E}_k(V)$ ne dépend pas du choix du système de coordonnée locale, le morphisme composé $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V) \to \mathcal{E}_k(V)$ vérifie les hypothèses de la propriété universelle 4.1.2 appliquée à $\mathcal{E}_k(V)$. Il existe donc un unique morphisme $\mathcal{E}_k(U) \to \mathcal{E}_k(V)$ induit par le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. On en déduit que $\mathcal{E}_k$ est un préfaisceau sur l'ensemble des ouverts de $\mathcal{U}$.

Puisque $\mathcal{U}$ est une base de voisinages ouverts de $\mathfrak{X}$, il existe un unique préfaisceau $\mathcal{E}_k$ sur $\mathfrak{X}$ coïncidant avec les $\mathcal{E}_k(U)$ sur les ouverts U de $\mathcal{U}$.

L'unicité de l'écriture des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ comme séries en les puissances de $(\omega^k\partial)$ implique que $\mathcal{E}_k$ est un faisceau sur les ouverts U de $\mathcal{U}$. On en déduit que $\mathcal{E}_k$ est un faisceau de K-algèbres sur $\mathfrak{X}$. $\square$

On a donc construit un faisceau de K-algèbres $\mathcal{E}_k$ sur $\mathfrak{X}$ admettant $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ comme sous-faisceau et pour lequel la dérivation ∂ est localement inversible. Cependant, on ne dispose pas de morphismes de transition naturels $\mathcal{E}_{k+1} \to \mathcal{E}_k$ induits par les morphismes de départ $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnée locale associé à x. La proposition 4.1.15 se traduit de la manière suivante :

Proposition 4.1.19. *Un élément $P \in \mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(V)$ pour un voisinage $V \subset U$ de x si et seulement si $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ et si le coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$.*

Soit $P=\sum_{n\geq 0} a_n\cdot(\omega^k\partial)^n$ un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On note $d=\overline{N}_k(P)$. On rappelle que si P est inversible dans $\mathcal{E}_k(V)$, alors son inverse est donné par

$$P^{-1}=(\omega^k\partial)^{-d}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{a_{n+d}}{a_d}\cdot(\omega^k\partial)^n\right)^i\cdot a_d^{-1}$$

L'opérateur P^{-1} appartient à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ si et seulement si $d=0$. On retrouve ainsi les éléments localement inversibles du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$, déjà donnés dans le corollaire 1.2.5.

Corollaire 4.1.20. *Soit $P=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(\omega^k\partial)^n$ un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Il existe un ouvert V de U contenant x tel que $P\in\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)^\times$ si et seulement si $\overline{N}_k(P)=0$ et si $a_0\in\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)^\times$. Si de plus $|P|_k=1$, alors $P^{-1}\in\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(V)$.*

4.1.3 Des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ avec des morphismes de transition

On fixe tout d'abord l'ouvert affine U sur lequel on dispose d'une cordonnée locale. Soit r un entier naturel supérieur ou égale à un. On ne considère plus que les niveaux de congruences k plus grands que r. En ne prenant plus la seule norme $|\cdot|_k$ pour définir le microlocalisé de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, mais un certain nombre des normes précédentes $|\cdot|_r,\ldots,|\cdot|_k$, la condition d'uniforme continuité pour obtenir des morphismes de transition devient évidente.

Dans cette partie, l'entier $r\geq 1$ est fixé. On ne le fera varier que dans la partie 4.3. Le niveau de congruence k sera toujours supposé supérieur ou égale à r lorsqu'on considère l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. La partie multiplicative S est toujours constituée des puissances positives de la dérivation ∂.

Définition et propriétés

Définition 4.1.21. *Pour tout entier $k\geq r$, on pose $\mathcal{F}_{k,r}(U)=\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\langle|\cdot|_r,\ldots,|\cdot|_k;S\rangle$. On note $\varphi_{k,r}:\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\hookrightarrow\mathcal{F}_{k,r}(U)$ le morphisme de K-algèbres associé.*

Soit $\|\cdot\|_{k,r}$ la norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$; $(\mathcal{F}_{k,r}(U),\|\cdot\|_{k,r})$ est une K-algèbre de Banach. Par construction, $\varphi_{k,r}$ est une isométrie de $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U),\max\{|\cdot|_r,\ldots,|\cdot|_k\})$ dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U),\|\cdot\|_{k,r})$. Pour tout opérateur différentiel P de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, on vérifie que $|P|_r\leq\cdots\leq|P|_k$. On en déduit l'égalité $\max\{|P|_r,\ldots,|P|_k\}=|P|_k$. Autrement dit, $\varphi_{k,r}$ est une isométrie de $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U),|\cdot|_k)$ dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U),\|\cdot\|_{k,r})$. On identifie toujours $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ via le morphisme $\varphi_{k,r}$. Cette identification est encore compatible avec les normes.

La norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ n'est cette fois ci plus multiplicative mais seulement sous-multiplicative dés que $k > r$. En effet, on sait d'après le lemme 4.1.5 que

$$\|\partial^{-1}\|_{k,r} = \max_{r\leq i\leq k}\{|\partial|_i^{-1}\} = \max_{r\leq i\leq k}\{|\omega|^i\} = |\omega|^r = p^{-r}$$

Cependant, on a toujours $\|\partial\|_{k,r} = |\partial|_k = |\omega|^{-k} = p^k$.

Remarque 4.1.22. *Pour $k = r$, on a $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$. En effet, on localise l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ seulement pour la norme $|\cdot|_k$. En particulier, la norme de $\mathcal{F}_{k,k}(U)$ est multiplicative.*

Le morphisme $f_k = \phi_{k|\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ vérifie de manière évidente la condition d'uniforme continuité pour $\mathcal{F}_{k+1,r}$, avec pour constante $c = 1$. En effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout opérateur $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)$, on a

$$\max_{r\leq i\leq k}\{|\partial^{-n}\cdot P|_i\} \leq \max_{r\leq i\leq k+1}\{|\partial^{-n}\cdot P|_i\} \leq \max_{r\leq i\leq k+1}\{|\partial|_i^{-n}\cdot |P|_i\}$$

Par propriété universelle du localisé $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$, le morphisme f_k se factorise uniquement par un morphisme continu de K-algèbres

$$\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \to \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

De plus, ce morphisme $\varepsilon_{k,r}$ est 1-lipschitzien, tout comme l'est l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)$ dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Ainsi, $\|\varepsilon_{k,r}(S)\|_{k,r} \leq \|S\|_{k+1,r}$ pour tout élément S de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$.

Proposition 4.1.23. *Tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme*

$$S = \sum_{0\leq n\leq\infty} a_n\cdot(\omega^k\partial)^n + \sum_{-\infty\leq n<0} a_n\cdot(\omega^r\partial)^n$$

avec $a_n \to 0$ lorsque $n \to \pm\infty$. De plus, $\|S\|_{k,r} = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\}$.

Démonstration. On vérifie toujours que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$,

$$\partial^{-1}f = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\partial^n(f)\cdot\partial^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

Cette série converge bien dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ puisque

$$\|\partial^{-(n+1)}\|_{k,r} \leq \|\partial^{-1}\|_{k,r}^{n+1} \leq \left(\frac{1}{p^r}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On montre comme dans la preuve de la proposition 4.1.11 que la suite

$$S_m = \sum_{0\leq n\leq\infty} a_n\cdot(\omega^k\partial)^n + \sum_{-m\leq n<0} a_n\cdot(\omega^r\partial)^n$$

est de Cauchy dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U),\|\cdot\|_{k,r})$. La norme $\|\cdot\|_{k,r}$ n'est maintenant plus que sous-multiplicative. Il n'est pas clair que $\|S_m\|_{k,r} = \max_{-m\leq n\leq+\infty}\{|a_n|\}$. Cette égalité nécessite plus de travail que pour $\mathcal{E}_k(U)$. L'élément

$$S'_m := S_m\cdot(\omega^r\partial)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\omega^{rm}\omega^{kn}\cdot\partial^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m}\cdot(\omega^r\partial)^n$$

appartient à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. D'après la proposition 4.1.4 et le lemme 4.1.5, on sait que

$$\|S_m\|_{k,r} = \|S'_m\cdot(\omega^r\partial)^{-m}\|_{k,r} = \|(\omega^r\partial)^{-m}\cdot S'_m\|_{k,r} = \max_{r\leq\ell\leq k}\left\{|\omega^r\partial|_\ell^{-m}\cdot|S'_m|_\ell\right\}$$

Pour $r\leq\ell\leq k$, on a

$$S'_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\omega^{rm+kn-\ell(n+m)}\cdot(\omega^\ell\partial)^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m}\cdot\omega^{(r-\ell)n}\cdot(\omega^\ell\partial)^n$$

Comme $|\omega^r\partial|_\ell^{-m} = |\omega|^{(\ell-r)m}$, on obtient

$$\begin{aligned}|\omega^r\partial|_\ell^{-m}\cdot|S'_m|_\ell &= \max\left\{\max_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\cdot|\omega|^{rm+kn-\ell(n+m)+(\ell-r)m}\ ,\ \max_{0\leq n\leq m-1}|a_{n-m}|\cdot|\omega|^{(r-\ell)n+(l-r)m}\right\}\\ &= \max\left\{\max_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\cdot|\omega|^{(k-\ell)n}\ ,\ \max_{0\leq n\leq m-1}|a_{n-m}|\cdot|\omega|^{((\ell-r)(m-n)}\right\}\end{aligned}$$

Le terme $\max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\cdot|\omega|^{(k-\ell)n}\}$ est maximum pour $\ell=k$. En effet, lorsque $\ell\in\{1,\dots,k\}$, la puissance $(k-l)n$ de ω est positive et $|\omega|^{(k-\ell)n}\leq 1$. De manière analogue, le terme $\max_{0\leq n\leq m-1}\{|a_{n-m}|\cdot|\omega|^{((\ell-r)(m-n)}\}$ est maximum pour $\ell=r$, auquel cas on obtient $\max_{0\leq n\leq m-1}|a_{n-m}| = \max_{-m\leq n<0}|a_n|$. On en déduit finalement que

$$\|S_m\|_{k,r} = \max\left\{\max_{n\in\mathbb{N}}|a_n|,\ \max_{-m\leq n<0}|a_n|\right\} = \max\left\{\max_{-m\leq n\leq\infty}|a_n|\right\}$$

Il en découle immédiatement que la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ vers un élément que l'on note S. Enfin, le passage à la limite $m\to\infty$ donne $\|S\|_{k,r} = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\}$. Le reste de la preuve est analogue à celle de la proposition 4.1.11.

$\square$

Soit S un élément de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. D'après cette proposition, il s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \underbrace{\sum_{0\leq n\leq\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n}_{P\in\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)} + \underbrace{\sum_{-\infty\leq n<0} a_n \cdot (\omega^r\partial)^n}_{Q}$$

avec $a_n \to 0$ lorsque $n \to \pm\infty$. L'opérateur P est dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On a

$$\|S\|_{k,r} = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\} = \max\{|P|_k, \|Q\|_{k,r}\}$$

Soient Q et Q' deux éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ formés seulement de puissances strictement négatives de la dérivation $\omega^r\partial$. On observe sans difficulté que $\|Q\cdot Q'\|_{k,r} = \|Q\|_{k,r}\cdot\|Q'\|_{k,r}$. Autrement dit, la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est multiplicative pour le produit de ces éléments, comme elle l'est pour le produit d'éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On peut noter $|Q|_r$ pour $\|Q\|_{k,r}$ et $\|S\|_{k,r} = \max\{|P|_k, |Q|_r\}$. Par ailleurs, l'action de la dérivation ∂^{-1} sur une fonction f de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ est encore donnée par

$$\partial^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(f)\cdot\partial^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

On rappelle que le morphisme de transition $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \to \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une factorisation de l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Comme le morphisme $\varepsilon_{k,r}$ envoie la dérivation ∂ sur elle-même, $\varepsilon_{k,r}(\partial^n) = \partial^n$ pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$. Puisque par construction ce morphisme est continu, on en déduit que $\varepsilon_{k,r}(S) = S$ pour tout élément S de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$. Ainsi, $\varepsilon_{k,r}$ injecte l'algèbre $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Pour récapituler, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \arrow[r, hook, "i_k"] \arrow[d, hook, "\varphi_{k+1,r}"'] & \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \arrow[d, hook, "\varphi_{k,r}"] \\
\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \arrow[r, hook, "\varepsilon_{k,r}"'] & \mathcal{F}_{k,r}(U)
\end{tikzcd}$$

où i_k et $\varepsilon_{k,r}$ sont des inclusions 1-lipschitziennes et $\varphi_{k,r}$ et $\varphi_{k+1,r}$ des isométries.

La proposition suivante relie les K-algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et $\mathcal{E}_k(U)$: $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$.

Proposition 4.1.24. *Le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ se relève en un morphisme injectif de K-algèbres $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$. De plus, l'application $\gamma_{k,r}$ est 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ vérifie clairement la condition d'uniforme continuité dans la propriété universelle de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il induit donc un unique morphisme de K-algèbres 1-lipschitzien $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \to \mathcal{E}_k(U)$. Ce morphisme envoie les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ sur eux mêmes et ∂^{-1} sur ∂^{-1}. Par continuité, il envoie tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ sur l'élément S de $\mathcal{E}_k(U)$ (il s'agit bien d'une série convergente dans $\mathcal{E}_k(U)$). Ainsi, le morphisme $\gamma_{k,r}$ est injectif. □

Comme pour $\mathcal{E}_k(U)$, on peut munir l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ de la filtration croissante donnée par la norme sous-multiplicative $\|\cdot\|_{k,r}$. Pour $k = r$, on rappelle que $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$. On suppose que $k > r$. La norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ étant sous-abélienne, le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une $\operatorname{gr}K$-algèbre commutative. On note ζ_k et ζ_r les images respectives des dérivations $\omega^k\partial$ et de $(\omega^r\partial)^{-1}$ dans le gradué $\operatorname{gr}_0\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Puisque $(\omega^k\partial)\cdot(\omega^r\partial)^{-1} = \omega^{k-r}$,

$$\|(\omega^k\partial)\cdot(\omega^r\partial)^{-1}\|_{k,r} = p^{r-k} < \|\omega^k\partial\|_{k,r}\cdot\|(\omega\partial)^{-1}\|_{k,r} = 1$$

On a donc $\zeta_k\cdot\zeta_r = 0$ dans le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On en déduit un isomorphisme

$$\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_r]/(\zeta_k\cdot\zeta_r)$$

de $\operatorname{gr}K$-algèbres. La première partie de la proposition suivante en découle.

Proposition 4.1.25. *La K-algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est noetherienne à gauche et à droite. De plus, le morphisme de faisceaux $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ est plat à gauche et à droite.*

Démonstration. Puisque le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_r]/(\zeta_k\cdot\zeta_r)$ est noetherien, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ l'est aussi toujours d'après la proposition 1.1 de l'article [17].

Pour démontrer que le morphisme $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ est plat à gauche et à droite, on adapte la preuve de la proposition 2.2.16 de l'article [13] aux cas des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$ pour r donné. On fixe un ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. Il suffit de montrer que le morphisme de K-algèbres $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat à gauche et à droite.

On note $A = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et $\mathcal{F}^\circ_{k,r}(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ de norme $\|\cdot\|_{k,r}$ inférieure ou égale à un. Autrement dit, $\mathcal{F}^\circ_{k,r}(U)$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ dont tous les coefficients sont dans A :

$$\mathcal{F}^\circ_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(\omega^k\partial)^n + \sum_{-\infty\le n<0} a_n\cdot(\omega^r\partial)^n \in \mathcal{F}_{k,r}(U), \quad a_n \in A \right\}$$

C'est une A-algèbre vérifiant $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \mathcal{F}^{\circ}_{k,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$. On définit un A-module H par

$$H = \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U) + \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$$

Le terme $(\omega^k\partial)$ n'appartient pas à l'algèbre $\mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$. Cependant, $(\omega^k\partial) \in \mathcal{F}_{k+1,r}(U) = \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$. On vérifie tout d'abord que H est une A-algèbre. Soit $Q \in \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$ et $P \in \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. Comme $k \geq r$, on observe facilement que $P \cdot Q$ appartient au A-module H. En effet, on introduit pour cela le A-module suivant :

$$F_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{0\leq n<\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n + \sum_{-\infty<n<0} a_n \cdot (\omega^r\partial)^n, \quad a_n \in A \right\}$$

Il est clair que l'on dispose d'inclusions $F_{k+1,r}(U) \subset F_{k,r}(U) \subset H$. On peut décomposer Q sous la forme $Q = Q_1 + \omega \cdot Q_2$ avec $Q_1 \in F_{k+1,r}(U)$ et $Q_2 \in \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$. On a $(\omega^k\partial) \cdot Q_1 \in F_{k,r}(U) \subset H$. Par ailleurs, $(\omega^k\partial) \cdot (\omega Q_2) = (\omega^{k+1}\partial) \cdot Q_2 \in \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$. Autrement dit, $(\omega^k\partial) \cdot Q \in H$. On en déduit que $P \cdot Q \in H$.

Pour montrer que H est une algèbre, il suffit maintenant d'observer que $Q \cdot P \in H$. On rappelle que pour toute fonction a de A, on a

$$(\omega^r\partial)^{-1} \cdot a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(a)\omega^{rn} \cdot (\omega^r\partial)^{-(n+1)} \in \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$$

avec $(-1)^n\partial^n(a)\omega^{rn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, comme $k \geq r$,

$$(\omega^r\partial)^{-1} \cdot a(\omega^k\partial) = \omega^{k-r} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(a) \cdot \partial^{-n} \in \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$$

On en déduit que pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$,

$$(\omega^r\partial)^{-\ell} \cdot P \in H = \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U) + \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$$

Ainsi, pour tout élément fini $\tilde{Q}$ de $\mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$, il en découle que $\tilde{Q} \cdot P \in H$. Soit d le degré de l'opérateur différentiel fini P. L'élément Q s'écrit uniquement sous la forme

$$Q = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^{k+1}\partial)^n}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{-d\leq n\leq -1} a_n \cdot (\omega^r\partial)^n}_{Q_2} + \underbrace{\sum_{-\infty\leq n<-d} a_n \cdot (\omega^r\partial)^n}_{Q_3}$$

Puisque $Q_1 \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1}(U)$, il est clair que $Q_1 \cdot P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1}(U) + \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) \subset H$. D'après ce que l'on vient d'établir ci-dessus, $Q_2 \cdot P \in H$. Soit $m > d$ et $Q_3^{(m)}$ la troncation à l'ordre $-m$ de Q_3 :

$$Q_3 := \sum_{-m\leq n<-d} a_n \cdot (\omega^r\partial)^n$$

Comme $(\omega^r\partial)^{-1}$ diminue strictement le degré et comme d est le degré de l'opérateur P, on vérifie que $Q_3^{(m)} \cdot P \in \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$. De plus, on vérifie aussi que la suite $(Q_3^{(m)} \cdot P)_{m>d}$ est de Cauchy dans l'algèbre $(\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$. Enfin, puisque la $\mathcal{V}$-algèbre $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ est complète, on en déduit que $Q_3 \cdot P \in \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$. Pour conclure, on a bien montré que $Q \cdot P \in H$. On a ainsi démontré que H est une A-algèbre.

Comme $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) = \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, on a $H_{\mathbb{Q}} := H \otimes_{\mathcal{V}} K = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$. Par ailleurs, il est clair que $\widehat{H} = \mathcal{F}^\circ_{k,r}(U)$. Puisque $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U) \subset \mathcal{F}^\circ_{k,r}(U)$ et $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) \subset \mathcal{F}^\circ_{k,r}(U)$, on a $H \subset \mathcal{F}^\circ_{k,r}(H)$. De plus, H contient $F_{k,r}(U)$ et $\mathcal{F}^\circ_{k,r}(U)$ est le complété ω-adique de $F_{k,r}(U)$. Le complété ω-adique $\widehat{H}$ de H est donc égale à $\mathcal{F}^\circ_{k,r}(U)$. Pour montrer le résultat de platitude, il suffit donc de prouver que l'algèbre H est noetherienne. En effet, dans ce cas $\widehat{H}$ est plat sur H et donc $\widehat{H}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat sur $H_{\mathbb{Q}} = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$.

L'algèbre $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ est noetherienne d'après la proposition 1.1 de l'article [17]. En effet, son gradué est isomorphe à l'algèbre noetherienne $\mathrm{gr}(A)[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$ et $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ est complet pour la topologie ω-adique.

L'algèbre H est engendrée sur A par $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ et par la dérivation $(\omega^k\partial)$. Pour toute fonction a de A, on a

$$[\omega^k\partial, a] = \omega^k\partial(a) \in A \subset \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$$

Comme $[\omega^k\partial, \omega^{k+1}\partial] = [\omega^k\partial, (\omega^r\partial)^{-1}] = 0$, $[\omega^k\partial, P] \in \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ pour tout opérateur différentiel fini P de $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$. Enfin, puisque la $\mathcal{V}$-algèbre $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ est complète pour la topologie ω-adique, on en déduit que

$$\forall P \in \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U), \quad [\omega^k\partial, P] \in \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$$

Une récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}^*$ implique alors que

$$\forall P \in \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U), \quad [(\omega^k\partial)^\ell, P] \in \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U) \cdot (\omega^k\partial)^i \tag{4.1}$$

Le même argument que celui de la fin de la preuve de la proposition 2.2.16 de l'article [13] montre ensuite que H est noetherien. On le rappelle brièvement ci-dessous.

Soit I un idéal à gauche de H. On note J l'ensemble des éléments R de $\mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ pour lesquels il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $P \in I$ et $R_0, \ldots, R_{\ell-1} \in \mathcal{F}^\circ_{k+1,r}(U)$ tels que

$$P = R \cdot (\omega^k\partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R_i \cdot (\omega^k\partial)^i$$

Soit R' un autre élément de J, où $P' = R' \cdot (\omega^k\partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R'_i \cdot (\omega^k\partial)^i \in I$. On suppose par exemple que $\ell \geq \ell'$. La relation 4.1 implique que

$$P + (\omega^k\partial)^{\ell-\ell'} \cdot P' = (R + R') \cdot (\omega^k\partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R_i" \cdot (\omega^k\partial)^i$$

pour certains $R_i" \in \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$. Autrement dit, $R + R' \in J$ et J est un idéal à gauche de $\mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$. Ainsi, J est engendré sur $\mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$ par des éléments $R_1, \ldots, R_s$. Par ailleurs, $I \cap \mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$ est un idéal à gauche de $\mathcal{F}^{\circ}_{k+1,r}(U)$. Il est donc engendré par des éléments $P_1, \ldots, P_t$. Enfin, on observe que I est engendré en tant qu'idéal à gauche de H par les éléments $R_1, \ldots, R_s, P_1, \ldots, P_t$. Ceci prouve que H est noetherien à gauche. De même, on démontre que H est noetherien à droite. $\square$

Le morphisme de faisceaux d'algèbres $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{F}_{k,r}$ est probablement plat à gauche et à droite. Cependant, je n'ai pas réussi à le démontrer. Le morphisme entre les gradués $\mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathrm{gr}\,\mathcal{F}_{k,r}$ n'est pas plat puisque les algèbres graduées $\mathrm{gr}\,\mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$ admettent de la torsion. On ne peut donc déduire la platitude de la filtration induite par la norme.

Par ailleurs, soit toujours $\mathcal{F}^{\circ}_{k,r}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{k,r}$ de norme $\|\cdot\|_{k,r}$ inférieure ou égale à un. Alors $\mathcal{F}^{\circ(i)}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/(\omega^i \cdot \mathcal{F}_{k,r})$ est un faisceau sur le $(\mathcal{V}/\omega^i)$-schéma classique $X_i = \mathfrak{X}_i \times_{\mathcal{V}} \mathrm{Spec}\,(\mathcal{V}/\omega^i)$ et $\mathcal{F}^{\circ}_{k,r}$ est la limite projective sur i des $\mathcal{F}^{\circ(i)}_{k,r}$:

$$\mathcal{F}^{\circ}_{k,r} = \varprojlim_i \mathcal{F}^{\circ(i)}_{k,r}$$

Cependant, le morphisme de faisceaux $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\omega^i \to \mathcal{F}^{\circ(i)}_{k,r}$ n'est pas plat. En effet, les faisceaux d'algèbres $\mathcal{F}^{\circ(i)}_{k,r}$ admettent de la ω-torsion. On ne pas peut donc pas démontrer ainsi, en passant à la limite projective sur i, que le morphisme initiale $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \to \mathcal{F}^{\circ}_{k,r}$ est plat. Néanmoins, la torsion des algèbres $\mathcal{F}^{\circ(i)}_{k,r}$ est à priori indépendante de l'entier i pour $i > k - r$. En contrôlant bien cette ω-torsion, j'ai espoir de pouvoir montrer que le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \to \mathcal{F}^{\circ}_{k,r}$ est plat après tensorisation par K.

