ISOALGEBRAISCHE RÄUME

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) der Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg

vorgelegt von Roland Huber aus Regensburg, 1984

Promotionsgesuch eingereicht am 14.9.1984

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. M. Knebusch

Prüfungsausschuß: Prof. Dr. L. Bröcker

Prof. Dr. W. Hackenbroch

Prof. Dr. M. Knebusch

Prof. Dr. G. Tamme

In der reellen algebraischen Geometrie wird häufig über einem beliebigen reell abgeschlossenen Grundkörper gearbeitet. Deshalb wird seit geraumer Zeit versucht, eine zur klassischen Theorie über $\mathbb{R}$ analoge Theorie über einem beliebigen reell abgeschlossenen Körper R aufzubauen. Die semialgebraische Geometrie, wie sie etwa in [DK] - [DK_3] entwickelt wird, bietet einen mehr als guten Ersatz für die Topologie. Zum Teil lassen sich auch differentialtopologische Methoden über R anwenden ([M]). Die Nashfunktionen sind vielfach ein Ersatz für die reell analytischen Funktionen. In dieser Arbeit soll nun eine zur komplexen Analysis bzw. komplex analytischen Geometrie analoge Theorie über dem Körper $C = R(\sqrt{-1})$ entwickelt werden. Diese Theorie wird hier als isoalgebraische Geometrie bezeichnet. Eine Funktion auf einer offenen Teilmenge des C^n als isoalgebraisch zu bezeichnen, wenn sie lokal in eine Potenzreihe entwickelbar ist, ist sicherlich die falsche Definition, da bei dieser Definition der Identitätssatz auf C^n im allgemeinen nicht gilt. Es wird deshalb die Definition der Nashfunktionen übernommen: eine Funktion auf einer offenen semialgebraischen Teilmenge des C^n heißt isoalgebraisch, wenn sie eine etale Faktorisierung besitzt. Mit dieser Definition kann man die isoalgebraische Geometrie entsprechend der komplex analytischen Geometrie aufbauen, soweit dort keine kohomologischen Methoden verwendet werden, es gelten also z.B. der Weierstraßsche Divisionssatz, der Riemannsche Hebbarkeits-

satz, die globale Komponentenzerlegung, der Remmertsche Projektionssatz. Will man jedoch in der isoalgebraischen Geometrie tieferliegende Sätze beweisen, so stößt man immer wieder auf dasselbe Hindernis: es gibt zu wenig isoalgebraische Funktionen. Zum Beispiel sind die algebraischen Funktionen auf C^n schon alle isoalgebraischen Funktionen auf C^n und die erste Kohomologiegruppe von C^n mit Werten in der Garbe der isoalgebraischen Funktionen auf C^n verschwindet nicht. Entwickelt man also die isoalgebraische Geometrie innerhalb der semialgebraischen Geometrie (isoalgebraische Räume sind semialgebraische Räume und isoalgebraische Funktionen sind semialgebraische Funktionen), so wird man die isoalgebraische Geometrie zu keiner Theorie ausbauen können, die ähnlich gute Eigenschaften besitzt wie die algebraische Geometrie oder die komplex analytische Geometrie. Auch wenn die in dieser Arbeit entwickelte Geometrie nicht weit führt, so hat sie immerhin doch eine Anwendung: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Nach Auswahl eines reell abgeschlossenen Teilkörpers R von K mit $K = R(\sqrt{-1})$ wird die Menge X(K) der K-rationalen Punkte eines Schemas X von endlichem Typ über K zu einem isoalgebraischen Raum über R. Man kann also die isoalgebraische Geometrie dazu verwenden, die klassische algebraische Geometrie über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null besser zu verstehen.
Grundlage für diese Arbeit ist die semialgebraische Geo-

metrie wie sie in [DK] - [DK_2] angegeben ist. Zum Teil werden auch Ergebnisse aus [DK_3] zitiert. Aus rein formalen Gründen wird der Begriff der Überdeckung gegenüber [DK] - [DK_2] leicht modifiziert: Eine Familie $(U_i | i \in I)$ offener semialgebraischer Teilmengen eines semialgebraischen Raumes X heißt Überdeckung einer offenen semialgebraischen Teilmenge U von X, wenn es eine endliche Teilmenge J von I gibt mit $\bigcup_{i\in J} U_i = \bigcup_{i\in I} U_i = U$.

Herrn Prof. Dr. M. Knebusch danke ich für die Themenstellung und für seine Anleitung und Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit. Frau Richter danke ich für das sorgfältige Erstellen des Manuskripts.

§1 - Die Kategorie der isoalgebraischen Räume

1. Definition der isoalgebraischen Räume und Morphismen

Sei C ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R ein echter Teilkörper von C, so daß $C = R(\sqrt{-1})$. (R ist dann ein reell abgeschlossener Körper). Zeichnet man eine Wurzel von -1 aus, so kann man C mit R^2 identifizieren. Auf diese Weise wird C zu einem semialgebraischen Raum über R.

Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über C. Auf der Menge X(C) der C-rationalen Punkte von X gibt es genau eine R-semialgebraische Struktur, so daß gilt: Ist U eine Zariski-offene affine Teilmenge von X und betrachtet man U als abgeschlossenes Unterschema eines $\mathbb{A}^n$, $U \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, so ist U(C) eine offene semialgebraische Teilmenge von X(C) und die Einschränkung der semialgebraischen Struktur von X(C) auf U(C) ist die Teilraumstruktur der semialgebraischen Teilmenge U(C) von R^{2n}, $U(C) \hookrightarrow \mathbb{A}^n(C) = C^n = R^{2n}$.

Im folgenden bezeichne Schema immer ein separiertes Schema von endlichem Typ über C und ein Schemamorphismus sei immer ein Morphismus über C. Die Menge der C-rationalen Punkte eines Schemas sei immer mit der eben beschriebenen R-semialgebraischen Struktur versehen. Ohne Schwierigkeiten beweist man

Proposition 1.1.1.

i) Ist X ein Schema, so ist der semialgebraische Raum X(C) separiert und lokal vollständig (und somit auch affin).

ii) Ist $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen Schemata, so ist $f_C: X(C) \to Y(C)$ eine semialgebraische Abbildung.

iii) Ist
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$
ein kartesisches Diagramm in der Kategorie der Schemata, so ist
$$\begin{tikzcd} Z(C) \arrow[r] \arrow[d] & U(C) \arrow[d] \\ V(C) \arrow[r] & X(C) \end{tikzcd}$$
ein kartesisches Diagramm in der Kategorie der semialgebraischen Räume über R.

iv) Ist $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus zwischen Schemata, so ist $f_C: X(C) \to Y(C)$ eine endliche semialgebraische Abbildung.

v) Ist $f: X \to Y$ ein etaler Morphismus zwischen Schemata, so ist $f_C: X(C) \to Y(C)$ ein lokaler semialgebraischer Isomorphismus.

Ein Morphismus $g: U \to V$ zwischen semialgebraischen Räumen heißt lokaler Isomorphismus, wenn es zu jedem $u \in U$ eine offene semialgebraische Umgebung T gibt, so daß $g(T)$ eine offene semialgebraische Teilmenge von V ist und $g|T: T \to g(T)$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Nach [DK_3] existiert dann eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von U, so daß $g|U_i: U_i \to g(U_i)$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist für jedes $i \in I$. Zum Beweis von 1.1.1.v) beachte man, daß f lokal standardetale Form hat.

Sei X ein Schema. Zu jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von X(C) hat man die Kategorie I_U: Die Objekte von I_U sind alle Tripel (X', U', f), so daß $f: X' \to X$ ein etaler

Morphismus von Schemata ist, U' eine offene semialgebraische Teilmenge von $X'(C)$ ist und $f_C|U' : U' \to U$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Die Morphismen $\mathrm{Mor}((X',U',f),(X",U",g))$ zwischen Objekten von I_U sind die Schematamorphismen $h : X" \to X'$, so daß $f \circ h = g$ und $h(U") \subseteq U'$. Die Kategorie I_U ist filtrierend. Indem man jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von $X(C)$ die C-Algebra $\varinjlim_{I_U} \mathcal{O}_{X'}(X')$ zuordnet, erhält man eine Prägarbe P_X von C-Algebren auf $X(C)$. Die zu P_X assoziierte Garbe P_X^+ (P_X^+ ist schon eine Garbe, da P_X separiert ist) heißt die Garbe der isoalgebraischen Funktionen auf X und wird mit $\mathfrak{A}_X$ bezeichnet. $(X(C),\mathfrak{A}_X)$ ist dann ein C-geringter Raum im Sinne der folgenden Definition

<u>Definition 1.1.2.</u>

i) $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt ein C-geringter Raum, wenn gilt: X ist eine Menge, auf der eine Familie von Teilmengen ausgezeichnet ist. Die Elemente der Familie heißen die offenen Teilmengen von X. $\emptyset$ und X sind offen, der Durchschnitt und die Vereinigung von je zwei offenen Teilmengen ist wieder offen. Die Familie der offenen Teilmengen von X wird durch die Inklusionen als Morphismen zu einer Kategorie. Auf dieser Kategorie ist eine Grothendiecktopologie gegeben. $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe von C-Algebren auf diesem Situs, so daß der Nullschnitt und der Einsschnitt auf jeder nichtleeren offenen Teilmenge von X verschieden sind.

ii) Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ C-geringte Räume. $(\varphi,\psi) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ heißt Morphismus C-geringter Räume, wenn gilt:

$\varphi : X \to Y$ ist eine stetige Abbildung von X nach Y (d.h. $\varphi^{-1}(U)$ ist eine offene Teilmenge von X für jede offene Teilmenge U von Y und $(\varphi^{-1}(U_i) \mid i \in I)$ ist eine Überdeckung von $\varphi^{-1}(U)$, wenn $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung von U ist) und $\psi : \mathcal{O}_Y \to \varphi_* \mathcal{O}_X$ ist ein C-Algebrengarbenmorphismus.