On rappelle que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des ouverts affines de $\mathfrak{X}$ sur lesquels on dispose d'une coordonnée locale. C'est une base de voisinages ouverts de $\mathfrak{X}$. On démontre comme pour le faisceau $\mathcal{E}_k$ le résultat suivant.

Proposition 4.1.26. *Il existe un unique faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ de K-algèbres sur $\mathfrak{X}$ tel que pour tout ouvert U de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\,\langle |\cdot|_r, \ldots, |\cdot|_k, \{\partial^n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$.*

Les inclusions locales $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour tout ouvert U de $\mathcal{U}$ induisent des morphismes de faisceaux $\mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to$

$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. On dispose ainsi du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \arrow[d] \\
\mathcal{F}_{k+1,r} \arrow[r] & \mathcal{F}_{k,r}
\end{tikzcd}$$

Eléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ inversibles dans le localisé $\mathcal{F}_{k,r}$

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnée locale associé à x.

Il est plus délicat de déterminer les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ que de $\mathcal{E}_k(U)$ lorsque $k > r$. En effet, soit S un élément de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il s'écrit uniquement comme une série

$$S = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n + \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$$

On note ∂_k et $(\partial_r)^{-1}$ les réductions modulo ω respectivement de $\omega^k\partial$ et $(\omega^r\partial)^{-1}$. La réduction modulo ω de S est de la forme

$$\bar{S} = \sum_{-\infty < n < 0} \bar{a}_n \cdot \partial_r^n + \sum_{0 \leq n < \infty} \bar{a}_n \cdot \partial_k^n$$

Pour $k > r$, on a $\partial_k \cdot \partial_r^{-1} = \partial_r^{-1} \cdot \partial_k = 0$ puisque $(\omega^k\partial) \cdot (\omega^r\partial)^{-1} = \omega^{k-r}$. Autrement dit, la dérivation ∂_k n'est plus inversible dans $\mathcal{F}^{\circ}_{k,r}(U)/\omega$. On ne peut donc pas déterminer les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ après réduction modulo ω. Le même phénomène apparait en considérant le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Bien que la dérivation ∂ soit inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, l'image de ∂ dans le gradué n'est plus inversible.

Cependant, on dispose d'un morphisme injectif d'algèbres $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$. Puisque les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ sont connus, on en déduit facilement les opérateurs différentiels de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Ce cas est suffisant pour définir la variété caractéristique à partir du microlocalisé. En effet, comme il a été vu dans la partie 2.6, savoir déterminer les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ permet de retrouver la variété caractéristique.

Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Les normes de P dans $\mathcal{E}_k(U)$ et dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ coïncident avec la norme usuelle $|P|_k$ de P dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Si P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. Cet opérateur doit donc vérifier l'égalité $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. On rappelle que

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\} \quad \text{et} \quad \overline{n}_k(P) = \min\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$$

On note $d = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ cet entier. Pour que P soit inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$, il faut de plus que son coefficient dominant a_d soit inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. L'inverse de P dans $\mathcal{E}_k(U)$ est alors

$$P^{-1} = (\omega^k\partial)^{-d} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(-\sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^{n-d} - \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

L'opérateur P^{-1} appartient à l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si et seulement si la somme sur i converge pour la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Une condition suffisante est d'avoir

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^{n-d} + \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^n \right\|_{k,r} < 1$$

On rappelle l'égalité démontrée dans la proposition 4.1.23 :

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^{n-d} + \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^n \right\|_{k,r} = \max \left\{ \left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^{n-d} \right\|_{k,r}, \left| \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^n \right|_k \right\}$$

On a toujours

$$\left\| \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^n \right\|_{k,r} = \left| \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^n \right|_k < 1$$

En effet, l'opérateur $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^n$ appartient à l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ et par définition de d, $|a_{n+d}| < |a_d|$ dès que $n \geq 1$. Par ailleurs,

$$\sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^{n-d} = \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot \omega^{(k-r)(n-d)} \cdot (\omega^r\partial)^{n-d}$$

On obtient

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k\partial)^{n-d} \right\|_{k,r} = \max_{0\leq n<d} \left(\frac{|a_n|}{|a_d|} \cdot |\omega|^{(k-r)(n-d)} \right)$$

On en déduit que P est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ dès que

$$\forall\, 0 \leq n \leq d-1, \quad |a_n| \cdot p^{(k-r)(d-n)} < |a_d|$$

La réciproque est vraie. Cependant, elle n'est pas immédiate puisque la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de la K-algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est seulement sous-multiplicative. La proposition suivante résume tout ce qui vient d'être dit.

Proposition 4.1.27. *Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x tel que P soit inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ si et seulement si*

1. $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$,
2. a_d *est inversible dans* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \ldots, d-1\}$, $|a_n| \cdot p^{(k-r)(d-n)} < |a_d|$.

Démonstration. Si P vérifie les trois conditions de la proposition, alors P est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(V)$. Réciproquement, si P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, alors P vérifie les deux premières conditions de la proposition. En effet, P est à fortiori inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. Il reste à établir que P vérifie le point 3. On rappelle que l'inverse P^{-1} de P s'écrit

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(-\sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} - \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

Il a été vu que

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right|_k < 1$$

On pose $R = \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d}$. On a

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \max \left\{ \|R\|_{k,r}, \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right|_k \right\}$$

On doit donc démontrer que $\|R\|_{k,r} < 1$. Comme R ne contient que des puissances strictement négatives de ∂, la norme $\| \cdot \|_{k,r}$ est multiplicative pour les puissances de R :

$$\|R^i\|_{k,r} = |R^i|_r = |R|_r^i$$

On suppose tout d'abord que $\|R\|_{k,r} = 1$. On montre alors que la somme définissant P^{-1} ne converge pas dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Comme $\|R\|_{k,r} = 1$, on a $\|R^i\|_{k,r} = 1$. Puisque la norme $\| \cdot \|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est sous-multiplicative et puisque la norme de $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n$ est strictement inférieure à un, le produit d'une puissance de cette somme avec une puissance de R converge dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il suffit donc de prouver que la somme des puissances de R diverge pour arriver à une contradiction.

Or la suite $\{\sum_{i=0}^{n} R^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy dans l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ lorsque $\|R\|_{k,r} = 1$. En effet, la différence de deux termes consécutifs est de norme égale à un :

$$\left\| \sum_{i=0}^{n+1} R^i - \sum_{i=0}^{n} R^i \right\|_{k,r} = \|R^{n+1}\|_{k,r} = 1$$

Ainsi la somme des puissances de R diverge dans l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$.

Lorsque $\|R\|_{k,r} > 1$, on vérifie facilement que la somme définissant P^{-1} diverge dans l'algèbre de Banach $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$ par des arguments similaires au cas $\|R\|_{k,r} = 1$.

On en déduit finalement que $\|R\|_{k,r} < 1$. L'implication directe de la proposition est donc démontrée. $\square$

4.2 Les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$

On introduit dans cette section le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$ limite projective sur $k \geq r$ des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$ pour $r \geq 1$ fixé. On détermine ensuite les opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty}(U)$. Contrairement à ce qu'il se passe pour les K-algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) \cap (\mathcal{F}_{\infty}(U))^{\times}$ seront des opérateurs finis. Leurs coefficients dominants devront toujours être inversibles. Il faudra de plus demander certaines inégalités entre les normes des coefficients des opérateurs inversibles.

Définition et structure

Pour l'instant r est un entier fixé supposé supérieur ou égale à un et k désigne toujours un entier plus grand que r. On rappelle que tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \quad \text{avec} \quad a_n \underset{n \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les morphismes de transition $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ sont injectifs et vérifient $\|\varepsilon_{k,r}(S)\|_{k,r} \leq \|S\|_{k+1,r}$. On note $\mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ le morphisme de faisceaux de K-algèbres induit localement par les inclusions $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. La limite projective des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$ définit un faisceau de K-algèbres sur l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}$.

Définition 4.2.1. *On pose* $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$.

On a

$$\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U) = \bigcap_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

C'est une K-algèbre contenant l'algèbre de Fréchet-Stein $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. La proposition 4.1.25 montre que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est aussi une algèbre de Fréchet-Stein. La proposition suivante résume les principales propriétés du faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$.

Proposition 4.2.2.

1. *$\mathcal{F}_{\infty,r}$ est un faisceau d'algèbres de Frechet-Stein sur les ouverts U de $\mathcal{U}$ dont la topologie est induite localement par les normes $\|\cdot\|_{k,r}$ des algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$;*
2. *$\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \varprojlim_{k\geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U) = \bigcap_{k\geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U)$;*
3. *$\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \left\{ P + \sum_{-\infty\leq n<0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n : P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U),\ a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \lim_{n\to-\infty} a_n = 0 \right\}.$*

L'algèbre $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ contient l'algèbre des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Cette inclusion correspond au morphisme continu $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ induit par passage à la limite projective sur k dans les diagrammes commutatifs de K-algèbres topologiques

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \arrow[d, hook] \\ \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}_{k,r}(U) \end{tikzcd}$$

Eléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$

Soit $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ un opérateur différentiel fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Pour k suffisamment grand, $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$ d'après la preuve du lemme 3.1.2. Ainsi, P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si son coefficient dominant a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On déduit de la proposition 4.1.27 que P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si de plus

$$\forall n \in \{0,\ldots,d-1\}, \quad |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$$

Cette condition ne dépendant pas de k, on peut expliciter les opérateurs différentiels finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$: un opérateur fini $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ appartient à $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)^\times$ si et seulement si

1. $a_d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$,
2. $\forall n \in \{0,\ldots,d-1\}, \quad |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$.

Cette condition est vérifiée par exemple pour les opérateurs dominants : $|a_n| \leq |a_d|$ pour tout entier $n \in \{0,\ldots,d\}$. Réciproquement, on va démontrer que tout opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est de cette forme.

Soit maintenant $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ un opérateur infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Il n'est pas vrai en général qu'à partir d'un certain niveau de congruence k, l'égalité $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ soit vérifiée. Autrement dit, P n'est pas forcément inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ pour k suffisamment grand dès que son coefficient d'ordre $\overline{N}_k(P)$ est inversible.

Exemple 4.2.3.

1. Soit $P = \prod_{n\geq 1}(1-\omega^n\partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors $\overline{N}_k(P) = k$ et $\overline{n}_k(P) = k-1$ pour tout entier naturel k non nul.
2. Soit $P = \sum_{n\geq 0}\omega^{n^2}\cdot\partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On a $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k/2$ si k est paire. Sinon, $\overline{N}_k(P) = \frac{k+1}{2}$ et $\overline{n}_k(P) = \frac{k-1}{2}$.

Cependant, on dispose de morphismes de transition injectifs $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Si P est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{\ell,r}(U)$ pour tout entier $\ell \in \{0,\dots,k\}$. Ainsi, ou bien P est inversible dans tous les $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, ou bien P n'est plus inversible dans les $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ à partir d'un certain niveau de congruence k. Puisque $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$, les deux opérateurs de l'exemple 4.2.3 ne sont pas inversibles dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ quelque soit le niveau de congruence $k \geq r$.

Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\cdot\partial^n$ un élément de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. Alors P est inversible dans tous les $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et tous les $\mathcal{E}_k(U)$. Une condition nécessaire est donc d'avoir $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ pour tout entier naturel k. Par exemple, les deux opérateurs différentiels de l'exemple 4.2.3 ne sont pas inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. De plus, on rappelle que l'opérateur P est inversible dans l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si pour tout entier $n \in \{0,\dots,\overline{N}_k(P)-1\}$, $\ |a_n| < |a_{\overline{N}_k(P)}|\cdot p^{r(\overline{N}_k(P)-n)}$. On s'intéresse donc aux opérateurs différentiels $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\partial^n$ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ vérifiant la condition

$$d_k = \overline{N}_k(f) = \overline{n}_k(f) \quad \text{et} \quad \forall n \in \{0,\dots,d_k-1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}|\cdot p^{r(d_k-n)} \tag{4.2}$$

On démontre dans ce qui suit que si P vérifie cette condition pour tout entier naturel k, alors P est un opérateur différentiel fini. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ seront donc des opérateurs finis.

On pose $U = \operatorname{Spf} A'$ et $A = A'\otimes_{\mathcal{V}} K$. C'est une K-agèbre affinoide. La norme spectrale $|\cdot|$ sur A est multiplicative puisque $\mathfrak{X}$ est connexe et lisse, donc intègre. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Elle est munie d'une valuation, extension de la valuation de K, que l'on note encore v. Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\cdot\partial^n$ un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Les coefficients a_n sont des éléments de A vérifiant la condition de convergence :

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n\cdot\omega^{-\mu n} = 0$$

Pour tout $\mu \in v(\overline{K})$, on pose

$$|P|_\mu = \max_{\ell\in\mathbb{N}} |a_\ell\cdot\omega^{-\mu\ell}|$$

$$\overline{N}_\mu(P) = \max\left\{n\in\mathbb{N} : |a_n\cdot\omega^{-\mu n}| = |P|_\mu\right\}$$

$$\overline{n}_\mu(P) = \min\left\{n\in\mathbb{N} : |a_n\cdot\omega^{-\mu n}| = |P|_\mu\right\}$$

Lorsque $\mu = k \in \mathbb{N}$, on retrouve les fonctions définies précédemment. La norme spectrale $|\cdot|$ est à valeurs dans $|\overline{K}|$. Pour toute fonction a de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$, on note $v(a)$ l'élément μ de $v(\overline{K})$ pour lequel $|a| = |\omega|^{-\mu}$.

Définition 4.2.4. *Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On définit son polygone de Newton comme étant l'enveloppe convexe des points $A_n = (n, v(a_n))$ de $\mathbb{R}^2$. Les pentes des segments du polygone de Newton de P sont des éléments de $v(\overline{K})$.*

La figure 4.1, page 110, représente graphiquement le polygone de Newton d'un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Les pentes sont écrites en bleu.

Si P est un opérateur différentiel fini, alors son polygone de Newton n'a qu'un nombre fini de pentes. Dans le cas contraire, la suite des pentes (rangée dans l'ordre des indices des coefficients) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$. La proposition suivante montre que les pentes du polygone de Newton sont étroitement liées aux fonctions $\overline{N}$ et $\overline{n}$ de P.

Proposition 4.2.5. *Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et $\mu \in v(\overline{K})$.*

1. *Si μ n'est pas une pente du polygone de Newton de P, alors $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$.*
2. *Si μ est une pente du polygone de Newton de P, alors $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$.*

Démonstration. On suppose tout d'abord que μ n'est pas une pente du polygone de Newton de P. La suite $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$ converge vers zéro. La condition $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$ signifie exactement qu'elle admet un unique élément maximal. On suppose qu'il existe deux indices $j < j$ tels que

$$|P|_\mu = \max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n| \cdot p^{\mu n}\} = |a_i| \cdot p^{\mu i} = |a_j| \cdot p^{\mu j} \tag{4.3}$$

On note α la valuation commune des éléments $a_i \cdot \omega^{-\mu i}$ et $a_j \cdot \omega^{-\mu j}$. Les points A_i et A_j appartiennent à la même droite d'équation $Y = \mu \cdot X + \alpha$. L'égalité 4.3 signifie que α minimalise la valuation des termes $a_n \cdot \omega^{-\mu n}$. La minimalité de α implique que $[A_i, A_j]$ est un côté du polygone de Newton de P. Mais ce segment à pour pente μ ! Cela contredit l'hypothèse de départ. La suite $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$ a donc un unique élément maximal. Autrement dit, $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$.

Soit maintenant μ une pente du polygone de Newton de P. Alors le polygone de Newton admet un segment $[A_i, A_j]$ de pente μ pour deux indices i et j distincts. Les points A_i et A_j appartiennent à une même droite d'équation $Y = \mu \cdot X + \beta$. Cela se traduit par $|a_i| \cdot p^{\mu i} = |a_j| \cdot p^{\mu j} = |P|_\mu$ au niveau des normes. En particulier, $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$. □

La condition 4.2 pour un niveau de congruence $k \geq r$ fixé a d'importantes conséquences sur les valeurs possibles des pentes du polygone de Newton de P. La proposition suivante les résume.

Proposition 4.2.6. *Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si P vérifie la condition 4.2 pour un certain niveau de congruence $k \geq r$, alors le polygone de Newton de P n'admet pas de pente appartenant au segment $[r, k]$.*

Démonstration. Soit μ une pente du polygone de Newton de P appartenant à l'intervalle $[r, k]$. On sait d'après la proposition 4.2.5 qu'il existe deux indices distincts $n < m$ tels que $|P|_\mu = |a_n| \cdot p^{\mu n} = |a_m| \cdot p^{\mu m}$. On suppose m maximal. L'hypothèse 4.2 implique que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. On note d_k cet entier. Le lemme 3.1.2 nous assure que $m \leq d_k$. Par maximalité de m, on a $|a_m| \cdot p^{\mu m} > |a_{d_k}| \cdot p^{\mu d_k}$. On en déduit que

$$|a_n| = p^{\mu(m-n)} \cdot |a_m| > p^{\mu(m-n)} \cdot p^{\mu(d_k-m)} \cdot |a_{d_k}| = p^{\mu(d_k-n)} \cdot |a_{d_k}|$$

On rappelle que $n < m \leq d_k$. Le fait que μ soit supérieur ou égale à r contredit la seconde partie de l'hypothèse 4.3 :

$$\forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k-n)}$$

Ainsi, aucune pente du polygone de Newton de P n'appartient au segment $[r, k]$. □

Lorsque P vérifie l'hypothèse 4.2 pour tout entier naturel $k \geq r$, on en déduit que P est un opérateur différentiel fini.

Corollaire 4.2.7. *Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si P vérifie la condition 4.2 pour tout entier $k \geq r$, alors P est un opérateur fini.*

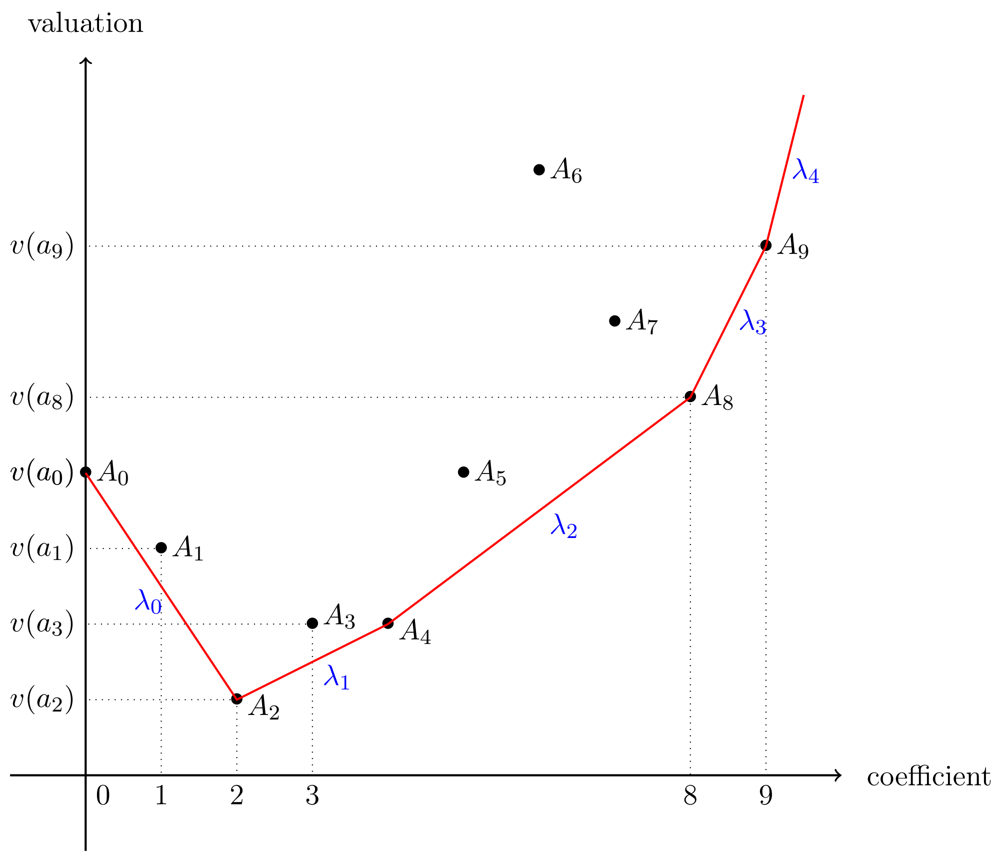
Démonstration. On suppose que $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur infini. Alors son polygone de Newton admet une infinité de pentes λ_ℓ et la suite $(\lambda_\ell)_\ell$ est strictement croissante de limite $+\infty$. Mais la proposition 4.2.6 implique que pour tout entier $k \geq r$, il n'y aucune pente dans le segment $[r, k]$. Le polygone de Newton de P ne peut donc pas admettre de pente dans l'intervalle $[r, +\infty[$. La suite des pentes $(\lambda_\ell)_\ell$ est donc finie et P est un opérateur fini. □

Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ un opérateur différenciel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si P est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour tout entier $k \geq r$. En particulier, P vérifie la condition 4.2 pour tout entier naturel k. Le corollaire 4.2.7 permet donc de décrire les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{\infty,r}$.

Théoreme 4.2.8. *Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(V)$ pour un ouvert $V \subset U$ contenant x si et seulement si*

1. $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ *dans* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,
2. a_d *est inversible dans* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$.

FIGURE 4.1 – Polygone de Newton de $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$



Le critère du théorème 4.2.8 n'est pas exactement la condition d'inversibilité souhaitée. On désire que tout opérateur différentiel fini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ soit inversible dans le microlocalisé dés que son coefficient dominant est inversible. La condition 3 du theorème 4.2.8 contient cependant beaucoup d'opérateurs : les coefficients a_i peuvent être bien plus grands que a_d pour la norme spectrale. On peut les autoriser à être de plus en plus grands en augmentant r. En considérant tous les entiers $r \geq 1$, la condition 3 donne exactement tous les opérateurs finis dont le coefficient dominant est inversible.

4.3 Le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$

On observe que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \subset \mathcal{F}_{\infty,r+1}(U)$. On peut alors considérer l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ limite inductive des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. Les morphismes de transition sont simplement les inclusions. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_\infty(U)$ sont exactement les opérateurs finis dont le coefficient dominant est inversible, sans aucune autre condition sur les coefficients. Ce critère d'inversibilité est la propriété désirée du microlocalisé discutée en introduction.

Soit toujours U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. On introduit dans cette partie le faisceau de K-algèbres $\mathcal{F}_\infty$ sur le schéma formel $\mathfrak{X}$. Concrètement, $\mathcal{F}_\infty(U)$ est l'union croissante dénombrable des K-algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. Il est clair d'après le yheérème 4.2.8 qu'un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$ si et seulement si P est un opérateur fini dont le coefficient dominant est inversible.

On rappelle brièvement la construction des faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r}$ avant de définir le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$. Pour tous les entiers $k \geq r \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est le localisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour la partie multiplicative des puissances de la dérivation ∂ et pour les normes complètes quasi-abéliennes $|\cdot|_r, \ldots, |\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une K-algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative $\|\cdot\|_{k,r}$ admettant $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ comme sous-algèbre. Tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme $S = P+Q$ avec

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \quad \text{et} \quad Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \quad \text{tq} \quad a_n \underset{n \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, $\|S\|_{k,r} = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\}$.

Pour tout entier $k \geq r$, on dispose de morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Par définition, $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k\geq r} \mathcal{F}_{k,r}$. Les algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ sont des algèbres de Frechet-Stein. Tout élément de $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme $S = P + Q$ avec $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et $Q = \sum_{-\infty\leq n<0} a_n \cdot (\omega^r\partial)^n$ vérifiant $a_n \underset{n \to -\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, l'algèbre $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ contient $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ sont donnés par le théorème 4.2.8.

On regarde maintenant les liens entre les algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour un niveau de congruence k fixé et r variable. Soit $r < r'$ deux entiers strictement positifs et $k \geq r'$. On se donne un élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$,

$$S = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n}_{P} + \underbrace{\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n}_{Q}$$

Alors S appartient à $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$. En effet, puisque $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r'}(U)$, il suffit de vérifier que Q est dans $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$. On a

$$Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \omega^{-(r'-r)n} \cdot (\omega^{r'} \partial)^n$$

Comme $|\omega|^{-(r'-r)n} \underset{n \to -\infty}{\longrightarrow} 0$, on a bien $Q \in \mathcal{F}_{k,r'}(U)$. Il est clair que

$$\|P\|_{k,r} = \|P\|_{k,r'} = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|\}$$

Par ailleurs, $\|Q\|_{k,r} = \max_{n<0}\{|a_n\}$ et $\|Q\|_{k,r'} = \max_{n<0} \left\{|a_n| \cdot p^{-(r'-r)n}\right\}$. Ainsi, il en découle que $\|Q\|_{k,r'} \leq \|Q\|_{k,r}$ et que $\|S\|_{k,r'} \leq \|S\|_{k,r}$. Autrement dit, l'inclusion d'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ est 1-lipschtizienne. Elle est donc continue.

Cependant, la topologie de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ induite sur $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ toujours pour $r' > r$ par l'inclusion d'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ ne coïncide pas avec la topologie de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. En effet, les normes $\|\cdot\|_{k,r}$ et $\|\cdot\|_{k,r'}$ ne définissent pas les mêmes séries convergentes pour les éléments de la forme $\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$.

En conclusion, $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ dès que $k \geq r' \geq r$ et la topologie de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plus fine que celle de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$.

Ces inclusions $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ pour $k \geq r' \geq r$ commutent avec les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}_{k,r}(U) \arrow[d, hook] \\
\mathcal{F}_{k+1,r'}(U) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}_{k,r'}(U)
\end{tikzcd}$$

En passant à la limite projective sur k dans la catégorie des K-algèbres topologiques, on obtient un morphisme injectif continu de K-algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$.

Définition 4.3.1. *On pose* $\mathcal{F}_\infty(U) = \varinjlim_{r\geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \bigcup_{r\geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$.

C'est une K-algèbre contenant toutes les algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ dès que $r \geq 1$. Si $P \in \mathcal{F}_\infty(U)$, alors $P \in \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$. En particulier, P s'écrit uniquement sous la forme $P = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \partial^n$ avec $|a_n| \cdot R^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout réel $R > 0$ et $|a_n| \cdot p^{nr} \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. La première condition correspond à $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si $|a_n| \cdot p^{nr} \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, alors pour tout $R \geq p^r$ on a $|a_n| \cdot R^{-n} \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient la description suivante de $\mathcal{F}_\infty(U)$:

$$\mathcal{F}_\infty(U) = \left\{ P + \sum_{-\infty\leq n<0} a_n \cdot \partial^n, \quad P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U), \quad \exists R > 0 \ \text{ tq } \ |a_n| \cdot R^n \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

On munit la K-algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ de la topologie la plus fine pour laquelle les inclusions $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_\infty(U)$ sont continues. Il s'agit de la topologie localement convexe.

Puisque l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ est l'union croissante des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$, on a

$$\mathcal{F}_\infty(U)^\times = \bigcup_{r\geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)^\times$$

Le résultat suivant se déduit du théorème 4.2.8. En effet, l'union sur $r \in \mathbb{N}^*$ des opérateurs finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ vérifiant le point 3 de cette proposition est l'ensemble des opérateurs finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$.

Théoreme 4.3.2. *Un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$ si et seulement si*

1. $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ *dans* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,
2. a_d *est inversible dans* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

Soir $r' \geq r \geq 1$. Les morphismes injectifs d'algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r} \to \mathcal{F}_{\infty,r'}$ au niveau des faisceaux. On note $\mathcal{F}_\infty$ la limite inductive de ces morphismes. C'est un préfaisceau de K-algèbres sur $\mathfrak{X}$ dont les sections sur les ouverts affines U de $\mathfrak{U}$ sont les algèbres $\mathcal{F}_\infty(U)$. Puisque $\mathfrak{X}$ est quasi-compacte et puisque les morphismes de transition sont localement injectifs, $\mathcal{F}_\infty$ est un faisceau sur $\mathfrak{X}$ d'après [18, Tag 009F]

Définition 4.3.3. *On définit un faisceau $\mathcal{F}_\infty$ sur $\mathfrak{X}$ dont les sections sont exactement les unions croissantes $\bigcup_{r\geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ en posant*

$$\mathcal{F}_\infty = \varinjlim_{r\geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$$

Chapitre 5

Variété caractéristique des modules coadmissibles

On note $\pi : T^*\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ le fibré cotangent de $\mathfrak{X}$ et $s : \mathfrak{X} \to T^*\mathfrak{X}$ la section nulle. Le morphisme π est ouvert. En, effet la propriété d'être ouvert étant topologique, il suffit de le vérifier sur la fibre spéciale et de voir que le morphisme $T^*X = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{Sym}\,\Theta_X) \to X$ est ouvert. Ici Θ_X est le faisceau cotangent de X. Puisque X est lisse, Θ_X est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini. En particulier, le morphisme $T^*X \to X$ est plat de présentation finie. Il est donc ouvert d'après [18, Tag 00I1].

On associe au faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ défini sur $\mathfrak{X}$ un faisceau $\mathcal{F}^*_{k,r}$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$ de la manière suivante. Pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$, on pose

$$\mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

L'image $\pi(V)$ de V est bien un ouvert de $\mathfrak{X}$ puisque le morphisme $\pi : T^*\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ est ouvert. D'une manière analogue, on construit un $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent à partir de tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. En effet, soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et $r \in \{1, \ldots, k\}$. On associe à $\mathcal{M}_k$ le $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent

$$\mathcal{M}^*_{k,r} = \mathcal{F}^*_{k,r} \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$$

Si V est un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$, on peut observer que

$$\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}_k(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

où $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{F}_{k,r}$-module cohérent. On note $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ le support de $\mathcal{M}^*_{k,r}$ en tant que faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. On démontre l'inégalité de Bernstein pour le support de $\mathcal{M}^*_{k,r}$: un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{M}_k$ est non nul si et seulement si $\dim \operatorname{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r}) \geq 1$.

On considère maintenant un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour r fixé, les modules $\mathcal{M}^*_{k,r}$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{M}^*_{k+1,r} \to \mathcal{M}^*_{k,r}$, $\mathcal{F}^*_{k+1,r}$-linéaires et induis par les morphismes $\mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$. Le faisceau limite projective $\mathcal{M}^*_r$ des modules $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est un $\mathcal{F}^*_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}^*_{\infty,r}$-module coadmissible. Le support du module $\mathcal{M}^*_r$ coincide avec la fermeture de l'union croissante des supports des faisceaux $\mathcal{M}^*_{k,r}$:

$$\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_r = \overline{\bigcup_{k \geq r} \operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}} \subset T^*\mathfrak{X}$$

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}$-module $\mathcal{M}^*_r$ vérifie lui aussi l'inégalité de Bernstein. La variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est alors définie comme l'intersection pour $r \geq 1$ des supports des modules coadmissibles $\mathcal{M}^*_r$.

5.1 $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent associé à un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent

On fixe dans cette section les entiers $k \geq r \geq 1$. On définit le faisceau $\mathcal{F}^*_{k,r}$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$ de la manière suivante.

Définition 5.1.1. *Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. On pose*

$$\mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } \; V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V)) & \text{si } \; V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

C'est une K-algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et multiplicative dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. On note la norme de $\mathcal{F}^*_{k,r}(V)$ toujours par $\| \cdot \|_{k,r}$. Si $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, il s'agit de la norme de $\mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$. Sinon pour $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\| \cdot \|_k$ est la norme multiplicative $| \cdot |_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V))$.

On vérifie que $\mathcal{F}^*_{k,r}$ est un préfaisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. En effet, soient $W \subset V$ deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$. Si V et W n'interceptent pas la section nulle $s(\mathfrak{X})$, ou s'ils l'interceptent tous les deux, alors les morphismes de restrictions sont respectivement ceux du faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ ou ceux de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. On suppose maintenant que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ mais que $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Par définition,

$$\mathcal{F}^*_{k,r}(W) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)) \;\text{ et }\; \mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V))$$

L'inclusion $W \subset V$ implique que $\pi(W) \subset \pi(V)$. Le morphisme de restriction d'algèbres $\mathcal{F}^*_{k,r}(V) \to \mathcal{F}^*_{k,r}(W)$ est simplement le morphisme composé

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V)) \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(W)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W))$$

La condition de recollement est claire puisque $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}_{k,r}$. Ainsi, $\mathcal{F}^*_{k,r}$ définit bien un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$.

Soit $\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \to \mathcal{F}^*_{k,r}$ le morphisme de K-algèbres induit sur les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$ par les inclusions

$$\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})(V) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V)) \hookrightarrow \mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Ce morphisme induit une structure de $\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$-module pour le faisceau $\mathcal{F}^*_{k,r}$. On considère maintenant un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}_k$. On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est le $\mathcal{F}_{k,r}$-module cohérent $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k$.

Définition 5.1.2. *On associe à $\mathcal{M}_k$ le $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent*

$$\mathcal{M}^*_{k,r} := \mathcal{F}^*_{k,r} \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$$

On vérifie que localement sur les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$, le module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est défini par

$$\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}_k(\pi(V)) & \text{si } \ V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Soient $W \subset V$ deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$ tels que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Le morphisme de restriction $\mathcal{M}^*_{k,r}(W) \to \mathcal{M}^*_{k,r}(V)$ est donné par

$$\mathcal{M}_k(\pi(V)) \to \mathcal{M}_k(\pi(W)) \xrightarrow{1\otimes \mathrm{id}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(W)) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(W))} \mathcal{M}_k(\pi(W))$$

Pour $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, $\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V))$ est un $\mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$-module cohérent. Lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \mathcal{M}_k(\pi(V))$ est un $\mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V))$-module cohérent par hypothèse.

Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. On note $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ en tant que faisceau sur le fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$. C'est un fermé de $|T^*\mathfrak{X}|$ d'après le lemme suivant puisque $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est un $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent.

Lemme 5.1.3. *Le support* $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ *de* $\mathcal{M}^*_{k,r}$ *est un fermé de* $|T^*\mathfrak{X}|$.

Démonstration. On rappelle que $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compact et que $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est un $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent. Soit $V_1, \ldots, V_n$ un recouvrement ouvert affine fini de $T^*\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}^*_{k,r|V_i}$ soit un $\mathcal{F}^*_{k,r|V_i}$-module de type fini pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il existe des sections $e_1, \ldots, e_s$ de $\mathcal{M}^*_{k,r}(V_i)$ telles que $\mathcal{M}^*_{k,r|V_i} = \mathcal{F}^*_{k,r|V_i} \cdot e_1 + \cdots + \mathcal{F}^*_{k,r|V_i} \cdot e_s$. Par ailleurs, comme $\operatorname{Supp} \mathcal{F}_{k,r} = \operatorname{Supp} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = \mathfrak{X}$, le faisceau $\mathcal{F}^*_{k,r}$ est supporté par $T^*\mathfrak{X}$ tout entier. On en déduit que

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r}) \cap V_i = \bigcup_{j=1}^{s} \operatorname{Supp}(e_j)$$

Le support $\operatorname{Supp}(e_j)$ d'une section e_j de $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est fermé dans $|T^*\mathfrak{X}|$ d'après [18, Tag 01AU]. On en déduit que $\operatorname{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r}) \cap V_i$ est fermé car union finie de fermés. Puisque les V_i recouvrent $T^*\mathfrak{X}$, le support $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ est une partie fermée de $|T^*\mathfrak{X}|$. $\square$

Inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent, où $\mathcal{I}_k$ est un idéal à gauche cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. On commence par redéfinir brièvement la variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) \subset T^*X$ du module $\mathcal{M}_k$. On note $\mathcal{I}^\circ_k$ l'ensemble des éléments du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_k$ de norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un :

$$\mathcal{I}^\circ_k(U) = \{P \in \mathcal{I}_k(U) : |P|_k \leq 1\}$$

C'est un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. En effet, $\mathcal{I}_k$ est localement sur tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ suffisamment petit un idéal de type fini engendré par des opérateurs différentiels $P_1, \ldots, P_s$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Quitte à normaliser les P_i, on peut supposer que $P_1, \ldots, P_s \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. Il est clair que $\mathcal{I}^\circ_{k|U}$ est aussi engendré par les sections $P_1, \ldots, P_s$. Ainsi, $\mathcal{I}^\circ_k$ est localement un idéal de type fini. Comme le faisceau d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ est cohérent, l'déal $\mathcal{I}^\circ_k$ est cohérent.

On identifie U à un ouvert affine de la fibre spéciale X de $\mathfrak{X}$. On munit $T^*U \subset T^*X$ du système de coordonnées locales (t, ξ) associé à la coordonnée étale de U. Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\mathcal{I}^\circ_k(U)$. On associe à P l'élément de T^*U donné par

$$\sigma(P) = \sigma_k(P) = \bar{a}_{\overline{N}_k(P)} \cdot \xi^{\overline{N}_k(P)}$$

où $\bar{a}_{\overline{N}_k(P)} \in \mathcal{O}_X(U)$ est la réduction modulo ω de $a_{\overline{N}_k(P)}$. On a $\sigma(P) = \sigma(\bar{P})$, où $\sigma(\bar{P})$ est le symbole principal de $\bar{P} \in (\mathcal{I}^\circ_k \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)(U)$. On appelle encore $\sigma(P)$ le symbole principal de P ; il dépend du niveau de congruence k. Avec cette notation, on a

$$\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T^*U = \{(t, \xi) \in T^*U : \ \sigma(P)(t, \xi) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{I}^\circ_k(U)\}$$

On peut relier la variété caractéristique de $\mathcal{M}_k$ au support de $\mathcal{M}^*_{k,r}$ en les considérant comme des parties fermées de $|T^*\mathfrak{X}| = |T^*X|$.

Proposition 5.1.4. *Pour tout* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$*-module cohérent* $\mathcal{M}_k$ *et pour tout entier* $r \in \{1, \ldots, k\}$, $\operatorname{Car}\mathcal{M}_k \subset \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ *en tant qu'espaces topologiques.*

Démonstration. On peut supposer $\mathfrak{X}$ affine et se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J}$ pour un idéal cohérent $\mathcal{J}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ comme dans la preuve de la proposition 2.6.4. Dans ce cas, $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{J}$, où $\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{J}$ est l'idéal à gauche de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par $\mathcal{J}$.

On commence par montrer que $\operatorname{Car}\mathcal{M}_k$ et $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ coïncident au niveau de la section nulle. Soit U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$. Alors $V = \pi^{-1}(U)$ intercepte la section nulle. On a $\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \mathcal{M}_k(U)$ et $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\mathcal{M}_k)_x$ pour tout point (x,ξ) de V. On se restreint à l'ouvert V quitte à supposer que $\mathfrak{X} = U$. On rappelle que $\mathcal{J}^\circ$ est l'idéal de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ constitué des éléments de $\mathcal{J}$ norme $|\cdot|_k$ inférieure où égale à un. Soit $I = \mathcal{J}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ω de $\mathcal{J}^\circ$. C'est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. On se donne des éléments $P_1, \ldots, P_s$ de $\mathcal{J}^\circ(U)$ tels que $\sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_s)$ engendrent le gradué $\operatorname{gr} I$. Alors $P_1, \ldots, P_s$ engendrent l'idéal $\mathcal{J}$. De plus,

$$\begin{aligned}\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) = \operatorname{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I) &= \{(t,\xi) \in T^*X :\ \sigma(P)(t,\xi) = 0 \ \ \forall P \in I\} \\ &= \{(t,\xi) \in T^*X :\ \sigma(P_1)(t,\xi) = \cdots = \sigma(P_s)(t,\xi) = 0\}\end{aligned}$$

On écrit $\sigma(P_i) = \sigma(\bar{P}_i) = a_i \cdot \xi^{d_i} \in \operatorname{gr} I(X)$. La section nulle est une composante irréductible de la variété caractéristique $\operatorname{Car}\mathcal{M}_k$ si et seulement si les ordres $d_1, \ldots, d_s$ des opérateurs $P_1, \ldots, P_s$ sont supérieurs ou égaux à un. Puisque l'idéal $\operatorname{gr} I$ est engendré par les monômes $\sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_s)$, l'idéal $\operatorname{gr} I$ ne contient pas de terme d'ordre zéro en ξ. On en déduit que l'idéal $\mathcal{J}$ ne contient pas d'opérateur P vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$. Dans le cas contraire, $\sigma(P)$ serait un élément d'ordre $\overline{N}_k(P) = 0$ en ξ de $\operatorname{gr} I$. Les points du support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ sur la section nulle sont donnés par le support du module $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J}$ vu en tant faisceau sur le schéma formel $\mathfrak{X}$. Puisque tout élément P de l'idéal $\mathcal{J}(U)$ vérifie $\overline{N}_k(P) \geq 1$, aucun élément de $\mathcal{J}$ n'est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ au voisinage de chaque point de $\mathfrak{X}$ d'après le corollaire 2.3.3. Ainsi, $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,0)} = (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J})_x \neq 0$ en tout point x de $\mathfrak{X} = U$. Autrement dit, $\operatorname{Supp}\mathcal{M}_k = \mathfrak{X}$ et le support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ contient la section nulle.

Réciproquement, le support du module $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J}$ n'est pas $\mathfrak{X} = U$ tout entier si et seulement si l'idéal $\mathcal{J}(U)$ contient un opérateur P vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$. Dans ce cas, le support du module $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{J}$ consiste en un nombre fini de points contenus dans l'ensemble des zéros du coefficient constant a_0 de P. Par ailleurs, $\sigma(P) = \bar{a}_0$ est un élément du gradué $\operatorname{gr} I(U)$. La variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I)$ ne contient donc pas la section nulle. On vérifie, en raisonnant de manière analogue à ce que l'on a fait dans le paragraphe précédent, que la variété caractéristique $\operatorname{Car}\mathcal{M}_k$ intercepte la section nulle exactement en les points du support du module $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$, autrement dit parmi les zéros du coefficient constant a_0 de P.

On regarde maintenant ce qu'il se passe en dehors de la section nulle. Soit V un ouvert affine de $T^*\mathfrak{X}$ n'interceptant pas la section nulle. On pose $U = \pi(V) \subset \mathfrak{X}$. C'est un ouvert de $\mathfrak{X}$. Quitte à restreindre V, on peut supposer que U est affine et que $\mathfrak{X} = U$. Avec ces notations, $\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \mathcal{F}_{k,r}(U)/(\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{I})(U)$. On reprend les notations de la partie 2.6 du microlocalisé L_k du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ sur le fibré cotangeant T^*X de X.

Soit $P \in \mathcal{I}(U)$ un opérateur de norme un. On rappelle que $\bar{P} = (P \mod \omega)$ est inversible dans le microlocalisé L_k au voisinage d'un point $(x,\xi) \in T_0^*X = T^*X \backslash s(X)$ si et seulement si $\sigma(P)(x,\xi) \neq 0$. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante, pour que P soit inversible dans le microlocalisé $\mathcal{E}_k$ au voisinage du point x. En effet, cette condition implique seulement que le coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ au voisinage de x. D'après la proposition 4.1.19, il faut de plus avoir $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ pour que P soit inversible dans $\mathcal{E}_k$ au voisinage de x. Ainsi, si $\bar{P}$ est non inversible dans $L_k(W)$ pour tout voisinage ouvert W du point (x,ξ) dans T_0^*X, alors P est non inversible au voisinage de x dans $\mathcal{E}_k$ et donc à fortiori dans $\mathcal{F}_{k,r}$.

On se donne un point (x,ξ) dans $\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$. On rappelle qu'un point (x,ξ) appartient à la variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$ si et seulement pour tout opérateur P de $\mathcal{I}(U)$ de norme un, $\sigma(P)(x,\xi) = 0$. On en déduit qu'aucun élément P de $\mathcal{I}(U)$ n'est inversible dans $\mathcal{E}_k$ au voisinage du point x. En effet, le coefficient dominant a de tout opérateur P de $\mathcal{I}(U)$ s'annule en x puisque le point (x,ξ) n'appartient pas à la section nulle du fibré cotangent : $\xi \neq 0$ et $\sigma(P) = \bar{a}(x) \cdot \xi^{\overline{N}_k(P)} = 0$ implique $a(x) = 0$. D'après le lemme 4.1.17, l'idéal $\mathcal{E}_k \cdot \mathcal{I}$ de $\mathcal{E}_k$ engendré par l'idéal $\mathcal{I}$ ne contient pas d'élément inversible au voisinage de x. Autrement dit, $\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{I}(W) \subsetneq \mathcal{E}_k(W)$ pour tout ouvert affine W de $\mathfrak{X} = U$. Il en découle que l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{I}$ de $\mathcal{F}_{k,r}$ ne contient aucun élément inversible au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{k,r}$. Dans le cas contraire, il existerait un voisinage ouvert W de x pour lequel $\mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{I} = \mathcal{F}_{k,r}(W)$. Alors

$$\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{I}(W) = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{I}(W) = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) = \mathcal{E}_k(W)$$

Ainsi $\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{I}(W) = \mathcal{E}_k(W)$ et $\mathcal{I}(W)$ contiendrait un élément inversible au voisinage de x d'après le lemme 4.1.17. Il en découle qu'aucun élément de l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{I}$ n'est inversible au voisinage de x dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$. On en déduit que $(\mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{I})_x \neq 0$ et que $(x,\xi) \in \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$. On a donc montré que $\operatorname{Car}\mathcal{M}_k \subset \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ en dehors de la section nulle. $\square$

Remarque 5.1.5. *Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et $r \in \{1,\dots,k\}$. On a démontré que la variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k)$ et que le support $\operatorname{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r})$ coincident au niveau de la section nulle. Cependant, l'inclusion $\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \operatorname{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r})$ peut être stricte en dehors de la section nulle. Cela provient du fait qu'il est plus « difficile » d'être inversible dans le localisé $\mathcal{F}_{k,r}$ que dans le localisé L_k de $\mathcal{D}_{X,k}$. Soit par exemple P un opérateur différentiel* *infini de* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. *Les variétés caractéristiques* $\mathrm{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ *sont toutes de dimension un, mais* $\mathrm{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = T^*\mathfrak{X}$ *pour* r *et* k *suffisamment grands d'après l'exemple 5.3.8.*

Puisque $\mathfrak{X}$ est une courbe, on dispose de l'inégalité de Bernstein pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$: $\mathcal{M}_k$ est un module non nul si et seulement si $\dim \mathrm{Car}\, \mathcal{M}_k \geq 1$. On fixe dans la suite un entier $r \in \{1, \ldots, k\}$. On déduit de la proposition 5.1.4 que $\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ implique $\dim(\mathrm{Car}\, \mathcal{M}_k) = 1$. En effet, il suffit de vérifier que $\mathcal{M}_k \neq 0$. Si $\mathcal{M}_k = 0$, alors $\mathcal{M}_{k,r}^* = 0$ et $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^* = \emptyset$. Autrement dit, si $\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, alors $\mathcal{M}_k$ est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$-module holonome non nul.

Réciproquement, soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$-module cohérent non nul. Alors $\dim(\mathrm{Car}\, \mathcal{M}_k) \geq 1$ et la proposition 5.1.4 montre que $\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$. On en déduit l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{F}_{k,r}^*$-modules cohérents énoncée dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.6. *Un* $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$*-module cohérent* $\mathcal{M}_k$ *est non nul si et seulement si*

$$\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$$

Puisque $\mathfrak{X}$ est connexe et lisse, $\mathfrak{X}$ est intègre. En particulier, $\mathfrak{X}$ est irréductible. Dans ce cas $T^*\mathfrak{X}$ est aussi irréductible. Comme $\dim(T^*\mathfrak{X}) = 2$, si le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est de dimension deux, alors $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$. Lorsque $\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, la proposition suivante montre que le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie conique de $T^*\mathfrak{X}$ constituée de composantes irréductibles verticales et potentiellement d'une composante irréductible horizontale d'équation $\xi = 0$.

Proposition 5.1.7 (inégalité de Bernstein)**.** *Soit* $\mathcal{M}_k$ *un* $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$*-module cohérent non nul. Si* $\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) = 2$*, alors* $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$*. Sinon,* $\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ *et les composantes irréductibles du support* $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*$ *sont toutes de dimension un.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$. Comme pour la preuve de la proposition 2.6.4, on peut se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{I}_k$ avec $\mathcal{I}_k$ un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{I}_k$, où $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{I}_k$ est l'idéal de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par $\mathcal{I}_k$. On peut supposer que $\mathfrak{X} = U$ est affine.

Il a été vu dans la proposition 5.1.4 que le support $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*$ et la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ coincident au niveau de la section nulle et que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*$. Puisque les composantes irréductibles de $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont toutes de dimension un, $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}_{k,r}^*$ n'a pas de point isolé sur la section nulle. Il reste à regarder ce qu'il se passe en dehors de la section nulle.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \backslash s(\mathfrak{X})$. On rappelle que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x$. En effet, pour tout voisinage ouvert V suffisamment petit de (x, ξ) dans $T^*\mathfrak{X}$, on a $\mathcal{M}_{k,r|V}^* = \mathcal{F}_{k,r|V}/\mathcal{I}_{k|V}$. On en déduit que si $(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$, alors le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ contient la droite verticale passant par x sauf potentiellement pour le point situé sur la section nulle. Il faut donc élucider ce qu'il se passe au niveau de la section nulle. Si le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ contient la section nulle, il n'y a rien à montrer. Dans ce cas, le support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ consiste en une composante horizontale d'équation $\xi = 0$ et en un nombre fini de composantes verticales.

On suppose maintenant que la section nulle n'est pas une composante irréductible du support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$. Il faut montrer que si $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour tout $\xi \neq 0$, alors $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,0)} = (\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Autrement dit, il faut prouver qu'aucun élément P de $\mathcal{I}_k(U)$, pour U un voisinage ouvert affine de x dans $\mathfrak{X}$, n'est inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Si $\overline{N}_k(P) \geq 1$, alors le corollaire 2.3.3 montre que P n'est jamais inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Néanmoins, il a été vu dans la preuve de la proposition 5.1.4 que l'idéal $\mathcal{I}_k(U)$ contient des opérateurs différentiels P vérifiants $\overline{N}_k(P) = 0$ lorsque la section nulle n'est pas une composante irréductible des variétés caractéristiques. Soit P un tel élément. L'hypothèse $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ implique que le coefficient constant a_0 de P s'annule en x. Autrement P serait inversible au voisinage de tout point (x,ξ) pour $\xi \neq 0$ dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$ d'après la proposition 4.1.27. En effet, puisque $\overline{N}_k(P) = 0$ implique $\overline{n}_k(P) = 0$, a_0 serait inversible au voisinage de x ! Ceci impliquerait en particulier que $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x = 0$. Ainsi, aucun élément P de $\mathcal{I}_k(U)$ vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$ n'est inversible au voisinage de x. On en déduit que $(\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ contient donc la droite verticale d'abscisse x. □

5.2 Bonnes filtrations des $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents

Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. On associe maintenant au $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent $\mathcal{M}^*_{k,r}$ des bonnes filtrations locales. Ce module étant localement de présentation finie, on considère la norme induite par cette présentation et la filtration donnée par cette norme. Le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$ correspondant est un $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent. Dans cette section, on montre que localement, $\operatorname{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r}) = \operatorname{Supp}(\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r})$. Enfin, on termine par donner une preuve directe de l'inégalité de Bernstein sans utiliser l'inclusion $\operatorname{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ et l'inégalité de Bernstein pour le module $\mathcal{M}_k$ démontrée dans la partie 2.4.

La filtration de $\mathcal{F}^*_{k,r}$

Soit U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'une cordonnée locale. On rappelle que la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ est dénotée par $|\cdot|$. C'est une valuation discrète à valeurs dans $p^{\mathbb{Z}}$. On pose

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) : |f| \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}$$

La suite $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ est une filtration strictement croissante exhaustive de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)$:

1. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)$;
2. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m)$;
3. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m)\cdot\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m') \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)(m+m')$ pour tous $m,m'\in\mathbb{Z}$.

Le gradué associé est défini par

$$\operatorname{gr}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{gr}_m\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)$$

où $\operatorname{gr}_m\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m)/\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m-1)$. Soit $a\in\operatorname{gr}_m\mathcal{O}_{\mathfrak{X},Q}(U)$. Autrement dit, $|a| = p^m$ pour un certain entier relatif m. On note $\gamma(a)$ l'image de a dans le gradué $\operatorname{gr}_m\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On définit ainsi une application $\gamma : \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)\to\operatorname{gr}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On munit $\operatorname{gr}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ de la structure de $\operatorname{gr}K$-algèbre induite par γ.

On considère aussi pour les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ et $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ les filtrations strictement croissantes exhaustives indexées par $\mathbb{Z}$ données par les normes $|\cdot|_k$ et $\|\cdot\|_{k,r}$:

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)(m) = \{P\in\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) : |P|_k\le p^m\}$$
$$\mathcal{F}_{k,r}(U)(m) = \{P\in\mathcal{F}_{k,r}(U) : \|P\|_{k,r}\le p^m\}$$

On identifie $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ aux opérateurs différentiels finis d'ordre zéro de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Ces filtrations sont compatibles avec les inclusions $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)\subset\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\subset\mathcal{F}_{k,r}(U)$.

Soit $P=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(\omega^k\partial)^n\in\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ et $m\in\mathbb{Z}$ tel que $|P|_k = \max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\} = p^m$. Alors P appartient à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)(m)\backslash\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)(m-1)$. On note $\gamma(P)$ l'image de P dans $\operatorname{gr}_m\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On a

$$\gamma(P) = \sum_{|a_n|=p^m}\gamma(a_n)\cdot\zeta_k^n$$

où $\zeta_k=\gamma(\omega^k\partial)$ est l'image de $\omega^k\partial$ dans $\operatorname{gr}_0\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\subset\operatorname{gr}_0\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On obtient ainsi une application $\gamma:\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\to\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.
On définit de même une application $\mathcal{F}_{k,r}(U)\to\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U)$ que l'on note aussi γ puisqu'elle prolonge l'application $\gamma:\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\to\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

Ces applications γ induisent des structures de $\operatorname{gr}K$-algèbres sur les gradués $\operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U))$ et $\operatorname{gr}(\mathcal{F}_{k,r}(U))$ compatibles avec l'inclusion $\operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U))\subset\operatorname{gr}(\mathcal{F}_{k,r}(U))$. Soit ζ_r l'image de $(\omega^r\partial)^{-1}$ dans $\operatorname{gr}_0\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On dispose des isomorphismes suivants de K-algèbres

$$\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)\simeq\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$$
$$\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U)\simeq\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_r]/(\zeta_k\cdot\zeta_r)$$

En particulier, ces gradués sont des $\operatorname{gr}K$-algèbres commutatives noetheriennes.

Exemple 5.2.1. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\,(\mathcal{V}\langle t\rangle)$. On a $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X}) = K\langle t\rangle$ et $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})) \simeq (\mathrm{gr}\,K)[t]$. Si $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot t^n \in K\langle t\rangle$, alors $\gamma(a) = \sum_{|\alpha_n|=|a|} \gamma(\alpha_n)\cdot t^n \in K[t]$ avec $|a| = \max_{n\in\mathbb{N}}\{|\alpha_n|\}$ et $\gamma(\alpha_n)$ l'image de α_n dans $\mathrm{gr}\,K$. Par exemple lorsque $K = \mathbb{Q}_p$, on a

$$\mathrm{gr}\,\mathbb{Q}_p = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \{0,\dots,p-1\}\cdot p^n = \left\{ \sum_{-\infty<n<\infty} \lambda_n \cdot p^n, \qquad \lambda_n \in \{0,\dots,p-1\} \right\}$$

Ainsi, $\mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X}) \simeq (\mathrm{gr}\,K)[t][\zeta_k]$. Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Les coefficients a_n sont des éléments de l'algèbre de Tate $K\langle t\rangle$. On a $|P|_k = \max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\} \in p^{\mathbb{Z}}$ et $\gamma(P) = \sum_{|a_n|=|P|_k} \gamma(a_n)\cdot \zeta_k^n$. On a aussi $\mathrm{gr}\,\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X}) \simeq (\mathrm{gr}\,K)[t][\zeta_k,\zeta_r]/(\zeta_k\cdot\zeta_r)$. Soit

$$Q = \sum_{0\le n\le\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n + \sum_{-\infty\le n<0} a_n\cdot(\omega^r\partial)^n \in \mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$$

Alors $\|Q\|_{k,r} = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\}$ et

$$\gamma(Q) = \sum_{\substack{|a_n|=\|Q\|_{k,r}\\ n\ge 0}} \gamma(a_n)\cdot\zeta_k^n + \sum_{\substack{|a_n|=\|Q\|_{k,r}\\ n<0}} \gamma(a_n)\cdot\zeta_r^n$$

On définit une filtration croissante exhaustive globale sur le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ de la manière suivante. Pour tout ouvert W de $\mathfrak{X}$, on pose $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(W)(m) = \{a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(W) : a_{|U} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m)$ pour ouvert affine U de W muni d'une coordonnée étale$\}$. Soient $V\subset U$ deux ouverts affines de $\mathfrak{X}$ et $a\in\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On vérifie alors que $|a_{|V}| \le |a_{|U}|$, où $|\cdot|$ est la norme spectrale. Autrement dit, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)(m) \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m)$ et la filtration se recolle bien sur les ouverts affines. De même, pour un ouvert W de $\mathfrak{X}$, on pose

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(W)(m) = \{P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(W) : P_{|U} \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)(m) \;\text{ pour tout ouvert affine U} \subset \text{W}\}$$

Cette filtration se recolle bien sur les ouverts puisque la norme $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ ne dépend pas du choix du système de coordonnées locales d'après le lemme 1.2.2. De manière analogue, on munit le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ d'une filtration croissante exhaustive. Enfin les filtrations de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{F}_{k,r}$ induisent une filtration croissante de $\mathcal{F}^*_{k,r}$. Pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$, le gradué $\mathrm{gr}\,\mathcal{F}^*_{k,r}(V)$ correspondant est donné par

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \begin{cases} \mathrm{gr}\,\mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V\cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V)) & \text{si } V\cap s(\mathfrak{X}) \ne \emptyset \end{cases}$$

En particulier, lorsque $U = \pi(V)$ est un ouvert affine munit d'une coordonnée locale, on a

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \begin{cases} \mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k,\zeta_r]/(\zeta_k\cdot\zeta_r) & \text{si } V\cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k] & \text{si } V\cap s(\mathfrak{X}) \ne \emptyset \end{cases}$$

On note $\gamma : \mathcal{F}^*_{k,r}(V) \to \mathrm{gr}\,\mathcal{F}^*_{k,r}(V)$ l'application induite par $\gamma : \mathcal{F}_{k,r}(U) \to \mathrm{gr}\,\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et par $\gamma : \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \to \mathrm{gr}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$.

Bonnes filtrations des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$

On se donne maintenant un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$-module cohérent $\mathcal{M}_k$ non nul. On fixe un entier $r \in \{1, \ldots, k\}$. On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{F}_{k,r}$-module cohérent.

On appelle filtration exhaustive du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$-module cohérent $\mathcal{M}_k(U)$ une suite croissante $(\mathcal{M}_k(U)(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes additifs de $\mathcal{M}_k(U)$ vérifiant

1. $\mathcal{M}_k(U) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_k(U)(m)$;
2. $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)(n) \cdot \mathcal{M}_k(U)(m) \subset \mathcal{M}_k(U)(n+m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$.

On munit $\mathcal{M}_k(U)$ de la norme induite par une présentation finie de $\mathcal{M}_k(U)$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$-module cohérent. Cette dernière est complète d'après la proposition 1.2.3. On considère la filtration sur $\mathcal{M}_k(U)$ donnée par cette norme. On note $\operatorname{gr}\mathcal{M}_k(U)$ le gradué associé. C'est un $\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$-module cohérent. En effet, soit

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)^{\ell} \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)^{n} \to \mathcal{M}_k(U) \to 0$$

une présentation finie de $\mathcal{M}_k(U)$. On considère sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)^{\ell}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)^{n}$ les filtrations naturelles données par la norme de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On munit le module $\mathcal{M}_k(U)$ de la filtration image de celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)^{n}$. La suite exacte ci-dessus est alors compatibles avec les filtrations. Elle passe donc aux gradués et fournit une présentation finie du $\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$-module $\operatorname{gr}\mathcal{M}_k(U)$.

En partant de la même présentation de $\mathcal{M}_k(U)$, on obtient une présentation finie de $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(U)$ comme $\mathcal{F}_{k,r}(U)$-module après tensorisation par $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On munit $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(U)$ de la norme induite par cette présentation. On note cette norme $\|\cdot\|_{k,r}$. Une telle norme est complète pour la topologie ω-adique puisque la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est sous-multiplicative. On considère la filtration sur $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(U)$ induite par cette norme. Le gradué associé $\operatorname{gr}\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(U)$ est un $\operatorname{gr}\mathcal{F}_{k,r}(U)$-module cohérent, pour des raisons identiques à ce qu'il vient d'être dit pour $\operatorname{gr}\mathcal{M}_k(U)$.

Soit V un ouvert affine de $T^*\mathfrak{X}$. On rappelle que $U = \pi(V)$ est un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. Quitte à réduire V, on peut supposer que $\mathcal{M}_k$ est de présentation finie sur U. On obtient une filtration croissante exhaustive du module $\mathcal{M}_{k,r}^*(V)$ correspondant à l'une des deux filtrations précédentes :

$$\mathcal{M}_{k,r}^*(V)(m) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(U)(m) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}_k(U)(m) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

On note encore $\|\cdot\|_{k,r}$ la norme du module $\mathcal{M}_{k,r}^*(V)$ obtenue ainsi. Elle est complète. On peut donc associer à $\mathcal{M}_{k,r}^*(V)$ un gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}_{k,r}^*(V)$ donné par la présentation de départ du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$-module $\mathcal{M}_k(U)$ cohérent. Ce gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$ est un $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}(V)$-module cohérent puisque les gradués $\operatorname{gr}\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(U)$ et $\operatorname{gr}\mathcal{M}_k(U)$ sont cohérents.

Définition 5.2.2. *Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et $r \in \{1,\dots,k\}$. Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_k$ soit de présentation finie sur l'ouvert $U = \pi(V)$ de $\mathfrak{X}$. On appelle bonne filtration de $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ une filtration induite par une présentation finie de $\mathcal{M}_{k|U}$.*

On a montré ci-dessus que le $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ admet localement des bonnes filtrations. En effet, soit V un ouvert affine de $T^*\mathfrak{X}$ tel que le module $\mathcal{M}_k$ soit de présentation finie sur l'ouvert $U = \pi(V)$. Alors toute filtration du module $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ induite par une présentation finie de $\mathcal{M}_{k|U}$ est une bonne filtration.

On fixe un ouvert affine V de $T^*\mathfrak{X}$ sur lequel $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ admet une bonne filtration. On note $U = \pi(V)$. Par définition, $\mathcal{M}_{k|U}$ est de présentation finie. Soit $\{\mathcal{M}^*_{k,r|V}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ une bonne filtration de $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$. La filtration est strictement croissante car induite par la norme. On note $\tau : \mathcal{M}^*_{k,r|V} \to \operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ l'application canonique donnée par la filtration. Par construction, $\tau(e) \neq 0$ dès que $e \in \mathcal{M}^*_{k,r}(V)\backslash\{0\}$. On pose $\tau(0) = 0$. L'image de τ engendre le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ en tant que $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r|V}$-module.

Lemme 5.2.3. *On suppose que $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ admet une bonne filtration. Alors $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ est un $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r|V}$-module cohérent. Soient $e_1,\dots,e_s$ des éléments de $\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$ tels que $\tau(e_1),\dots,\tau(e_s)$ engendrent le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$. Alors les sections $e_1,\dots,e_s$ engendrent le module $\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$. De plus, si $\tau(e_i) \in \operatorname{gr}_{m_i}\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$ avec $m_i \in \mathbb{Z}$, alors*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{M}^*_{k,r|V}(m) = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r|V}(m - m_i)\cdot e_i$$

Démonstration. On a déjà vu $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ est un $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r|V}$-module cohérent pour toute bonne filtration. Il existe donc des sections $\tau(e_1),\dots,\tau(e_s) \in \operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$ engendrant $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ puisque l'image de l'application $\tau : \mathcal{M}^*_{k,r|V} \to \operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ engendre le gradué en tant que $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r|V}$-module. Les éléments $\tau(e_i)$ sont homogènes : $\tau(e_i) \in \operatorname{gr}_{m_i}\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$ pour certains $m_i \in \mathbb{Z}$. De maniere équivalente, $e_i \in \mathcal{M}^*_{k,r|V}(m_i)\backslash\mathcal{M}^*_{k,r|V}(m_i - 1)$.

On démontre maintenant que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{M}^*_{k,r|V}(m) = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r|V}(m - m_i)\cdot e_i$$

Soit $e \in \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m)$ tel que $\|e\|_{k,r} = p^m$. On note $\tau(e)$ son image dans le gradué $\operatorname{gr}_m\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$. Il existe $a_1,\dots,a_s \in \operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}(V)$ tels que $\tau(e) = \sum_{i=1}^{s} a_i\cdot\tau(e_i)$. En écrivant les a_i en sommes de leurs composantes homogènes, on se ramène au cas où a_i est homogène de degré $m - m_i$. Autrement dit, $a_i \in \mathrm{gr}_{m-m_i} \mathcal{F}^*_{k,r}(V)$. Soit alors α_i un relevé de a_i dans $\mathcal{F}^*_{k,r}(V) : \gamma(\alpha_i) = a_i$ et $\alpha_i \in \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m) \backslash \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m-1)$. On pose

$$f_1 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot e_i \in \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_1) \cdot e_1 + \cdots + \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_s) \cdot e_s$$

On peut montrer que e_1 est de norme p^m et que

$$\tau(f_1) = \tau(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{s} \gamma(\alpha_i) \cdot \tau(e_i) = \sum_{i=1}^{s} a_i \cdot \tau(e_i) = \tau(e)$$

Si $e - f_1$ est de norme p^m, alors $\tau(e - f_1) = \tau(e) - \tau(f_1) = 0$. On en déduit que $e - f_1 = 0$ et donc que $e = f_1 \in \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_i) \cdot e_i$.

On suppose ensuite que $e \neq f_1$. Dans ce cas, $e - f_1 \in \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m-1)$ car $e - f_1$ ne peut pas être de norme p^m. Une récurrence sur m montre qu'alors il existe un élément f_n de $\sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r|V}(m - m_i) \cdot e_i$ tel que $e - f_n \in \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m-n)$. Autrement dit, $\|e - f_n\|_{k,r} \leq p^{m-n}$. On rappelle que le module $(\mathcal{M}^*_{k,r}(V), \|\cdot\|_{k,r})$ est complet. Comme $p^{m-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite f_n converge vers e dans le module $\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$. Par ailleurs, $\sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r}(V) \cdot e_i$ est un sous-$\mathcal{F}^*_{k,r}(V)$-module fermé de $\mathcal{M}^*_{k,r}(V)$. On en déduit que $e \in \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r}(V) \cdot e_i$. Puisque pour tout entier naturel n, $f_n \in \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_i) \cdot e_i$ et les coefficients de e sont aussi dans les $\mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_i)$. On a ainsi montré que

$$\mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m) \subset \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_i) \cdot e_i$$

L'autre inclusion s'obtient immédiatement en regardant la norme. On a donc montré que pour tout entier relatif m,

$$\mathcal{M}^*_{k,r|V}(m) = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r|V}(m - m_i) \cdot e_i$$

Enfin, on en déduit que les sections $e_1, \ldots, e_s$ engendrent le module $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ puisque la filtration est exhaustive. $\square$

On déduit de ce lemme que deux bonnes filtrations de $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$ diffèrent d'un indice fini.

Proposition 5.2.4. *Soient $\{\mathcal{M}^*_{k,r|V}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ et $\{\mathcal{M}^*_{k,r|V}(m)'\}_{m\in\mathbb{Z}}$ deux bonnes filtrations pour le module $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$. Alors il existe un entier a tel que*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m-a) \subset \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m)' \subset \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m+a)$$

Démonstration. D'après le lemme 5.2.3, il existe des sections $e_1, \dots e_s \in \mathcal{M}^*_{k,r}(V)$ telles que

$$\mathcal{M}^*_{k,r|V}(m) = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r|V}(m - m_i) \cdot e_i$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on peut trouver un entier n_i pour lequel $e_i \in \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(n_i)'$. On en déduit l'inclusion suivante en posant $b = \max_{1 \leq i \leq s}\{n_i - m_i\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m) &= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_i) \cdot e_i \\ &\subset \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^*_{k,r}(V)(m - m_i) \cdot \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(n_i)' \\ &\subset \sum_{i=1}^{s} \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m + n_i - m_i)' \\ &\subset \mathcal{M}^*_{k,r}(V)(m + b)' \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient l'autre inclusion pour un autre indice de décalage c. Alors $a = \max\{b, c\}$ satisfait l'énoncé de la proposition. □

Proposition 5.2.5. *Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et $r \in \{1, \dots, k\}$. Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$ sur lequel $\mathcal{M}^*_{k,r}$ admet une bonne filtration. Alors $\operatorname{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r}) \cap V = \operatorname{Supp}\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r|V})$ pour toute bonne filtration de $\mathcal{M}^*_{k,r|V}$.*

Démonstration. On peut supposer que $\mathfrak{X} = U$ est affine et que $\mathcal{M}_k$ est de présentation finie sur $\mathfrak{X}$. On note $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$ le gradué induit par cette présentation. Par construction, l'application $\tau : \mathcal{M}^*_{k,r}(\mathfrak{X}) \to \operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}(\mathfrak{X})$ envoie un élément non nul sur un élément non nul. L'inclusion $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r} \subset \operatorname{Supp}\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r})$ en découle.

Par ailleurs, le lemme 5.2.3 dit qu'il existe toujours un système de générateurs du gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$ se relèvant en un système de générateurs du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$. On en déduit que si le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$ est non nul en un point, alors le module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est aussi non nul en ce point. Autrement dit, $\operatorname{Supp}\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r}) \subset \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$. On a ainsi prouvé l'égalité des supports $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r} = \operatorname{Supp}\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r})$. □

On explicite dans l'exemple suivant le gradué lorsque $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal cohérent $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. D'après la preuve de la proposition 2.6.4, on peut toujours se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour étudier les supports des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

Exemple 5.2.6. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine et que $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$. On décrit dans cet exemple le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$ et l'application $\tau : \mathcal{M}^*_{k,r} \to \operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$. On a $\mathcal{M}^*_{k,r} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}_r$, où $\mathcal{I}_r$ est l'idéal de $\mathcal{F}^*_{k,r}$ engendré par $\mathcal{I}$. Pour tout ouvert affine V de $T^*\mathfrak{X}$, on a

$$\mathcal{I}_r(V) = \begin{cases} (\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{I})((\pi(V)) & \text{si } \ V\cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{I}(\pi(V)) & \text{si } \ V\cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

On rappelle que $\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{I}$ est l'idéal à gauche de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par $\mathcal{I}$. On munit $\mathcal{M}^*_{k,r}$ de la filtration quotient induite par la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}^*_{k,r}(\mathfrak{X})$:

$$\mathcal{M}^*_{k,r}(m) = \mathcal{F}^*_{k,r}(m)/(\mathcal{F}^*_{k,r}(m)\cap\mathcal{I}_r) \quad \forall m\in\mathbb{Z}$$

C'est une bonne filtration de $\mathcal{M}^*_{k,r}$. On note $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r}$ le gradué associé. On pose $\mathcal{I}_r(m) = \mathcal{F}^*_{k,r}(m)\cap\mathcal{I}_r$. Alors le gradué associé $\operatorname{gr}(\mathcal{I}_r)$ est un idéal à gauche de $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}$. On vérifie que $\operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r} \simeq \operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}/\operatorname{gr}\mathcal{I}_r$ en tant que $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}$-module. On note $\gamma : \mathcal{I}_r \to \operatorname{gr}\mathcal{I}_r$ la restriction de l'application $\gamma : \mathcal{F}^*_{k,r} \to \operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}$ à $\mathcal{I}_r$. Alors $\operatorname{gr}\mathcal{I}_r$ est l'idéal à gauche de $\operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}$ engendré par $\gamma(\mathcal{I}_r)$: $\operatorname{gr}\mathcal{I}_r = \operatorname{gr}\mathcal{F}^*_{k,r}\cdot\gamma(\mathcal{I}_r)$.

Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. On suppose par exemple que $V\cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$. Dans ce cas,

$$\mathcal{M}^*_{k,r}(m)_{|V} = \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(m)_{|\pi(V)} = (\mathcal{F}_{k,r}(m)/(\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{I})(m))_{|\pi(V)}$$

On peut décrire plus explicitement l'application $\tau : \mathcal{M}^*_{k,r|V} \to \operatorname{gr}\mathcal{M}^*_{k,r|V}$. Soit $m\in\mathbb{Z}$ et Q un élément du gradué $\operatorname{gr}_m\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(V)(m)\backslash\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(V)(m-1)$. Alors $\|Q\|_{k,r} = p^m$. Soit S un élément de l'algèbre $\mathcal{F}^*_{k,r}(V) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$ dont l'image dans le quotient $\mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))/(\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{I})(\pi(V))$ est Q. On écrit

$$S = \sum_{0\leq n\leq\infty} a_n\cdot(\omega^k\partial)^n + \sum_{-\infty\leq n<0} a_n\cdot(\omega^r\partial)^n, \quad a_n\in\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\pi(V))$$

On a $\|Q\|_{k,r} = \|S\|_{k,r} = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{|a_n|\} = p^m$. Alors

$$\tau(Q) = \left(\sum_{|a_n|=p^m}\gamma(a_n)\cdot\zeta_i^n\right) \mod \operatorname{gr}(\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{I})(\pi(V))$$

avec $\zeta_i = \zeta_k$ si $n\geq 0$ et $\zeta_i = \zeta_r$ si $n<0$. Puisque S n'appartient pas à l'idéal $(\mathcal{F}_{k,r}\cdot\mathcal{I})(\pi(V))$, la somme $\sum_{|a_n|=p^m}\gamma(a_n)\cdot\zeta_i^n$ n'est pas un élément de l'idéal $\operatorname{gr}(\mathcal{F}^*_{k,r}\cdot\mathcal{I})(V)$. Ainsi, $\tau(Q)\neq 0$. La situation est analogue lorsque $V\cap s(\mathfrak{X})\neq\emptyset$, bien qu'un peu plus simple puisque $\mathcal{M}^*_{k,r}(m)_{|V} = \mathcal{M}_k(m)_{|\pi(V)} = (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(m)/\mathcal{I}(m))_{|\pi(V)}$.

Lien entre le fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$ et les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{F}_{k,r}$

Soit U un ouvert affine de $X = \mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{V}} \operatorname{Spec} \kappa$ muni d'une coordonnée locale. On note $\pi : T^*X \to X$ la projection canonique. On rappelle que $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k|U} \simeq \mathcal{O}_{X|U}[\xi_k]$ et donc que $\operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}) \simeq T^*X$ en tant que κ-shémas. Ainsi, un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent M défini naturellement un $\mathcal{O}_{T^*X}$-module cohérent

$$\tilde{M} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\operatorname{gr} M)$$

Par définition, la variété caractéristique de M est donnée par $\operatorname{Car}(M) = \operatorname{Supp}(\tilde{M})$. On ne dispose plus d'une telle interprétation pour les modules $\mathcal{M}^*_{k,r}$. Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. On note encore $\pi : T^*\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ la projection canonique. Le module $\mathcal{M}^*_k = \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$ défini par $\mathcal{M}^*_k(V) = \mathcal{M}_k(\pi(V))$ pour les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$ n'est pas naturellement un $\mathcal{O}_{T^*\mathfrak{X}}$-module. Le module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est un $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module cohérent, mais n'est pas un $\mathcal{O}_{T^*\mathfrak{X}}$-module.

Soit maintenant V un ouvert affine de $T^*\mathfrak{X}$ muni de coordonnées locales (t, ξ). On suppose que $U = \pi(V)$ est un ouvert affine muni d'une coordonnée locale. On a $\mathcal{O}_{T^*U} = \mathcal{O}_U\langle\xi\rangle$. En particulier, le gradué $\operatorname{gr} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k} \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_U)[\xi_k]$ n'est plus isomorphe au faisceau structural $\mathcal{O}_{T^*U}$ du fibré cotangent. Cependant, cela devient vrai en considérant le gradué du faisceau $\mathcal{O}_{T^*U}$ pour la topologie ω-adique puisque $\operatorname{gr} \mathcal{O}_{T^*U} \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_U)[\xi_k]$. Ainsi, $\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{T^*U}) \simeq \operatorname{gr} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k}$. La composante de degré zéro $\operatorname{gr}_0(\mathcal{O}_{T^*U})$ du gradué est isomorphe au faisceau structural $\mathcal{O}_{X|U}[\xi_k]$ en tant que schéma de κ-algèbres. On note $(\mathcal{F}^*_{k,r})^\circ$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}^*_{k,r}$ constitué des éléments de norme $\|\cdot\|_{k,r}$ inférieure ou égale à un. On a $(\mathcal{F}^*_{k,r})^\circ(V) \simeq (\mathcal{F}^\circ_{k,r})(U)$ si $V \cap s(U) = \emptyset$ et $(\mathcal{F}^*_{k,r})^\circ(V) \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ sinon. Ainsi,

$$\operatorname{gr}(\mathcal{F}^*_{k,r})^\circ(V) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{F}^\circ_{k,r})(U) \simeq \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U))[\xi_k, \xi_r]/(\xi_k \cdot \xi_r)$$

Autrement dit, $\operatorname{gr}(\mathcal{F}^*_{k,r})^\circ_{|\pi^{-1}(U)}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{T^*U})$ et une $\mathcal{O}_{X|U}[\xi_k]$-algèbre gradué. Ainsi, le gradué $\operatorname{gr} \mathcal{F}^*_{k,r}$ est une $\operatorname{gr} \mathcal{O}_{T^*\mathfrak{X}}$-algèbre de type fini et une $\mathcal{O}_{T^*X}$-algèbre graduée. On peut définir le schéma $\operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})$ au dessus de T^*X et $\operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \mathcal{F}^*_{k,r})$ au dessus de $\operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})$. On note $\varepsilon : \operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}) \to T^*X$ et $\varepsilon' : \operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \mathcal{F}^*_{k,r}) \to T^*X$ les morphismes associés.

Soit toujours $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et $\mathcal{M}^\circ_k$ un modèle entier de $\mathcal{M}_k$. On peut supposer que le schéma $\mathfrak{X}$ est affine afin que $\mathcal{M}_k$ soit de présentation finie sur $\mathfrak{X}$. Alors le $\operatorname{gr}(\mathcal{F}^*_{k,r})^\circ$-module cohérent $\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r})^\circ$ est un $\operatorname{gr} \mathcal{O}_{T^*\mathfrak{X}}$-module quasi-cohérent. Il est plus naturel d'étudier directement les modules

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})} \otimes_{\varepsilon^{-1}(\operatorname{gr} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})} \varepsilon^{-1}(\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r}))$$

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \mathcal{F}^*_{k,r})} \otimes_{\varepsilon'^{-1}(\operatorname{gr} \mathcal{F}^*_{k,r})} \varepsilon'^{-1}(\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r}))$$

Le premier est quasi-cohérent et le second cohérent. Cependant, on ne dispose plus dans ce cadre de morphismes de transition non triviaux induits par les morphismes de transition des modules coadmissibles. En effet, on rappelle que les inclusions $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ deviennent presque triviales en passant aux graduations. Le même comportement apparait en réduisant modulo ω les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Les morphismes induits $\mathcal{D}_{X,k+1}(U) \to \mathcal{D}_{X,k}(U)$ envoient un opérateur différentiel sur son coefficient constant.

Une preuve directe de l'inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent non nul et $r \in \{1, \ldots, k\}$. On peut démontrer l'inégalité de Bernstein pour le support $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ sans utiliser l'inclusion $\operatorname{Car} \mathcal{M}_k \subset \operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ de la proposition 5.1.4 et l'inégalité de Bernstein pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents obtenue dans la proposition 2.3.2. Il faut montrer que les composantes irréductibles du $\mathcal{F}^*_{k,r}$-module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ sont toutes de dimension au moins un. D'après les preuves des propositions 5.1.4 et 5.1.7, il suffit de regarder ce qu'il se passe au niveau la section nulle et de montrer qu'aucune composante irréductible du support $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ ne consiste en point fermé sur la section nulle.

Une preuve directe de l'inégalité de Bernstein. On peut supposer que $\mathfrak{X}$ est affine et que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ avec $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. On note $\mathcal{I}_r = \mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{I}$ l'idéal à gauche du microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par $\mathcal{I}$. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k \simeq \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{I}_r$. On suppose que la section nulle n'est pas une composante irréductible. Dans le cas contraire, la preuve est identique à celle de la proposition 5.1.7. Cette condition implique l'existence d'un élément $Q \in \mathcal{I}(\mathfrak{X})$ vérifiant $\overline{N}_k(Q) = 0$.

On raisonne par l'absurde : on suppose qu'une composante irréductible du support $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ est un point $(x, 0)$ appartenant à la section nulle du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. Autrement dit, $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I})_x \neq 0$ et $(\mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{I}_r)_x = 0$. Le coefficient constant de Q n'est pas inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ au voisinage de x. Autrement Q serait inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ d'après la proposition 2.3.3 puisque $\overline{N}_k(Q) = 0$. Dans ce cas, $\mathcal{I}_x = (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x$. On aurait alors $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I})_x = 0$. Par ailleurs, l'hypothèse $(\mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{I}_r)_x = 0$ implique que $(\mathcal{I}_r)_x = (\mathcal{F}_{k,r})_x$ et donc que

$$(\mathcal{E}_k)_x \cdot (\mathcal{I}_r)_x = (\mathcal{E}_k)_x \cdot \mathcal{I}_x = (\mathcal{E}_k)_x \cdot (\mathcal{F}_{k,r})_x = (\mathcal{E}_k)_x$$

Le lemme 4.1.17 assure alors l'existence d'un élément $P \in \mathcal{I}_x$ inversible dans $(\mathcal{E}_k)_x$. D'après la proposition 4.1.19, on sait que $P \in (\mathcal{E}_k)^\times_x$ si et seulement si $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$ et si le coefficient d'indice d de P est inversible. On peut supposer que ce coefficient d'indice d est égale à un.

On note γ l'application $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x \to \operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x = \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x[\zeta_k]$. On a $\gamma(P) = \zeta_k^d$ et $\gamma(Q) = \alpha \in \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x$. Ce sont des éléments de $\gamma(\mathcal{I}_x)$ puisque $P, Q \in \mathcal{I}_x$. On rappelle que $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante t. Le gradué $\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x$ reste un anneau de valuation discrète. En effet, il s'agit du gradué pour la filtration induite par la valuation de $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x$. On note encore t l'uniformisante de $\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x$. Puisque le coefficient constant de Q n'est pas inversible dans $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x$, α n'est pas non plus inversible. Quitte à multiplier Q par un élément inversible de $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x$, on peut écrire α comme une puissance strictement positive de t, : $\alpha = t^m$ avec $m \geq 1$. L'idéal $\operatorname{gr}\mathcal{I}_x = \operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x \cdot \gamma(\mathcal{I}_x)$ contient donc un élément de la forme ζ_k^d et un élément de la forme t^m pour certains $d, m \geq 1$.

On a $\operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x = \operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x / \operatorname{gr}\mathcal{I}_x$. Le module $\operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x$ est annulé par t^m et par ζ_k^d. On va montrer que $\operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x$ est un $\operatorname{gr}K$-espace vectoriel de dimension finie puis que $(\mathcal{M}_k)_x$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\gamma(e_1), \ldots, \gamma(e_s)$ une famille génératrice de $\operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x$ avec $e_1, \ldots, e_s \in (\mathcal{M}_k)_x$. On rappelle que $\operatorname{gr}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})_x = \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x[\zeta_k]$. Comme $\zeta_k^d \cdot \operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x = 0$, les éléments $\zeta_k^i \cdot \gamma(e_j)$ pour $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ et $j \in \{0, \ldots, s\}$ engendrent $(\mathcal{M}_k)_x$ en tant que $\operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x/t^m$-module. On montre ensuite comme dans la preuve du lemme 2.3.1 que $\operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x$ est un $\operatorname{gr}K = \operatorname{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})_x/t$ - espace vectoriel de dimension finie. Soient $f_1, \ldots, f_\ell$ une $\operatorname{gr}K$-base de $\operatorname{gr}(\mathcal{M}^*_{k,r})_x$. En écrivant les f_i comme sommes de leurs composantes homogènes, on peut trouver une famille finie d'éléments $\{\gamma(g_1), \ldots, \gamma(g_m)\}$ de $\gamma(\mathcal{M}_k)$ engendrant $\operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x$ en tant que $\operatorname{gr}K$ - espace vectoriel :

$$\operatorname{gr}(\mathcal{M}_k)_x = \operatorname{gr}K \cdot \gamma(g_1) + \cdots + \operatorname{gr}K \cdot \gamma(g_m)$$

On montre ensuite, comme pour le lemme 5.2.3, que $g_1, \ldots, g_m$ engendrent $(\mathcal{M}_k)_x$ sur $\operatorname{gr}K$:

$$(\mathcal{M}_k)_x = K \cdot g_1 + \cdots + K \cdot g_m$$

Ainsi, $(\mathcal{M}_k)_x$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que $[\omega^k\partial, t] = \omega^k \cdot \mathrm{id}$. Comme $(\mathcal{M}_k)_x$ est un K-espace vectoriel de dimension finie, on a

$$\operatorname{Tr}([\omega^k\partial, t]) = 0 = \operatorname{Tr}(\omega^k \cdot \mathrm{id}) = \omega^k \cdot \operatorname{Tr}(\mathrm{id}) = (\omega^k \dim_K(\mathcal{M}_k)_x) \cdot \mathrm{id}$$

Puisque K est de caractéristique nulle, $\dim_K(\mathcal{M}_k)_x = 0$. Donc $(\mathcal{M}_k)_x = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ affirmant que $(\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. □

5.3 $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible

On va maintenant associer à tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ un $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-module coadmissible $\mathcal{M}^*_r$, où $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$ est la limite projective sur k des faisceaux d'algèbres $\mathcal{F}^*_{k,r}$. Le module $\mathcal{M}^*_r$ est simplement la limite projective sur k des $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents $\mathcal{M}^*_{k,r}$. L'inégalité de Bernstein pour le support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ découle directement des inégalités de Bernstein pour les $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents $\mathcal{M}^*_{k,r}$.

Le faisceau $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$

On considère les morphismes de transition $\mathcal{F}^*_{k+1,r} \to \mathcal{F}^*_{k,r}$ induis localement sur les ouverts par l'inclusion $\mathcal{F}_{k+1,r}(\pi(V)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$ lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et par l'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(\pi(V)) \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V))$ dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$.
Comme pour $\mathcal{F}_{\infty,r}$, on définit le faisceau $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$ comme la limite projective sur $k \geq r$ des faisceaux $\mathcal{F}^*_{k,r}$. On déduit de la proposition 4.1.25 et du corollaire 2.2.20 de [13] que les morphismes de transition $\mathcal{F}^*_{k+1,r} \to \mathcal{F}^*_{k,r}$ sont plats à gauche et à droite.

Définition 5.3.1. *On pose* $\mathcal{F}^*_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}^*_{k,r}$.

On vérifie que $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$ est un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ défini localement par les algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$:

$$\mathcal{F}^*_{\infty,r}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\infty,r}(\pi(V)) & \text{si } \; V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si } \; V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Les $\mathcal{F}_{\infty,r}$-modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour tout $k \geq r$, on rappelle que

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k$$

C'est un $\mathcal{F}_{k,r}$-module cohérent. On note g_k le morphisme de transition $\mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ et $i_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \to \mathcal{F}_{k,r}$ le morphisme donné localement par l'inclusion de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On considère le morphisme de transition $g_{k,r} = i_{k,r} \otimes g_k : \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \to \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Il est $\mathcal{F}_{k+1,r}$-linéaire. Pour ces morphismes de transition, on pose

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$$

Proposition 5.3.2. *On a* $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$. *Autrement dit,* $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ *est un* $\mathcal{F}_{\infty,r}$*-module coadmissible.*

Démonstration. L'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est naturellement un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U)$-module via la composition des morphismes d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Ainsi, $\mathcal{F}_{k,r}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-module. On dispose de l'isomorphisme suivant de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-modules :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} &= \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \mathcal{F}_{k+1,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \end{aligned}$$

La structure de $\mathcal{F}_{k,r}$-modules prolonge celle de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}$-modules. Cet isomorphisme est donc un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$-modules. Comme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k = \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}\end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r}$-modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules, c'est aussi un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$-modules. On obtient donc l'isomorphisme souhaité de $\mathcal{F}_{k,r}$-modules :

$$\mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$$

□

On note $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ comme faisceau sur le schéma formel $\mathfrak{X}$. Puisque $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est un $\mathcal{F}_{k,r}$-module cohérent, il s'agit d'un fermé de $\mathfrak{X}$. Soit $y \in \mathfrak{X}$, l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$ induit un isomorphisme

$$(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_y \simeq (\mathcal{F}_{k,r})_y \otimes_{(\mathcal{F}_{k+1,r})_y} (\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r})_y$$

En particulier, $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \subset \operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$. On note $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ en tant que faisceau sur le schéma $\mathfrak{X}$.

Lemme 5.3.3. *Le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ coïncide avec la fermeture de l'union croissante des supports des $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$:*

$$\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \overline{\bigcup_{k \geq r} \operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{X}$. On montre que $(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x \neq 0$ si et seulement si $(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour k suffisamment grand. L'égalité des supports s'obtient ensuite en prenant la fermeture. Il est clair que $(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x \neq 0$ implique $(\mathcal{M}^*_{k,r})_x \neq 0$ pour k suffisamment grand. Comme $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un module coadmissible, on a $\mathcal{M}^*_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k+1,r} \otimes_{\mathcal{F}_{\infty,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$. Il en découle que

$$(\mathcal{M}^*_{k,r})_x \simeq (\mathcal{F}_{k+1,r})_x \otimes_{(\mathcal{F}_{\infty,r})_x} (\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x$$

On en déduit que $(\mathcal{M}^*_{k,r})_x = 0$ implique $(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x = 0$. On a donc démontré l'équivalence souhaitée. □

Exemple 5.3.4. On suppose que la courbe formelle $\mathfrak{X}$ est affine munie d'une coordonnée locale. Soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$. C'est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors P n'est jamais inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(\mathfrak{X})$ d'après le théorème 4.2.8. Ceci implique que P n'est pas inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$ pour k suffisamment grand. Ainsi, $\operatorname{Supp} \mathcal{F}_{k,r}/P = \mathfrak{X}$ pour k assez grand. On en déduit que $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$.

   Prenons par exemple $P = \prod_{n\geq 1}(1 - a_n \cdot \omega^n \cdot \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X})$ de norme un. Alors P s'écrit

   $$P = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \omega^{n(n+1)/2} \cdot \partial^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \omega^{n((n+1)/2-k)} \cdot (\omega^k \partial)^n$$

   avec $\beta_n = \varepsilon_n \cdot a_1 \dots a_n + \alpha_n$ où $\varepsilon_n \in \mathcal{V}^\times$ et $|\alpha_n| < 1$. On a donc $|\beta_n| = 1$. On observe que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k$. De plus, pour que P soit inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$, on doit avoir (proposition 4.1.27) :

   $$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad |\omega|^{n((n+1)/2-k)} \cdot p^{(k-r)(k-n)} < |\omega|^{k((k+1)/2-k)}$$

   Cette condition se réécrit

   $$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad \frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + r(n-k) < 0$$

   Pour $n = 0$, on obtient $\frac{k(k+1)}{2} - rk < 0$. Ce n'est possible que pour $\frac{k+1}{2} < r$. Ainsi, dès que k est supérieur ou égale à $2r - 1$, P n'est jamais inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$ et $\operatorname{Supp} \mathcal{F}_{k,r}/P = \mathfrak{X}$.

2. On suppose maintenant que $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d. Pour k suffisamment grand, disons $k \geq k_0$, $\overline{N}_k(P) = d$. Pour r assez grand, disons $r \geq r_0$, et pour $k \geq k_0' = \max\{k_0, r_0\}$, P vérifie la condition 3 de la proposition 4.1.27 :

   $$\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| \cdot p^{r(d-n)} < |a_d|$$

   Ainsi, pour tout entier $k \geq k_0'$ et pour tout entier $r \geq r_0$, P est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$ au voisinage de x si et seulement si son coefficient dominant a_d est inversible au voisinage de x (proposition 4.1.27). Dans ce cas, $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = V(a_d)$. On en déduit que $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout entier $r \geq r_0$.

   Pour les autres valeurs de r, P n'est jamais inversible. Donc $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathfrak{X}$ pour tout k dès que $r < r_0$ en prenant r_0 minimal. Ainsi, $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour $r < r_0$.

Le $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-module $\mathcal{M}^*_r$

On considère toujours un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour tous les entiers $k \geq r \geq 1$, les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$, $\mathcal{F}^*_{k+1,r} \to \mathcal{F}^*_{k,r}$ et $\mathcal{M}_{k+1} \to \mathcal{M}_k$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{M}^*_{k+1,r} \to \mathcal{M}^*_{k,r}$. En effet, ces morphismes induisent des morphismes de transition $\pi^{-1}(\mathcal{M}_{k+1}) \to \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$ et $\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}) \to \pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$. On rappelle que

$$\mathcal{M}^*_{k,r} := \mathcal{F}^*_{k,r} \otimes_{\pi^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})} \pi^{-1}(\mathcal{M}_k)$$

Le morphisme $\mathcal{M}^*_{k+1,r} \to \mathcal{M}^*_{k,r}$ est alors induit par les trois morphismes de transition explicités ci-dessus.

On définit maintenant un $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-module $\mathcal{M}^*_r$ à partir de $\mathcal{M}$ en prenant la limite projective sur k des $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents $\mathcal{M}^*_{k,r}$. Ce module va être coadmissible.

Définition 5.3.5. *On pose* $\mathcal{M}^*_r = \varprojlim_{k\geq r} \mathcal{M}^*_{k,r}$.

Le $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est caractérisé localement sur les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$ par

$$\mathcal{M}^*_r(V) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}(\pi(V)) & \text{si } \; V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}(\pi(V)) & \text{si } \; V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Comme $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$-module coadmissible et comme $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible, $\mathcal{M}^*_r$ est un $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-module coadmissible.

Remarque 5.3.6. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. S'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $\mathcal{M}^*_r = \mathcal{N}^*_r$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. En effet, pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$ interceptant la section nulle, on a par hypothèse $\mathcal{M}^*_r(\pi(V)) = \mathcal{M}(\pi(V)) = \mathcal{N}^*_r(\pi(V)) = \mathcal{N}(\pi(V))$. Puisque les ouverts $\pi(V)$ recouvrent $\mathfrak{X}$, on en déduit bien l'égalité $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ si et seulement $\mathcal{M}^*_r = \mathcal{N}^*_r$.*

On a vu que la suite des supports $(\operatorname{Supp}\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_{k\geq r}$ est croissante. On montre de manière analogue que la suite des supports $(\operatorname{Supp}\mathcal{M}_k)_{k\geq 1}$ est elle aussi croissante. On en déduit que la suite des supports des modules $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est croissante. Soit $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ le support de $\mathcal{M}^*_r$ en tant que faisceau sur le fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$. On démontre exactement comme dans le lemme 5.3.3 le résultat suivant.

Lemme 5.3.7. *Le support de $\mathcal{M}^*_r$ est égal à la fermeture de l'union croissante des supports des modules $\mathcal{M}^*_{k,r}$:*

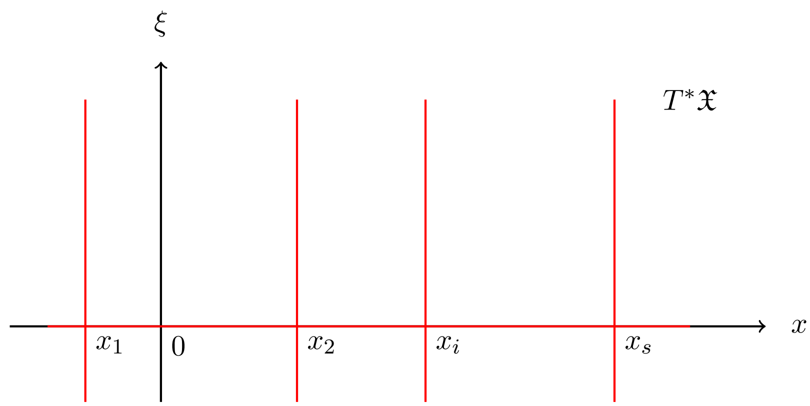
$$\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r = \overline{\bigcup_{k\geq r} \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}} \subset T^*\mathfrak{X}$$

Lorsque $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible non nul, les supports $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ sont des parties fermées coniques de $T^*\mathfrak{X}$. On en déduit que $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ est une aussi une partie fermée conique de $T^*\mathfrak{X}$.

Exemple 5.3.8. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine. On rappelle que T^*X et $T^*\mathfrak{X}$ ont le même espace topologique. On note (t, ξ) les coordonnées locales de $T^*\mathfrak{X}$ associées à la coordonnée étale de $\mathfrak{X} = U$. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On considère le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$.

On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$. Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. Si $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, alors $\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))/P$. Sinon lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\mathcal{M}^*_{k,r}(V) = \mathcal{M}_k(\pi(V)) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\pi(V))/P$.

1. On suppose tout d'abord que $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d. Pour k assez grand, $\overline{N}_k(P) = d$. A partir de ce rang là et pour r suffisamment grand, le support $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ de $\mathcal{M}^*_{k,r}$ coincide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$. En effet, pour r et k assez grand, le support de $\mathcal{M}^*_{k,r}$ est donné par



$\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$

Ici $x_1, \ldots, x_s$ sont les zéros du coefficient dominant a_d de P. Ce support admet la section nulle comme composante irréductible si et seulement si $d > 0$.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X}$. Si $(x, \xi) \in s(\mathfrak{X})$, alors $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P)_x$. Si $d > 0$, alors P n'est jamais inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ au voisinage de x. En effet, pour que P soit inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$, une condition nécessaire est d'avoir $\overline{N}_k(P) = 0$ d'après le corollaire 2.3.3. Mais pour k suffisament grand, $\overline{N}_k(P) = d > 0$. On en déduit que $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P)_x \neq 0$. Autrement dit, le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ contient la section nulle. Les variétés caractéristiques $\operatorname{Car}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P)$ la contiennent aussi. Si $d = 0$, alors $P = a$ est une fonction de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Le support du module $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/a$ est l'ensemble des zéros de a (en dehors de ces zéros, a est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$). Dans ce cas, le support de $\mathcal{M}^*_{k,r}$ coupe la section nulle seulement en les zéros $x_1, \ldots, x_s$ de a. La section nulle n'est donc pas dans le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$. Lorsque

$d = 0$, la section nulle n'est pas non plus une composante irréductible des variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P)$ pour k suffisamment grand.

On suppose maintenant que $(x,\xi) \in T^*\mathfrak{X}\backslash s(\mathfrak{X})$. Alors $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x$. On a déjà vu dans l'exemple 5.3.4 que pour r et k assez grands, $(\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ si et seulement si x est un zéro du coefficient dominant a_d de P. Le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ contient ainsi les droites verticales d'équations $x = x_i$, où $x_1, \ldots, x_s$ sont les zéros de a_d, auxquelles on a retiré les points de la section nulle. Mais ces points de la section nulle sont compris dans le cas traité précédemment.

Les supports $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_{k,r}$ ne dépendent donc plus de k pour k suffisamment grand et $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_{k,r} = \mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ en tant qu'espace topologique. On en déduit que pour r suffisamment grand, le support du module $\mathcal{M}^*_r$ est donné par l'ensemble des points $(x,\xi) \in T^*\mathfrak{X}$ vérifiant $a_d(x) \cdot \xi^d = 0$.

2. On traite maintenant le cas d'un opérateur différentiel infini P. Pour $(x,\xi) \in s(\mathfrak{X})$, on a $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P)_x$. La suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante et diverge vers $+\infty$. Pour k suffisamment grand, P n'est donc pas inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Autrement dit, $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P)_x \neq 0$. Ainsi le support du module $\mathcal{M}^*_{k,r}$ contient la section nulle pour k assez grand. Enfin, pour tout point $(x,\xi) \in T^*\mathfrak{X}\backslash s(\mathfrak{X})$ et pour k suffisamment grand, $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ d'après l'exemple 5.3.4. On en déduit que $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_{k,r} = T^*\mathfrak{X}$ pour k suffisamment grand. Donc si P est infini, alors $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_r = T^*\mathfrak{X}$ quelque soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible et r un entier supérieur ou égale à un. Si $\dim(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_r) = 1$, alors $\mathcal{M} \neq 0$. Dans ce cas $\mathcal{M}_k \neq 0$ pour k assez grand. On a donc $\dim(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_{k,r}) = 1$ pour k suffisamment grand d'après le corollaire 5.1.6 car $\dim(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_{k,r}) \leq \dim(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_r) = 1$. On en déduit que les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{M}_k$ sont holonomes pour k assez grand. En effet, d'après la proposition 5.1.4, $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}_k \subset \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_{k,r}$ et donc $\dim(\mathrm{Car}\,\mathcal{M}_k) \leq 1$.

La réciproque est néanmoins fausse. Les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{M}_k$ peuvent être tous holonomes pour tout niveau de congruence k, ie $\dim(\mathrm{Car}\,\mathcal{M}_k) \leq 1$, tout en ayant $\dim(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_r) = 2$. C'est le cas par exemple pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ dès que P est un opérateur infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet, on a vu dans l'exemple 5.3.8 que $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_r = T^*\mathfrak{X}$. Cependant, d'après la proposition 2.4.8, le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ est holonome pour tout niveau de congruence k.

On déduit du corollaire 5.1.6 l'inégalité de Bernstein pour le support du $\mathcal{F}_{\infty,r}$-module coadmissible $\mathcal{M}^*_r$. On rappelle que son support vérifie l'égalité suivante

$$\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r = \overline{\bigcup_{k\geq r}\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}}$$

Proposition 5.3.9 (inégalité de Bernstein)**.** *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$*-module coadmissible. Alors* $\mathcal{M}$ *est non nul si et seulement si* $\dim(\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r)\geq 1$*.*

Le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$ est noethérien. Ainsi, les supports des $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents $\mathcal{M}^*_{k,r}$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On déduit le résultat suivant de la proposition 5.1.7.

Proposition 5.3.10. *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$*-module coadmissible non nul. Si* $\dim(\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r) = 2$*, alors* $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r = T^*\mathfrak{X}$*. Sinon* $\dim(\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r) = 1$ *et* $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r = \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ *pour* k *suffisamment grand. En particulier, les composantes irréductibles du support* $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ *sont toutes de dimension un.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible non nul. Si la dimension du support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ est deux, alors $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r = T^*\mathfrak{X}$ puisque le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ est irréductible. On suppose maintenant que $\dim(\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r) = 1$. On a alors vu que $\dim(\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}) = 1$ pour k suffisamment grand. On ne considère maintenant que ces niveaux de congruences k. Le support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Elles sont toutes de dimension un. En effet, si une composante irréductible de $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ est réduite à un point point, alors ce point appartient à l'un des supports $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ pour k suffisamment grand. Mais les composantes irréductibles des supports $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ sont toutes de dimension un d'après la proposition 5.1.7. Comme $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}\subset\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$, le support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ contient cette composante de dimension un. Ainsi, ce point ne peut être une composante irréductible de $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$.

Les composantes irréductibles des supports $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ et du support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ sont donc toutes de dimension un. Pour une raison de dimension, les composantes irréductibles des $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ sont des composantes irréductibles de $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$. On en déduit que $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r = \operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_{k,r}$ à partir d'un certain rniveau de congruence $k\geq r$. En effet, puisque le support $\operatorname{Supp}\mathcal{M}^*_r$ n'a qu'à nombre fini de composantes irréductibles, les supports sont nécessairement égaux à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand. $\square$

5.4 $\mathcal{F}^*_\infty$-module associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible

Les morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r}\to\mathcal{F}_{\infty,r+1}$ et $\mathrm{id} : \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}\to\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{F}^*_{\infty,r}\to\mathcal{F}^*_{\infty,r+1}$. Comme $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compacte et comme les morphismes de transition $\mathcal{F}^*_{\infty,r}\to\mathcal{F}^*_{\infty,r+1}$ sont localement injectifs, la limite inductive des $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$ définie un faisceau $\mathcal{F}^*_\infty$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Les $\mathcal{F}^*_{\infty,r}$-modules coadmissibles $\mathcal{M}^*_r$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{M}^*_r \to \mathcal{M}^*_{r+1}$ induit par des morphismes de transition $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \to \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ et le morphisme identité $\mathrm{id} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. On associe alors à $\mathcal{M}$ le $\mathcal{F}^*_\infty$-module $\mathcal{M}^*_\infty = \varinjlim_{r\geq 1} \mathcal{M}^*_r$.

Définition 5.4.1. *On définie un faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$ par $\mathcal{F}^*_\infty = \varinjlim_{r\geq 1} \mathcal{F}^*_\infty$.*

Pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$, on vérifie que

$$\mathcal{F}^*_\infty(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_\infty(\pi(V)) & \text{si} \quad V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si} \quad V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Pour tout entier $k \geq r$, on rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \varprojlim_{k\geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$-module coadmissible. Pour $k \geq r+1$, on note $j_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r} \to \mathcal{F}_{k,r+1}$ le morphisme induit localement par les inclusions $\mathcal{F}_{k,r}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r+1}(U)$. Les morphimes

$$j_{k,r} \otimes \mathrm{id} : \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k \to \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} = \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k$$

sont $\mathcal{F}_{k,r}$-linéaires. Ils commutent avec les morphismes de transition. En effet, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \arrow[r, "j_{k,r}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "g_{k,r}"'] & \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \arrow[d, "g_{k,r+1}"] \\
\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \arrow[r, "j_{k+1,r}\otimes\mathrm{id}"'] & \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r+1}
\end{tikzcd}$$

En passant à la limite projective sur $k \geq r+1$, on obtient un morphisme continu $\mathcal{F}_{\infty,r}$-linéaire $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \to \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} &= \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k \\
&\simeq \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k \\
&\simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}
\end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r+1}$-modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r+1}$-modules

$$\mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}$$

On en déduit que $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \subset \operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Donc

$$\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1} \subset \operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$$

On rappelle que $\mathcal{F}_\infty = \varinjlim_{r\geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$. La limite inductive sur r des modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ pour les morphismes $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \to \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ est un préfaisceau de $\mathcal{F}_\infty$-modules.

On considère les morphismes de transition $\mathcal{M}_r^* \to \mathcal{M}_{r+1}^*$ induis par les morphismes j_r : $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \to \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ et $\mathrm{id} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Les inclusions $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1} \subset \operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ permettent d'obtenir des inclusions $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^* \subset \operatorname{Supp} \mathcal{M}_{r+1}^*$.

Définition 5.4.2.

1. *On associe un $\mathcal{F}_\infty^*$-module $\mathcal{M}_\infty^*$ à $\mathcal{M}$ en prenant le faisceautisé du préfaisceau de $\mathcal{F}_\infty^*$-modules $\varinjlim_{r\geq 1} \mathcal{M}_r^*$.*
2. *On définit le support de $\mathcal{M}_\infty^*$ comme l'intersection décroissante des supports des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$-modules coadmissibles $\mathcal{M}_r^*$:*

$$\operatorname{Supp} \mathcal{M}_\infty^* := \bigcap_{r\geq 1} \operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$$

Exemple 5.4.3. On reprend l'exemple 5.3.8 : $\mathfrak{X} = U$ est affine et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour un opérateur $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r \geq 1$ d'après l'exemple 5.3.8. Ainsi, $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_\infty^* = T^*\mathfrak{X}$.
2. Si $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d, alors il existe un rang r_0 tel que $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout $r \geq r_0$ et $\operatorname{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r < r_0$. Pour $r \geq r_0$, ces supports sont l'ensemble des abscisses des composantes irréductibles des variétés caractéristiques $\operatorname{Car}\left(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P\right)$ pour k assez grand. L'exemple 5.3.8 montre que pour r suffisamment grand, le support de $\mathcal{M}_r^*$ coïncide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ pour k suffisamment grand. Ainsi, le support $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_\infty^* = \cap_{r\geq 1} \operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$ redonne les variétés caractéristiques $\operatorname{Car}\left(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P\right)$ pour k suffisamment grand.

5.5 Variété caractéristique

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. On rappelle que la suite des supports $(\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*)_r$ est décroissante. L'object qui nous intéresse est l'intersection de ces supports. C'est une partie fermé du fibré cotangeant $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$. On définit la variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ comme cette intersection. L'inégalité de Bernstein est vérifiée par cette variété caractéristique : $\mathcal{M} \neq 0$ si et seulement si $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Définition 5.5.1. *Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$, on définit la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ par*

$$\operatorname{Car}(\mathcal{M}) := \operatorname{Supp} \mathcal{M}_\infty^* = \bigcap_{r \geq 1} \operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^* \subset T^*\mathfrak{X}$$

Exemple 5.5.2. On continue l'exemple 5.4.3. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine, que $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$.

1. Si $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d, alors pour k suffisamment grand,

$$\operatorname{Car} \mathcal{M} = \Big\{(x,\xi) \in T^*\mathfrak{X} \ : \ a_d(x) \cdot \xi^d = 0\Big\} = \operatorname{Car}(\mathcal{M}_k)$$

2. Si P est un opérateur différentiel infini, alors $\operatorname{Car} \mathcal{M} = T^*\mathfrak{X}$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible non nul. Si $\dim(\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 2$ pour tout $r \geq 1$, alors $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ et donc $\operatorname{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon, $\dim(\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un rang r_0 et $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{M}) \leq 1$. On montre dans la proposition suivante que $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$. Il s'agit de l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules codamissibles : un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est non nul si et seulement si $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Proposition 5.5.3. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible non nul. Il existe un rang $r \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $\operatorname{Car}(\mathcal{M}) = \operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$. Si $\dim(\operatorname{Car}(\mathcal{M})) = 2$, alors $\operatorname{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon, $\dim(\operatorname{Car}(\mathcal{M})) = 1$. On rappelle que pour les niveaux de congruence $k \geq r$ suffisamment grands (dépendant de r), $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^* = \operatorname{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un certain rang r_0. On ne considère maintenant que les rangs r plus grands que r_0. Puisque $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_{r+1}^* \subset \operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$ et comme les composantes irréductibles des supports $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$ sont toutes de dimension un, les composantes irréductibles de $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_{r+1}^*$ sont des composantes irréductibles de $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$.

On suppose que $\dim \left(\bigcap_{r \geq 1} \operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*\right) = 0$. Soit L une composante irréductible de $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_{r_0}^*$. Elle est de dimension un. Si L est une composante irréductible de tous les $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$, alors L est aussi une composante irréductible de $\operatorname{Car}(\mathcal{M}) = \bigcap_{r \geq 1} \operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$. Cela contredit l'hypothèse $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{M}) = 0$. On en déduit que L n'est plus une composante irréductible des $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_r^*$ pour r assez grand. Enfin, comme le support $\operatorname{Supp} \mathcal{M}_{r_0}^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, aucune composante irréductible de $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{r_0}$ n'est une composante irréductible des supports $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_r$ pour un rang r suffisamment grand. Il en découle que $\dim(\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_r) = 0$. Alors $\mathcal{M} = 0$ d'après la proposition 5.3.10. Puisque $\mathcal{M} \neq 0$, on en déduit que $\dim(\operatorname{Car} \mathcal{M}) = 1$ et que les composantes irréductibles de $\operatorname{Car} \mathcal{M}$ sont les composantes irréductibles communes à tous les supports $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_r$.

Les supports des modules $\mathcal{M}^*_r$ et la variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathcal{M})$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On en déduit que $\operatorname{Car}(\mathcal{M}) = \operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_r$ à partir d'un certain rang r. Enfin, on sait toujours d'après la proposition 5.3.10 que $\operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_r = \operatorname{Supp} \mathcal{M}^*_{k,r}$ pour un niveau de congruence k suffisamment grand. $\square$

Chapitre 6

$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes

On regroupe dans ce chapitre les propriétés vérifiées par les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles holonomes. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est appelé holonome si sa variété caractéristique est de dimension inférieure ou égale à un. De manière équivalente, $\mathcal{M}$ est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{|U}$ soit un module à connexion intégrable. Cette caractérisation n'est vraie qu'en dimension un. Un tel module va être faiblement holonome. On démontre enfin que le dual d'un module holonome reste holonome.

6.1 Variété caractéristique

On introduit maintenant la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes. On démontre que cette catégorie est abélienne. Elle contient les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour P un opérateur différentiel fini.

Définition 6.1.1. *Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est dit holonome si* $\dim(\mathrm{Car}(\mathcal{M})) \leq 1$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible holonome. D'après l'inégalité de Bernstein (proposition 5.5.3), ou bien $\mathcal{M} = 0$ et $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \emptyset$, ou bien $\mathcal{M} \neq 0$ et $\dim \mathrm{Car}(\mathcal{M}) = 1$. Par ailleurs, si $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, alors les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$ sont tous holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k. En effet, $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}_k \subset \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_{k,k} \subset \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_k = \mathrm{Car}(\mathcal{M})$ pour k suffisamment grand. Il en découle que $\dim(\mathrm{Car}\,\mathcal{M}_k) \leq 1$.

Exemple 6.1.2. D'après l'exemple 5.5.2, le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ est holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini.

On établit dans la suite de cette section que la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes est abélienne. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. La proposition 6.1.5 assure que $\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$. Il en résulte que le module $\mathcal{N}$ est holonome si et seulement les modules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ le sont.

Cette égalité des supports n'est pas immédiate. En effet, bien que le morphisme de faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{F}_{k,r}$ soit probablement plat à gauche et à droite, il faut se passer du fait qu'une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents reste exacte après tensorisation par $\mathcal{F}_{k,r}$.
On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Par définition, $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L}_k$ sont des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents. La suite exacte précédente induit une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules pour tout niveau de congruence k :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0$$

On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_k$, $\tilde{\mathcal{N}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{N}_k$ et $\tilde{\mathcal{L}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{L}_k$. On dispose alors de la suite exacte suivante de $\mathcal{F}_{k,r}$-modules cohérents

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r} \longrightarrow 0$$

Ainsi, on ne sait pas si la première flèche de la suite exacte de $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents

$$\mathcal{M}^*_{k,r} \longrightarrow \mathcal{N}^*_{k,r} \longrightarrow \mathcal{L}^*_{k,r} \longrightarrow 0$$

est injective. On en déduit seulement que

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{N}^*_{k,r}) \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r}) \cup \mathrm{Supp}(\mathcal{L}^*_{k,r})$$

Ainsi $\mathcal{N}$ est holonome dès que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ le sont. Il reste à démontrer la réciproque. Pour cela, on utilise le fait qu'un module coadmissible $\mathcal{M}$ est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{|U}$ soit un module à connexion intégrable, ie $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \subset \mathfrak{X}$. Cette caractérisation des modules holonomes n'est vraie que lorsque $\mathfrak{X}$ est de dimension un.

On identifie dans la suite le schéma $\mathfrak{X}$ avec la section nulle $s : \mathfrak{X} \to T^*\mathfrak{X}$ du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$.

Définition 6.1.3. *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$*-module coadmissible. On dit que* $\mathcal{M}$ *est un module à connexion intégrable si* $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$.

On démontrera dans la section suivante que tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module à connexion est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini. La proposition suivante fait le lien entre les modules à connexion intégrable et les modules holonomes.

Proposition 6.1.4. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Alors $\mathcal{M}$ est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{|U}$ soit un module à connexion intégrable.*

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $\mathcal{M}$ est holonome. La variété caractéristique de $\mathcal{M}$ a un nombre fini de composantes irréductibles verticales. On note U l'ouvert de $\mathfrak{X}$ obtenu en ôtant à $\mathfrak{X}$ les abscisses des composantes verticales de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$. Par construction de U, on a $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \subset U$. Autrement dit, $\mathcal{M}_{|U}$ est un module à connexion par définition.

Réciproquement, soit U un ouvert non vide de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{|U}$ soit un module à connexion. Par définition, $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \subset U$. Si $\mathcal{M}$ n'est pas holonome, alors $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$ d'après la proposition 5.5.3. On aurait alors $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) = T^*U$. Cela contredit l'hypothèse $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \subset U$. On en déduit que le module $\mathcal{M}$ est holonome. □

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un module à connexion intégrable : $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \subset |\mathfrak{X}| = |X|$. D'après l'inégalité de Bernstein, ou bien $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \emptyset$ et $\mathcal{M} = 0$, ou bien $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. On suppose que me module $\mathcal{M}$ est non nul. Il existe un rang $r \geq 1$ à partir duquel $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_r^* = \mathrm{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. Ainsi, pour tout entier $k \geq r$, $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. Puisque $\mathcal{M}$ est non nul, les modules $\mathcal{M}_k$ sont non nuls pour k suffisamment grand. L'hypothèse $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$ implique donc que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k) = X$ à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand. Autrement dit, il existe un niveau de congruence à partir duquel les modules $\mathcal{M}_k$ sont tous des modules à connexion intégrable. On sait alors d'après le lemme 2.4.9 que le module $\mathcal{M}_k$ est localement de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$, pour P un opérateur différentiel fini unitaire. Cette propriété sert dans la preuve de la proposition 6.1.5.

Proposition 6.1.5. *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles. Alors* $\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$. *En particulier, $\mathcal{N}$ est holonome si et seulement si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ le sont aussi.*

Démonstration. On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Pour $k \geq r$, on rappelle qu'on dispose d'une suite exacte de $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents

$$\mathcal{M}^*_{k,r} \longrightarrow \mathcal{N}^*_{k,r} \longrightarrow \mathcal{L}^*_{k,r} \longrightarrow 0 \tag{6.1}$$

En prenant les supports de ces modules, on obtient l'inclusion

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{N}^*_{k,r}) \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r}) \cup \mathrm{Supp}(\mathcal{L}^*_{k,r}) \tag{6.2}$$

On suppose dans un premier temps que les modules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont tous deux holonomes. D'après la proposition 5.5.3, il existe un rang $r \geq 1$ pour lequel $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}^*_r$, $\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{N}^*_r$ et $\mathrm{Car}(\mathcal{L}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{L}^*_r$. De plus, il existe un niveau de congruence $k_r \geq r$

tel que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_r^* = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_{k,r}^*$ et $\mathrm{Car}(\mathcal{L}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{L}_r^* = \mathrm{Supp}\,\mathcal{L}_{k,r}^*$ pour tout entier $k \geq k_r$. La relation 6.2 montre que pour tout $k \geq k_r$,

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_{k,r}^* \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \mathrm{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*) = \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$$

On en déduit que

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_r^* = \overline{\bigcup_{k\geq r} \mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_{k,r}^*} \subset \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$$

Il en découle que

$$\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = \bigcap_{r\geq 1} \mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_r^* \subset \mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_r^* \subset \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$$

On obtient donc l'inclusion $\mathrm{Car}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$. Autrement dit, $\mathcal{N}$ est holonome dès que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ le sont.

On suppose maintenant que le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{N}$ est holonome. Si $\mathcal{N} = 0$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{L} = 0$ et il n'y a rien à faire. On considère que $\mathcal{N} \neq 0$. On sait d'après la proposition 5.5.3 que $\dim \mathrm{Car}(\mathcal{N}) = 1$ et que $\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_{k,r}^*$ pour k et r suffisamment grands.

Le support $\mathrm{Supp}\,\mathcal{L}_{k,r}^*$ est contenu dans la variété caractéristique $\mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_{k,r}^* = \mathrm{Car}(\mathcal{N})$ toujours d'après la suite exacte 6.1. Puisque ces inclusions sont vérifiées pour tous les niveaux de congruence k suffisamment grands, on a $\mathrm{Supp}(\mathcal{L}_r^*) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{N})$. Il en découle que $\mathrm{Car}(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{L}_r^*) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{N})$. Ainsi, la dimension de la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{L})$ est inférieure ou égales à la dimension de $\mathrm{Car}(\mathcal{N})$. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est holonome car $\dim \mathrm{Car}(\mathcal{N}) = 1$.

On note U l'ouvert de $\mathfrak{X}$ obtenu en retirant les abscisses des composantes verticales de la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{N})$. On sait d'après la proposition 6.1.4 que

$$\mathrm{Car}(\mathcal{N}_{|U}) \subset U$$

On note $\pi : T^*\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ la projection canonique. Soient toujours $r \geq 1$ et $k_r \geq r$ tels que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_r^* = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_{k,r}^*$, $\mathrm{Car}(\mathcal{L}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{L}_r^* = \mathrm{Supp}\,\mathcal{L}_{k,r}^*$ et $\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_r^* = \mathrm{Supp}\,\mathcal{N}_{k,r}^*$ pour tout entier $k \geq k_r$. En vertu de la proposition 5.1.4, on a

$$\mathrm{Car}(\mathcal{L}_{k|U}) \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*) = \mathrm{Car}(\mathcal{L}_{|U}) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{N}_{|U}) \subset U$$

Ainsi, pour tout entier $k \geq k_r$, $\mathcal{L}_{k|U}$ est un module à connexion intégrable. Le lemme 2.4.9 implique que localement, sur un voisinage $V \subset U$ de tout point donné de U, le module $\mathcal{L}_{k|V}$ est de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ pour un certain opérateur P_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$. On a

$$\mathrm{Tor}^0_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{F}_{k,r|V}, \mathcal{L}_{k|V}) \simeq \mathcal{F}_{k,r|V} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{L}_{k|V} = \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V} \simeq \mathcal{F}_{k,r|V}/P_k$$

On rappelle que $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(V)$ et que la norme de $|\cdot|_k$ de $\mathcal{E}_k(V)$ est multiplicative. Ainsi, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est intègre. La multiplication par P dans $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est donc injective. On en déduit que

$$\mathrm{Tor}^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V,k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}_{k,r|V}, \mathcal{L}_{k|V}) = 0$$

En effet, une resolution projective de $\tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V}$ en tant que $\mathcal{F}_{k,r|V}$-module à gauche est donnée par la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k,r|V} \xrightarrow{\times P} \mathcal{F}_{k,r|V} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V} \simeq \mathcal{F}_{k,r|V}/P_k \longrightarrow 0$$

On obtient finalement la suite exacte courte suivante de $\mathcal{F}_{k,r|U}$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r|U} \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{k,r|U} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|U} \longrightarrow 0$$

Il en résulte que la suite de $\mathcal{F}^*_{k,r}$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)} \longrightarrow \mathcal{N}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)} \longrightarrow \mathcal{L}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)} \longrightarrow 0$$

est exacte. Autrement dit, $\mathrm{Car}(\mathcal{N}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)}) = \mathrm{Car}(\mathcal{M}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)})$. Comme $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{M}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)})$, $\mathrm{Car}(\mathcal{L}_{|U}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{L}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)})$ et $\mathrm{Car}(\mathcal{N}_{|U}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{N}^*_{k,r|\pi^{-1}(U)})$ pour tout entier $k \geq k_r$, il en découle que

$$\mathrm{Car}(\mathcal{N}_{|U}) = \mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L}_{|U}) \subset U$$

On en déduit que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_{|U}) \subset U$ et donc $\mathcal{M}$ est holonome d'après la proposition 6.1.4. De plus, l'égalité des variétés caractéristiques sur U implique que les composantes irréductibles verticales de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$ et de $\mathrm{Car}(\mathcal{L})$ sont parmi celles de $\mathrm{Car}(\mathcal{N})$. Comme ces variétés caractéristiques coïncident au niveau de la section nulle, on obtient l'inclusion

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{N})$$

Enfin, puisque $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont holonomes, l'inclusion réciproque est vérifiée. Ainsi, dès que $\mathcal{N}$ est holonome ou dès que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont holonomes, on a

$$\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$$

On a donc démontré que $\mathcal{N}$ est holonome si et seulement si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ le sont aussi. Si $\mathcal{N}$ n'est pas holonome et si $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{L}$ n'est pas holonome, alors la proposition 5.5.3 implique que

$$\mathrm{Car}(\mathcal{N}) = T^*\mathfrak{X} = \mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{Car}(\mathcal{L})$$

Autrement dit, l'égalité des supports tient dans tous les cas possibles ! $\square$

6.2 Propriétés

On rappelle qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible $\mathcal{M}$ est un module à connexion intégrable si $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$. On démontre dans cette section que les modules à connexion sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules libres de rang fini. Enfin, on établit une caractérisation cohomologique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module à connexion. Il a été vu dans la section précédente que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k) \subset X$ pour un niveau de congruence k suffisamment grand. On sait alors, d'après le lemme 2.4.9, que chaque $\mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini. On démontre que les rangs des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules libres $\mathcal{M}_k$ ne dépendent pas de k. On en déduit ensuite que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini.

Lemme 6.2.1. *Soit* $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ *un* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$*-module holonome tel que* $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. *Alors pour* k *suffisamment grand, les* $\mathcal{M}_k$ *sont des* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-modules libres de même rang fini.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un rang pour lequel $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_r^* = \mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. On ne considère maintenant que les niveaux de congruences $k \geq r$ pour lesquels $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k) = X$. Soit x un point de $\mathfrak{X}$. Quitte à étendre les scalaires par une extension finie de K, on peut supposer que x est un point κ-rationnel. D'après le lemme 2.4.9, il existe un voisinage ouvert U_k de x dans $\mathfrak{X}$ et un opérateur différentiel P_k de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_k)$ fini dominant tel que $\mathcal{M}_{k|U} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_k,k,\mathbb{Q}}/P_k$. Si d_k est l'ordre de P_k, alors $\mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang d_k. Il suffit de montrer que le degré d_k ne dépend pas de k. Puisque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible, on a

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_k\cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_k\cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_k\cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_k\cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}/P_k$$

Autrement dit,

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_k\cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_k\cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}/P_k$$

Le corollaire 1.3.14 implique que $\overline{N}_k(P_k) = \overline{N}_k(P_{k+1})$. De plus, on sait par le lemme 3.1.2 que $\overline{N}_{k+1}(P_{k+1}) \geq \overline{N}_k(P_{k+1})$. On en déduit que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ est croissante. Il faut prouver qu'elle est stationnaire.

On suppose par l'absurde que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ diverge vers l'infini. Soit $k \geq r$ un entier tel que $d_k = \overline{N}_k(P_k) > d_{k-1} = \overline{N}_{k-1}(P_k) = \overline{N}_{k-1}(P_{k-1})$. L'hypothèse

$$\mathrm{Supp}\left((\mathcal{M}^*_{k,r})_{|\pi^{-1}(U_k)}\right) = \mathrm{Supp}\left((\mathcal{F}^*_{k,r})_{|\pi^{-1}(U_k)}/P_k\right) \subset \mathrm{Car}\left((\mathcal{M})_{|U_k}\right) = U_k$$

implique que P_k est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U_k)$. Autrement le support du module $(\mathcal{M}^*_{k,r})_{|\pi^{-1}(U_k)}$ contiendrait des composantes irréductibles verticales. On écrit $P_k = \sum_{n=0}^{d_k} a_n \cdot \partial^n$, où $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U_k)$. On rappelle que $P_k \in (\mathcal{F}_{k,r}(U_k))^\times$ si et seulement si $\overline{N}_k(P_k) = \overline{n}_k(P_k) = d_k$ et

$$\forall n \in \{0, \ldots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - n)}$$

Pour $n = d_{k-1}$, on obtient

$$|a_{d_{k-1}}| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - d_{k-1})}$$

La condition $d_{k-1} < d_k$ implique

$$|a_{d_{k-1}}| > |a_{d_k}| \cdot p^{(k-1)(d_k - d_{k-1})}$$

Comme la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ n'est pas bornée, on peut choisir $k > r+1$. Sous cette hypothèse, les deux inégalités précédentes sont incompatibles ! On en déduit par l'absurde que la suite $(d_k)_k$ est stationnaire. $\square$

Ce lemme permet d'obtenir l'équivalence suivante : les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules à connexion intégable sont exactement les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules coadmissibles qui sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules libres de rang fini.

Proposition 6.2.2. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Alors $\mathcal{M}$ est un module à connexion intégrable si et seulement si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini.*

Démonstration. On peut se ramener au cas où $\mathfrak{X}$ est affine muni d'une coordonnée locale. On suppose tout d'abord que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre non nul de rang $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe des sections $e_1, \dots, e_n$ de $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ telles que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \cdot e_n$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module. Les sections $e_1, \dots, e_n$ engendrent aussi $\mathcal{M}$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module : $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_1 + \cdots + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_n$. On en déduit que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_i)$. Il suffit de montrer que $\mathrm{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e_i) \subset \mathfrak{X}$ pour chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut donc se ramener au cas $n = 1$: $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang un engendré par une section e. Puisque $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \cdot e$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module, la famille $\{\partial^n \cdot e\}_{n \in \mathbb{N}}$ est liée sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Il existe donc un opérateur différentiel unitaire $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ tel que $P \cdot e = 0$. En particulier, P appartient à l'idéal annulateur de e et $\mathcal{M}$ est sous-$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$. On en déduit que $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P)$. Comme P est un opérateur fini de coefficient dominant unitaire, on a $\mathrm{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P) = \mathfrak{X}$. Donc $\mathrm{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e) \subset \mathfrak{X}$.

Réciproquement, on suppose que $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un module à connexion non nul. D'après le lemme 6.2.1, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un niveau de congruence $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{M}_k$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang n pour tout niveau de congruence $k \geq k_0$. Alors $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini n d'après le lemme 3.3.8. $\square$

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module à connexion intégrable. On sait par la proposition 6.2.2 que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini $r \in \mathbb{N}$. Pour k assez grand, $\mathcal{M}_k$ est aussi un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de rang r. D'après le lemme 2.4.9 et le corollaire 2.2.6, les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{M}_k$ n'ont qu'une multiplicité non nulle égale à r. On rappelle le résultat suivant de la proposition 3.3.10 : tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module à connexion intégrable $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module de longueur finie inférieure ou égale au rang $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{M})$.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Si $\mathcal{M}$ est holonome, alors les modules $\mathcal{M}_k$ sont holonomes pour k suffisamment grand. En particulier, $\mathcal{M}$ est faiblement holonome d'après la proposition 3.2.4. Son dual $\mathcal{M}^d$ est un module faiblement holonome. On montre maintenant que si $\mathcal{M}$ est holonome, alors son dual $\mathcal{M}^d$ reste holonome.

Proposition 6.2.3. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible. Alors $\mathcal{M}$ est holonome si et seulement si $\mathcal{M}$ est faiblement holonome et si son dual $\mathcal{M}^d$ est holonome.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $\mathcal{M}$ est holonome, alors son dual $\mathcal{M}^d$ l'est aussi. L'équivalence énoncée provient ensuite de l'isomorphisme de bidualité. On suppose donc que $\mathcal{M}$ est un module holonome. D'après la proposition 6.1.4, il existe un ouvert non vide U de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{|U}$ soit un module à connexion. On peut donc supposer que $\mathfrak{X}$ est affine et que $\mathcal{M}$ est un module à connexion de rang n. Toujours d'après la proposition 6.1.4, on peut se ramener à montrer que $\mathcal{M}^d$ est aussi un module à connexion. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Comme $\mathcal{M}$ est un module à connexion, les modules $\mathcal{M}_k$ sont des modules à connexion de rang n pour k suffisamment grand. On sait alors d'après le lemme 2.5.6 que

$$\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$$

est un module à connexion de rang n. Enfin le lemme 3.3.8 implique que

$$\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \right)$$

est un module à connexion de rang n. □

Je conjecture que tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module holonome $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est de longueur finie. Puisque $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \mathrm{Car}(\mathcal{M})$ pour k suffisamment grand, les composantes irréductibles des modules $\mathcal{M}_k$ sont parmi celles de la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$. Les composantes irréductibles des modules $\mathcal{M}_k$ sont donc contenues dans un nombre fini donné de composantes irréductibles. Pour démontrer que $\mathcal{M}$ est de longueur finie, il suffit de montrer que les multiplicités des variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont bornées pour tous les niveaux de congruence k afin d'appliquer la proposition 3.3.6.

Les multiplicités des composantes horizontales des variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont constantes à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand dès que $\mathcal{M}$ est holonome. En effet, d'après les propositions 6.1.4 et 6.2.2, les modules $\mathcal{M}_k$ sont, sur un certain ouvert non vide U de $\mathfrak{X}$, des $\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}$-modules libres de rang $n \in \mathbb{N}$. Le lemme 2.4.9 et le corollaire 2.2.6 impliquent que n est la multiplicité de la composante irréductible verticale des variétés caractéristiques $\mathrm{Car}(\mathcal{M}_k)$. Cette condition devrait probablement imposer que les multiplicités des composantes verticales sont bornées.

Comme le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}_k$ est holonome pour k suffisamment grand, il existe un idéal cohérent non nul $\mathcal{I}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}_k$. Soit x l'abscisse de l'une composante verticale de la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$. Le lemme 2.2.1 permet de ramener le problème à montrer que les multiplicités des modules $\mathcal{M}_k$ au point x sont bornées. D'après le corollaire 2.2.6 et ce qu'il vient d'être dit dans le paragraphe précédent, on a $\overline{N}_k(\mathcal{I}_k) = n$ pour k assez grand. En effet, la multiplicité de la composante irréductible horizontale du module $(\mathcal{M}_k)_x$ coïncide avec l'entier $\overline{N}_k(\mathcal{I}_k)$. On ne considère maintenant que les niveaux de congruences k suffisamment grands tels que $\overline{N}_k(\mathcal{I}_k) = n$. On note m_k la multiplicité de la composante irréductible verticale de $(\mathcal{M}_k)_x$. On sait, toujours d'après le corollaire 2.2.6, que $m_k = N_k(\mathcal{I}_k)$. On aimerait donc démontrer que la suite $(N_k(\mathcal{I}_k))_k$ est bornée.

Cependant, il n'est pas évident de le montrer directement. En effet, il n'y a pas de lien directe entre les fonctions N_k et N_{k+1} d'un opérateur différentiel. Ces dernières dépendent des degrés $\overline{N}_k$ et $\overline{N}_{k+1}$ de l'élément. Plus précisément, soit P un opérateur de $(\mathcal{I}_{k+1})_x$ tel que $d_{k+1} = \overline{N}_{k+1}(P) > d_k = \overline{N}_k(P)$. Si $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$, alors $N_{k+1}(P) = N_{k+1}(a_{d_{k+1}})$ et $N_k(P) = N_k(a_{d_k})$. On rappelle que si $a_{d_{k+1}} = x^\ell$ et $a_{d_k} = x^m$, alors $N_{k+1}(a_{d_{k+1}}) = \ell$ et $N_k(a_{d_k}) = m$. Toutes les valeurs de ℓ et m sont potentiellement possibles. Bien que $\overline{N}_{k+1}(P) \geq \overline{N}_k(P)$, on ne peut néanmoins comparer les entiers $N_k(P)$ et $N_{k+1}(P)$.

Puisque le module $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est coadmissible, on dispose d'un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents

$$\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot \mathcal{I}_{k+1}$$

Le lemme 1.3.20 implique que les idéaux $\mathcal{I}_k$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot \mathcal{I}_{k+1}$ ont le même exposant. Soit P_k un élément de l'idéal $(\mathcal{I}_k)_x$ tel que $\overline{N}_k(P_k) = \overline{N}_k(\mathcal{I}_k) = n$ et de fonction N_k minimale. Puisque $m_k = N_k(\mathcal{I}_k) \leq N_k(P_k)$, il est suffisant de montrer que la suite $(N_k(P_k))_k$ est bornée. Par définition, $\overline{N}_{k+1}(P_{k+1}) = n$. On vérifie aussi que $\overline{N}_k(P_{k+1}) = n$. En effet,

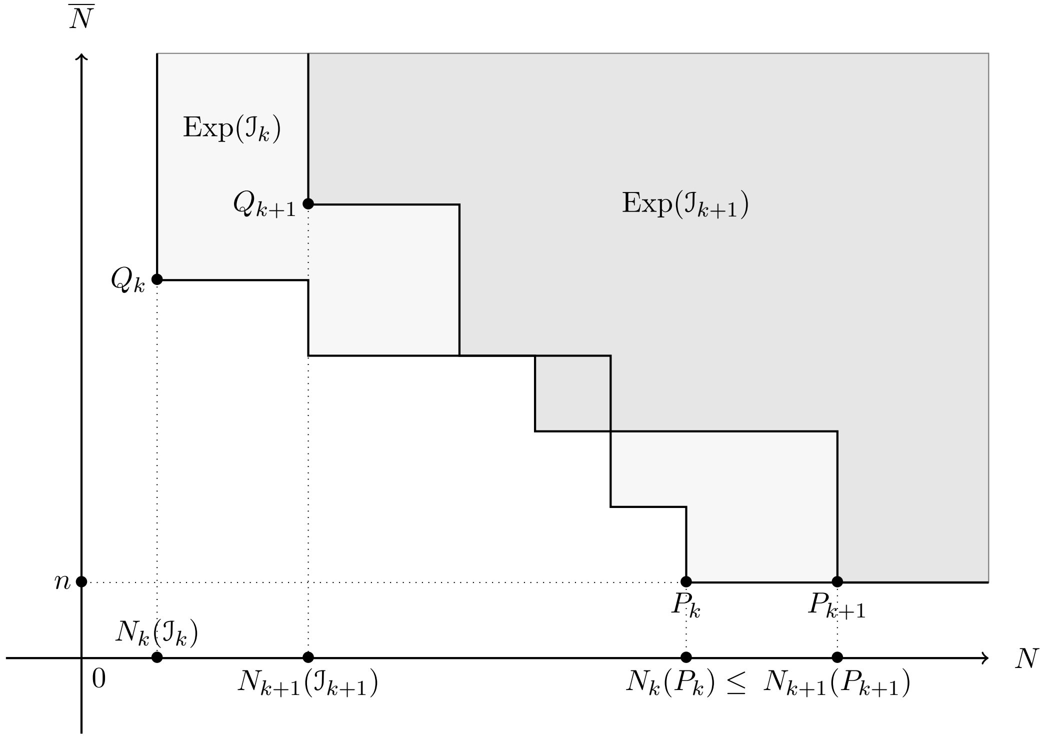
$$\overline{N}_k(P_{k+1}) \leq \overline{N}_{k+1}(P_{k+1}) = n$$

L'égalité $\overline{N}_k(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot \mathcal{I}_{k+1}) = \overline{N}_k(\mathcal{I}_k) = n$ implique que $\overline{N}_k(P_{k+1}) \geq n$. Par ailleurs, comme $\mathrm{Exp}(\mathcal{I}_k) = \mathrm{Exp}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot \mathcal{I}_{k+1})$, on en déduit que $N_k(P_k) \leq N_{k+1}(P_{k+1})$.

Ainsi la suite $(N_k(P_k))_k$ est croissante. Je conjecture qu'elle est stationnaire. Je pense qu'elle ne peut croitre tout en préservant le degré n fixé de ses éléments. Il est à priori plus facile de répondre à cette question que de montrer directement que la suite $(m_k)_k$ des multiplicités est bornée. En effet, on étudie maintenant une suite croissante. De plus, le degré de ses éléments ne dépend pas du niveau de congruence k. Pour $k' \geq k$, on a $N_k(P_{k'}) = N_{k'}(P_{k'}) = n$.

La figure 6.1 résume tout ce qui vient d'être raconté. La conjecture signifie que le point P_k ne peut pas se décaler à l'infini vers la droite lorsque $k \to \infty$ tout en ayant n pour ordonnée.

FIGURE 6.1 – Exposants des idéaux $\mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}_{k+1}$



Annexe A

Variété caractéristique

Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse de dimension r de type fini dont l'idéal de définition est engendré par l'uniformisante ϖ. On note $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ le faisceau des opérateurs différentiels pour un niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$. Soit U un ouvert affine sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_r)$. On note $(\partial_1, \dots, \partial_r)$ les dérivations associées. Les puissances $\varpi^{k|n|} \cdot \partial^n$ pour $n \in \mathbb{N}^r$, où $\partial^n = \partial_1^{n_1} \dots \partial_r^{n_r}$ et $|n| = n_1 + \cdots + n_r$, forment une base du faisceau $\mathcal{D}_{U,k}$ en tant que $\mathcal{O}_U$-module :

$$\mathcal{D}^{(0)}_{U,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^r} \mathcal{O}_U \cdot (\varpi^{k|n|} \partial^n)$$

Les dérivations $\varpi^{k|n|} \cdot \partial^n$ définissent des applications $\mathcal{V}$-linéaires

$$\varpi^{k|n|} \cdot \partial^n : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U, \ a \mapsto \varpi^{k|n|} \cdot \partial^n(a)$$

Le faisceau $\mathcal{D}^{(0)}_{U,k}$ est une sous-algèbre de la $\mathcal{V}$-algèbre $(\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U), +, \circ)$. On note $[P, Q] = PQ - QP$ le commutateur usuel de l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathcal{V}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U)$. La loi multiplicative de l'algèbre $\mathcal{D}^{(0)}_{U,k}$ est caractérisée par les crochets suivants. Pour tous $a, b \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et $n, m \in (\mathbb{N}^*)^r$, on a

$$[\varpi^{k|n|}\partial^n, a] = \varpi^{k|n|}\partial^n(a), \quad [\varpi^{k|n|}\partial^n, \varpi^{k|m|}\partial^m] = 0, \quad [a, b] = 0$$

On note $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ le complété ϖ-adique de l'algèbre $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} K$. Localement,

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \ \text{ tels que } \ a_\alpha \cdot \varpi^{-k|\alpha|} \underset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

On dénote par $X = \mathfrak{X} \times \operatorname{Spec} \kappa$ la réduction modulo ϖ du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. On rappelle que $\mathfrak{X}$ et X ont le même espace topologique. On note $\mathcal{D}_{X,k}$ la réduction modulo ϖ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$:

$$\mathcal{D}_{X,k} = \kappa \otimes_{\mathcal{V}} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} = \kappa \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$$

C'est une $\mathcal{O}_X$-algèbre, non commutative pour $k = 0$ mais commutative dès que $k \geq 1$. On note ∂_k^n l'image de $\omega^{k|n|}\partial^n$ dans $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Alors $\mathcal{D}_{U,k}$ est la κ-algèbre engendrée par $\mathcal{O}_U$ et par les dérivations ∂_k^n :

$$\mathcal{D}_{U,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^r} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

Cette annexe rappelle comment Berthelot définit dans [7] la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent.

A.1 Variété caractéristique des $\mathcal{D}_{X,k}$-modules cohérents

On munit le faisceau $\mathcal{D}_{U,k}$ de la filtration donnée par l'ordre des opérateurs différentiels :

$$\mathrm{Fil}^{\ell}(\mathcal{D}_{U,k}) = \sum_{|n| \leq \ell} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

C'est une filtration croissante exhaustive indexée par $\mathbb{N}$. On note σ_ℓ la projection de $\mathrm{Fil}^{\ell}\,\mathcal{D}_{U,k}$ dans $\mathrm{gr}^{\ell}\,\mathcal{D}_{U,k} = \mathrm{Fil}^{\ell}(\mathcal{D}_{U,k})/\,\mathrm{Fil}^{\ell-1}(\mathcal{D}_{U,k})$. Par convention, $\mathrm{Fil}^{-1}(\mathcal{D}_{U,k}) = 0$. Ces applications induisent une structure de κ-algèbre sur $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{U,k}$ définie par

$$\sigma_\ell(P) \cdot \sigma_q(Q) = \sigma_{\ell+q}(PQ)$$

lorsque P est de degré ℓ et Q de degré q. On note $\sigma : \mathcal{D}_{U,k} \to \mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{U,k}$ l'application induite par les σ_ℓ. Soit $\xi_{i,k}$ l'image de $\omega^k\partial_i$ modulo $\mathcal{O}_U = \mathrm{Fil}^0\,\mathcal{D}_{U,k}$. Autrement dit, $\xi_{i,k}$ est l'image de $\omega^k\partial_i$ dans le gradué $\mathrm{gr}^1\,\mathcal{D}_{U,k}$. Le gradué associé $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{U,k}$ est isomorphe à l'anneau de polynomes $\mathcal{O}_U[\xi_{1,k}, \ldots, \xi_{r,k}]$ en tant que κ-algèbre. En particulier, le gradué est commutatif. Cela provient du fait que le degré de tout commutateur $[P, Q]$ est strictement inférieur à la somme des degrés des opérateurs P et Q lorsque P et Q sont tous deux non nuls. Il en découle que le commutateur de $\sigma(P)$ et de $\sigma(Q)$ est nul dans le gradué $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k}(U))$. De plus, si $P = \sum_{n\in\mathbb{N}^r} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n \in \mathcal{D}_{X,k}(U)$ est un opérateur différentiel d'ordre ℓ, alors

$$\sigma(P) = \sum_{|n|=\ell} a_n \cdot \xi_k^n \in \mathrm{gr}^{\ell}\,\mathcal{D}_{U,k} \quad \text{avec} \quad \xi_k^n = \xi_{1,k}^{n_1} \cdots \xi_{m,k}^{n_m}$$

On appelle $\sigma(P)$ le *symbol principal* de P.

On définit globalement une filtration croissante exhaustive sur $\mathcal{D}_{X,k}$ de la manière suivante. Pour tout ouvert V de X, on pose

$$(\mathrm{Fil}^{\ell}\,\mathcal{D}_{X,k})(V) = \{P \in \mathcal{D}_{X,k}(V) : P_{|U} \in \mathrm{Fil}^{\ell}\,\mathcal{D}_{U,k} \ \text{ pour tout ouvert affine U} \subset \text{V}\}$$

Elle vérifie les trois points suivants :

1. $\mathcal{D}_{X,k} = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \operatorname{Fil}^\ell \mathcal{D}_{X,k}$;
2. $\operatorname{Fil}^0 \mathcal{D}_{X,k} = \mathcal{O}_X$;
3. $\forall \ell, n \in \mathbb{N}$, $(\operatorname{Fil}^\ell \mathcal{D}_{X,k})(\operatorname{Fil}^n \mathcal{D}_{X,k}) = \operatorname{Fil}^{\ell+n} \mathcal{D}_{X,k}$.

Soit T^*X le fibré cotangeant de X et $\pi : T^*X \to X$ la projection canonique. On rappelle que si Θ_X est le faisceau cotangeant de X, alors $T^*X = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\Theta_X))$ est le spectre relatif de l'algèbre symétrique de Θ_X. Localement, $\Theta_U = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_U \cdot \partial_i$ en tant que $\mathcal{O}_U$-module. On dispose donc d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_U$-algèbres

$$\operatorname{Sym}(\Theta_U) = \mathcal{O}_U[T_1, \ldots, T_n] \simeq \operatorname{gr} \mathcal{D}_{U,k}$$

Autrement dit, $\operatorname{Sym}(\Theta_X) \simeq \operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}$ en tant que faisceaux de $\mathcal{O}_X$-algèbres. Ainsi, on peut identifier le fibré cotangent T^*X avec le spectre relatif de $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}$: $T^*X = \operatorname{Spec}(\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k})$. On a alors $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X} \simeq \operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}$.

Une filtration $\operatorname{Fil} = (\operatorname{Fil}^\ell(E))_{\ell\in\mathbb{N}}$ d'un $\mathcal{D}_{X,k}$-module quasi-cohérent E est une suite croissante $(\operatorname{Fil}^\ell(E))_\ell$ de sous $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents de E telle que

1. $E = \bigcup_{\ell\geq 0} \operatorname{Fil}^\ell(E)$;
2. $\forall \ell, n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Fil}^\ell(\mathcal{D}_{X,k}) \cdot \operatorname{Fil}^n(E) \subset \operatorname{Fil}^{\ell+n}(E)$.

Définition A.1.1. *Une filtration* Fil *d'un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent E est dite bonne si*

1. *$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Fil}^\ell E$ est cohérent sur $\mathcal{O}_X$;*
2. *$\exists \ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \ell \geq \ell_0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Fil}^n(\mathcal{D}_{X,k}) \cdot \operatorname{Fil}^\ell(E) = \operatorname{Fil}^{\ell+n}(E)$.*

Proposition A.1.2. *Soit E un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. Une filtration de E est bonne si et seulement si le gradué $\operatorname{gr} E$ est cohérent sur $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}$. Soit U un ouvert affine de X pour lequel il existe des sections $e_1, \ldots, e_q$ de $E(U)$ tels que leurs symboles principaux $\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_q)$ engendrent le gradué $\operatorname{gr} E_{|U}$ sur $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k_{|U}}$. Alors les sections $e_1, \ldots, e_q$ engendrent $E_{|U}$ en tant que $\mathcal{D}_{X,k_{|U}}$-module.*

Démonstration. On se donne une bonne filtration locale de E sur un ouvert affine que l'on note encore X. On suppose tout d'abord que le gradué $\operatorname{gr} E$ est cohérent sur $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}$. Soit $\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_q)$ un système de générateurs du gradué $\operatorname{gr} E$, avec $e_1, \ldots, e_q$ des relèvements dans $E(X)$. Le système $\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_q)$ est homogène, de degré $d_1 \leq \cdots \leq d_q$ quitte à permuter les e_i. Les e_i sont de degré d_i.

Soit $x \in \operatorname{Fil}^m(E(X))$ et $\sigma(x)$ son image dans $\operatorname{gr}^m(E(X))$. On a $\sigma(x) = \sum_{i=1}^q a_i \cdot \sigma(e_i)$ pour certains $a_i \in \operatorname{gr}(\mathcal{D}_{X,k}(X))$. En écrivant les a_i comme somme de leurs composantes homogènes, on peut se ramener au cas où a_i est de degré $m - d_i$. Soit α_i un relevé de a_i dans $\mathcal{D}_{X,k}(X)$. On a

$$x - \sum_{i=1}^q \alpha_i e_i \in \operatorname{Fil}^{m-1}(E(X))$$

Une récurrence sur m montre que $x \in \sum_{i=1}^{r} q \operatorname{Fil}^{m-d_i}(\mathcal{D}_{X,k}(X)) \cdot e_i$. Autrement dit,

$$\operatorname{Fil}^m(E) \subset \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Fil}^{m-d_i}(\mathcal{D}_{X,k}\cdot)e_i$$

Alors $\operatorname{Fil}^m(E)$ est cohérent sur $\mathcal{O}_X$ puisque les $\mathcal{O}_X$-modules $\operatorname{Fil}^m(\mathcal{D}_{X,k})$ le sont. De plus, le gradué $\operatorname{gr}^m(E(X))$ contient les éléments de la forme $\sum_{i=1}^{q} a_i \cdot \sigma(e_i)$ pour $a_i \in \operatorname{Fil}^{m-d_i}(\mathcal{D}_{X,k}(X))$. On en déduit pour $m \geq d_q$ que

$$\operatorname{Fil}^m(E) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Fil}^{m-d_i}(\mathcal{D}_{X,k}) \cdot e_i$$

Ainsi pour tout entier $m \geq d_q$, $\operatorname{Fil}^n(\mathcal{D}_{X,k}) \cdot \operatorname{Fil}^m(E) = \operatorname{Fil}^{n+m}(E)$. La filtration du module E est donc une bonne filtration.

On suppose maintenant que la filtration est bonne. Il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et pour tout $n \geq 0$, $(\operatorname{Fil}^n \mathcal{D}_{X,k}) \cdot (\operatorname{Fil}^m E) = \operatorname{Fil}^{n+m}(E)$. Soient $e_1, \ldots, e_q$ des générateurs de $\operatorname{Fil}^{m_0}(E)$ sur $\mathcal{O}_X$. Si $m \geq m_0$ et si $x \in \operatorname{Fil}^m(E(X))$, alors il existe des éléments $a_i \in \operatorname{Fil}^{m-m_0}(\mathcal{D}_{X,k}(X))$ tels que $x = \sum_{i=1}^{q} a_i \cdot e_i$. Quitte à rajouter aux e_i des relèvements des générateurs des gradués $\operatorname{gr}^j \mathcal{D}_{X,k}$ pour tout entier $j \in \{0, \ldots, m_0 - 1\}$, il est clair que les symboles principaux $\sigma(e_i)$ engendrent le gradué $\operatorname{gr} E$ en tant que $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}$-module. $\square$

Remarque A.1.3. *La réciproque est fausse. Des générateurs du module M n'engendrent pas nécessairement le gradué $\operatorname{gr} M$. Par exemple, l'idéal à gauche $\mathcal{I} = \mathcal{D}_X \cdot \partial$ de $\mathcal{D}_X$ est engendré par les opérateurs $\partial^2 + \partial$ et ∂^2 mais $\sigma(\partial^2 + \partial) = \sigma(\partial^2) = \xi^2$ n'engendre pas le gradué $\operatorname{gr} \mathcal{I} = \mathcal{O}_X[\xi] \cdot \xi$.*

Proposition A.1.4. *Tout $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent E admet localement une bonne filtration. De plus si Fil_1 et Fil_2 sont deux bonnes filtrations définies sur un même ouvert V de E, alors il existe un indice $\ell \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Fil}_1^{i-\ell}(E_{|V}) \subset \operatorname{Fil}_2^{i}(E_{|V}) \subset \operatorname{Fil}_1^{i+\ell}(E_{|V})$$

Démonstration. D'après la proposition A.1.2 appliquée à la filtration Fil_1, il existe des sections $e_1, \ldots e_q$ de $E(V)$ telles que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Fil}_1^m(E_{|V}) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Fil}^{m-d_i}(\mathcal{D}_{X,k|V}) \cdot e_i$$

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, q\}$, on peut trouver un entier n_i pour lequel $e_i \in \mathrm{Fil}_2^{n_i}(E(V))$. On en déduit l'inclusion suivante en posant $b = \max_{1 \le i \le s}\{n_i - d_i\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fil}_1^m(E_{|V}) &= \sum_{i=1}^{q} \mathrm{Fil}_1^{m-d_i}(\mathcal{D}_{X,k|V}) \cdot e_i \\
&\subset \sum_{i=1}^{q} \mathrm{Fil}^{m-d_i}(\mathcal{D}_{X,k|V}) \cdot \mathrm{Fil}_2^{n_i}(E_{|V}) \\
&\subset \sum_{i=1}^{q} \mathrm{Fil}_2^{m+n_i-d_i}(E_{|V}) \\
&\subset \mathrm{Fil}_2^{m+b}(E_{|V})
\end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient l'autre inclusion pour un autre indice de décalage c. Alors $a = \max\{b, c\}$ satisfait l'énoncé de la proposition. □

Soit E un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent et U un ouvert affine de X sur lequel $E_{|U}$ admet une bonne filtration. On note $\mathrm{gr}(E_{|U})$ le gradué de E associé. C'est un $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U,k})$-module cohérent. On note $\mathcal{I}(E_{|U})$ l'idéal de $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U,k})$ donné par le radical de l'annihilateur du gradué $\mathrm{gr}(E_{|U})$:

$$\mathcal{I}(E_{|U}) = \sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{Uk})}(\mathrm{gr}(E_{|U}))}$$

On appelle l'idéal $\mathcal{I}(E_{|U})$ *idéal caractéristique* du module $E_{|U}$.

Lemme A.1.5. *L'idéal $\mathcal{I}(E_{|U})$ ne dépend pas du choix de la bonne filtration de $E_{|U}$.*

Démonstration. Par définition de l'idéal $\mathcal{I}(E_{|U})$, on a $\mathrm{Supp}(\mathrm{gr}(E_{|U})) = V(\mathcal{I}(E_{|U}))$. Il suffit donc de montrer que le support $\mathrm{Supp}(\mathrm{gr}(E_{|U}))$ ne dépend pas du choix de la bonne filtration de $E_{|U}$. Ce résultat à été démontré dans le lemme D.3.1 de [11]. □

On peut donc recoller ces idéaux pour obtenir un idéal cohérent $\mathcal{I}(E)$ de $\mathcal{O}_{T^*X}$ appelé *idéal caractéristique* de E. On rappelle que $T^*X = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k})$.

Définition A.1.6. *La variété caractéristique* $\mathrm{Car}\,E$ *de E est le sous-schéma fermé de T^*X défini par l'idéal cohérent $\mathcal{I}(E)$ de $\mathcal{O}_{T^*X}$.*

Lorsque X est quasi-compact, E est engendré sur $\mathcal{D}_{X,k}$ par un $\mathcal{O}_X$-module cohérent E_0. En effet, soit $(U_1, \dots, U_n)$ un recouvrement affine fini de X sur lequel $E_{|U_i}$ est un $\mathcal{D}_{U_i,k}$-module cohérent. Alors $E_{|U_i}$ est engendré par un $\mathcal{O}_{U_i}$-module cohérent L_i, par exemple le $\mathcal{O}_{U_i}$-module engendré par une famille génératrice de $E_{|U_i}$. Classiquement, L_i s'étend en un $\mathcal{O}_X$-module cohérent que l'on note encore L_i tel que $L_i \subset E$. On pose ensuite $E_0 = \sum_{i=1}^n L_i$. C'est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent engendrant E en tant que $\mathcal{D}_{X,k}$-module.

On en déduit que E admet une bonne filtration globale définie pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{Fil}^\ell(E) = \mathrm{Fil}^\ell(\mathcal{D}_{X,k}) \cdot E_0$. On définit alors un $\mathcal{O}_{T^*X}$-module cohérent par

$$\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\mathrm{gr}\,E)$$

La variété caractéristique de E coïncide avec le support du module $\tilde{E}$ dans T^*X :

$$\mathrm{Car}(E) = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}\,\mathrm{gr}(E))$$

On appelle multiplicités de E les multiplicités des composantes irréductibles de $\mathrm{Car}\,E$. On note $I(\mathrm{Car}\,E)$ l'ensemble des composantes irréductibles de la variété caractéristique de E. On définit le cycle caractéristique de E par

$$\mathrm{CC}(E) = \sum_{C \in I(\mathrm{Car}\,E)} m_C \cdot C$$

où m_C est la multiplicité de C. Soit η le point générique de C. Alors $(\mathrm{Car}\,E)_\eta$ est un $(\mathcal{O}_{T^*X})_\eta$-module artinien. Par définition, la multiplicité m_C est la longueur de ce module.

Proposition A.1.7. *Soit* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{D}_{X,k}$-*modules cohérents. Alors* $\mathrm{Car}\,N = \mathrm{Car}\,M \cup \mathrm{Car}\,L$. *De plus, si* C *est une composante irréductible de* $\mathrm{Car}\,N$, *alors* $m_C(N) = m_C(M) + m_C(L)$ *(avec* $m_C(M) = 0$ *ou* $m_C(L) = 0$ *si* C *n'est pas dans* $\mathrm{Car}\,M$ *ou* $\mathrm{Car}\,L$ *respectivement).*

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{X,k}$-modules cohérents. On peut supposer que X est affine et que N admet une bonne filtration globale $\{\mathrm{Fil}^m N\}_{m \in \mathbb{N}}$. On identifie M à un sous-module de N via φ. On peut munir M de la filtration $\mathrm{Fil}^m = M \cap \mathrm{Fil}^m N$. On considère sur L la filtration $\mathrm{Fil}^m L = \psi(\mathrm{Fil}^m N)$. La suite exacte initiale induit alors une suite exacte courte de $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{X,k})$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathrm{gr}(N) \longrightarrow \mathrm{gr}(L) \longrightarrow 0$$

Par hypothèse, le module $\mathrm{gr}(N)$ est cohérent. On en déduit que les modules $\mathrm{gr}(M)$ et $\mathrm{gr}(L)$ sont aussi cohérents. En particulier, les filtrations considérées de M et L sont des bonnes filtrations. Enfin, comme $\mathcal{O}_{T^*X}$ est plat sur $\pi^{-1}(\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k})$, on obtient la suite exacte suivante de $\mathcal{O}_{T^*X}$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\,\mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\,\mathrm{gr}(N) \longrightarrow \mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\,\mathrm{gr}(L) \longrightarrow 0$$

Il en découle que

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\,\mathrm{gr}(N)) = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\,\mathrm{gr}(M)) \cup \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\,\mathrm{gr}(L))$$

Or par définition, ces supports sont les variétés caractéristiques respectivement des modules N, M et L. Ainsi, $\operatorname{Car} N = \operatorname{Car} M \cup \operatorname{Car} L$. Soit maintenant η un point générique d'une composante irréductible C de $\operatorname{Car}(N)$. L'égalité $\operatorname{Car} N = \operatorname{Car} M \cup \operatorname{Car} L$ implique que C est une composante irréductible de $\operatorname{Car} M$ ou de $\operatorname{Car} L$. La suite exacte précédente induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\operatorname{gr}(M))_\eta \longrightarrow (\mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\operatorname{gr}(N)))_\eta \longrightarrow (\mathcal{O}_{T^*X} \otimes \pi^{-1}\operatorname{gr}(L))_\eta \longrightarrow 0$$

Le module du milieu est de longueur finie $m_C(N)$. Les deux autres longueurs sont $m_C(M)$ et $m_C(L)$ respectivement (l'une éventuellement égale à zéro). On en déduit finalement l'égalité $m_C(N) = m_C(M) + m_C(L)$. □

A.2 Variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents

Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ module cohérent. Il admet un modèle entier d'après [6]. Il s'agit d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent $\mathcal{E}^\circ$ sans ω-torsion tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} K$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules. On note $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ω de $\mathcal{E}^\circ$. C'est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. On peut donc définir sa variété caractéristique comme dans la partie précédente.

Soit U un ouvert sur lequel $\bar{\mathcal{E}}$ admet une bonne filtration. On note $\mathcal{I}(\bar{\mathcal{E}}_{|U})$ l'idéal du gradué $\operatorname{gr}\mathcal{D}_{U,k}$ donné par le radical de l'idéal $\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathcal{D}_{U,k}}(\operatorname{gr}\bar{\mathcal{E}}_{|U})$. Il ne dépend pas du choix de la bonne filtration de $\bar{\mathcal{E}}_{|U}$. Le recollement $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ de ces idéaux est l'idéal caractéristique de $\mathcal{E}$. C'est un idéal cohérent du fibré cotangeant $T^*X = \operatorname{Spec}(\operatorname{gr}\mathcal{D}_{X,k})$.

Proposition A.2.1. *L'idéal $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ ne dépend pas du choix du modèle entier $\mathcal{E}^\circ$ de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Le problème étant local pour avoir une bonne filtration, on peut supposer $\mathfrak{X}$ affine. On se donne deux modèles entiers $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de $\mathcal{E}$. Il existe deux entiers a et b tels que $\omega^a\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \omega^b\mathcal{E}_1$. On va commencer par montrer que $\mathcal{E}_1$ et $\omega^b\mathcal{E}_1$ ont même idéal caractéristique. Comme $\mathcal{E}_1$ est sans ω-torsion, on dispose d'un isomorphisme $\mathcal{E}_1 \simeq \omega^b\mathcal{E}_1$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-modules donné par la multiplication par ω^b.

Soit Fil une bonne filtration de $\bar{\mathcal{E}}_1$. Elle induit une filtration sur $\overline{\omega^b\mathcal{E}_1}$ donnée par $\operatorname{Fil}^\ell(\overline{\omega^b\mathcal{E}_1}) = \operatorname{Im}(\operatorname{Fil}^\ell\bar{\mathcal{E}}_1 \to \overline{\omega^b\mathcal{E}_1})$. Par construction, on a un morphisme surjectif de $\operatorname{gr}\mathcal{D}_{X,k}$-modules $\operatorname{gr}(\bar{\mathcal{E}}_1) \twoheadrightarrow \operatorname{gr}(\overline{\omega^b\mathcal{E}_1})$. Puisque $\operatorname{gr}(\bar{\mathcal{E}}_1)$ est cohérent sur $\operatorname{gr}\mathcal{D}_{X,k}$, $\operatorname{gr}(\overline{\omega^b\mathcal{E}_1})$ l'est aussi. Autrement dit, la filtration induite sur $\overline{\omega^b\mathcal{E}_1}$ est encore une bonne filtration. De plus, on en déduit que $\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathcal{D}_{X,k}}\operatorname{gr}(\bar{\mathcal{E}}_1) \subset \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}\mathcal{D}_{X,k}}\operatorname{gr}(\overline{\omega^b\mathcal{E}_1})$. En particulier, l'idéal caractéristique du module $\bar{\mathcal{E}}_1$ est contenu dans celui du module $\overline{\omega^b\mathcal{E}_1}$. En partant d'une bonne filtration de $\overline{\omega^b\mathcal{E}_1}$, on obtient l'autre inclusion. Donc les modules $\mathcal{E}_1$ et $\omega^b\mathcal{E}_1$ ont le même idéal caractéristique.

Comme $\mathcal{D}_{X,k}$ est noetherien (on a supposé X affine), une bonne filtration Fil de $\overline{\omega^b \mathcal{E}_1}$ induit une bonne filtration sur $\bar{\mathcal{E}}_2$ donnée par $\mathrm{Fil}^\ell \bar{\mathcal{E}}_2 = \mathrm{Fil}(\overline{\omega^b \mathcal{E}_1}) \cap \bar{\mathcal{E}}_2$. On a alors $\mathrm{gr}(\bar{\mathcal{E}}_2) \subset \mathrm{gr}(\overline{\omega^b \mathcal{E}_1})$ et donc

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k}}\,\mathrm{gr}(\bar{\mathcal{E}}_2)} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k}}\,\mathrm{gr}(\overline{\omega^b \mathcal{E}_1})} = \sqrt{\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k}}\,\mathrm{gr}(\overline{\mathcal{E}_1})}$$

Par symétrie, l'autre inclusion est aussi vérifiée. Ainsi $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ ne dépend pas du choix du modèle entier. $\square$

Définition A.2.2. *La variété caractéristique* $\mathrm{Car}\,\mathcal{E}$ *d'un* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$*-module cohérent* $\mathcal{E}$ *est la variété caractéristique du* $\mathcal{D}_{X,k}$*-module cohérent* $\bar{\mathcal{E}}$ *pour n'importe quel modèle entier* $\mathcal{E}^\circ$ *de* $\mathcal{E}$*.*

C'est par construction le sous schéma fermé de T^*X donné par l'idéal $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ de $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,k}$. Elle ne dépend pas du choix du modèle entier.

Bibliographie

[1] Tomoyuki Abe. Rings of microdifferential operators for arithmetic $\mathcal{D}$-modules. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 131(1) :89–149, 2014.

[2] Tomoyuki Abe and A Marmora. On p-adic product formula for epsilon factors. *J. Inst. Math. Jussieu*, 14 :275–377, 2015.

[3] Konstantin Ardakov, Andreas Bode, and Simon Wadsley. $\widehat{\mathcal{D}}$-modules on rigid analytic spaces III : Weak holonomicity and operations. *Compositio Mathematica*, 157(12) :2553–2584, 2021.

[4] Konstantin Ardakov and Simon J Wadsley. $\widehat{\mathcal{D}}$-modules on rigid analytic spaces I. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019(747) :221–275, 2019.

[5] Joseph Bernstein and A Beilinson. Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. *CR Acad. Sci. Paris*, 292 :15–18, 1981.

[6] Pierre Berthelot. $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. In *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, volume 29, pages 185–272, 1996.

[7] Pierre Berthelot. Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules. *Astérisque*, 279 :1–80, 2002.

[8] Thomas Bitoun and Andreas Bode. Extending meromorphic connections to coadmissible $\widehat{\mathcal{D}}$-modules. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2021(778) :97–118, 2021.

[9] Jean-Luc Brylinski and Masaki Kashiwara. Démonstration de la conjecture de kazhdan-lusztig sur les modules de verma. *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB*, 291(6) :A373–A376, 1980.

[10] Laurent Garnier. Théorèmes de division sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}$ et applications. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 123(4) :547–589, 1995.

[11] Ryoshi Hotta and Toshiyuki Tanisaki. *$\mathcal{D}$-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236. Springer Science & Business Media, 2007.

[12] Christine Huyghe, Deepam Patel, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. $\mathcal{D}^{\dagger}$-affinity of formal models of flag varieties. *Mathematical Research Letters*, 26(6) :1677–1745, 2019.

[13] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic structures for differential operators on formal schemes. *Nagoya Mathematical Journal*, 243 :157–204, 2021.

[14] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic differential operators with congruence level structures : First results and examples. *Journal of Number Theory*, 237 :332–352, 2022.

[15] Anton Leykin. Algorithmic proofs of two theorems of stafford. *Journal of Symbolic Computation*, 38, 2002.

[16] Philippe Maisonobe. *Germes de $\mathcal{D}$-modules à une variable et leurs solutions, dans Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels p.97-146*, volume Travaux en cours 34. Hermann, 1988.

[17] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum. Algebras of p-adic distributions and admissible representations. *Inventiones mathematicae*, 153(1) :145–196, 2003.

[18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2018.

[19] Anne Virrion. Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 128(1) :1–68, 2000.

[20] Gergely Zábrádi. Generalized Robba rings. *Israel J. Math.*, 191(2) :817–887, 2012. With an appendix by Peter Schneider.