Der C-geringte Raum $(X(C), \mathcal{A}_X)$ heißt der zu dem Schema X gehörige isoalgebraische Raum und wird mit X^h bezeichnet. Die offenen isoalgebraischen Teilräume von X sind die C-geringten Räume der Form $(U, \mathcal{A}_X | U)$, wobei U eine offene semialgebraische Teilmenge von X(C) ist. Die offenen isoalgebraischen Teilräume von Schemata sind die lokalen Modelle für die isoalgebraischen Räume.

Definition 1.1.3.

i) Ein isoalgebraischer Raum (genauer: ein isoalgebraischer Raum über (C,R)) ist ein C-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, für den gilt:

   a) Eine Familie $(U_i \mid i \in I)$ von offenen Teilmengen von X ist genau dann eine Überdeckung einer offenen Teilmenge U von X, wenn eine endliche Teilmenge J von I existiert mit $\bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in I} U_i = U$.

   b) Zu verschiedenen Punkten x,y von X existieren offene Teilmengen U und V von X, so daß $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

   c) Es existiert eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X, so daß jedes $(U_i, \mathcal{O}_X | U_i)$ als C-geringter Raum isomorph ist zu einem offenen isoalgebraischen Teilraum eines Schemas.

ii) Ein Morphismus zwischen isoalgebraischen Räumen ist ein Morphismus in der Kategorie der C-geringten Räume.

Bemerkung:

i) Ist X ein Schema, so bleibt die Bezeichnung $\mathcal{O}_X$ reserviert für die Strukturgarbe auf X. Die Strukturgarbe des isoalgebraischen Raumes X^h wird eben mit $\mathcal{A}_X$ oder manchmal auch mit $\mathcal{O}_{X^h}$ bezeichnet.

ii) Sei X ein Schema. Man hat dann einen kanonischen Morphismus C-geringter Räume $\varphi_X:(X^h,\mathcal{A}_X) \to (X,\mathcal{O}_X)$. Da ein etaler Morphismus zwischen Schemata einen lokalen semialgebraischen Isomorphismus auf den C-rationalen Punkten gibt (Proposition 1.1.1.v)), ist die durch φ_X gegebene Abbildung zwischen den Halmen der Strukturgarben $\varphi^*_{X,y}:\mathcal{O}_{X,\varphi_X(y)} \to \mathcal{A}_{X,y}$ eine Henselisierung von $\mathcal{O}_{X,\varphi_X(y)}$ für jedes $y \in X(C)$. (Zur Konstruktion der Henselisierung eines lokalen Rings siehe [R]).

iii) Ist $(X,\mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum, so ist für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ eine lokale C-Algebra und der kanonische Morphismus $C \to \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ ist ein Isomorphismus (m_x bezeichnet das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$). Somit ist der durch einen isoalgebraischen Morphismus $f:(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ gegebene Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ringhomomorphismus für jedes $x \in X$.

Ist U eine offene Teilmenge von X, $s \in \mathcal{O}_X(U)$ und $x \in U$, so bezeichnet $s(x) \in \mathbb{C}$ das Bild von $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ unter der Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/m_x \cong \mathbb{C}$.

1.1.4. Beispiele isoalgebraischer Morphismen

i) Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen Schemata. Man erhält dann einen isoalgebraischen Morphismus $f^h = (\varphi, \psi) : X^h \to Y^h$ folgendermaßen:

$\varphi = f_{\mathbb{C}} : X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$. Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $Y(\mathbb{C})$ und sei $s \in P_Y(U)$. Man hat also ein $(Y',U',g) \in Ob(I_U)$ und ein $\tilde{s} \in \mathcal{O}_{Y'}(Y')$. Das kartesische Diagramm
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$
liefert $(X', q_{\mathbb{C}}^{-1}(U'), g') \in Ob(I_{\varphi^{-1}(U)})$ und $q^*(\tilde{s}) \in \mathcal{O}_{X'}(X')$. Man ordnet dem Element $s \in P_Y(U)$ das durch $q^*(\tilde{s})$ gegebene Element aus $P_X(\varphi^{-1}(U))$ zu und erhält dadurch einen Prägarbenmorphismus $P_Y \to \varphi_* P_X$, also auch einen Garbenmorphismus $\psi : \mathfrak{A}_Y \to \varphi_* \mathfrak{A}_X$.

Man hat das kommutative Diagramm $\mathbb{C}$-geringter Räume
$$\begin{tikzcd} X^h \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f^h"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^h \arrow[r, "\varphi_Y"] & Y \end{tikzcd}$$
und nach 1.3.8. ist dadurch f^h eindeutig bestimmt. Die Zuordnung $X \mapsto X^h$, $f \mapsto f^h$ ist ein Funktor von der Kategorie der Schemata in die Kategorie der isoalgebraischen Räume (In §12 wird gezeigt, daß dieser Funktor volltreu ist).

ii) Seien $f: X \to Y$ ein etaler Morphismus von Schemata, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(\mathbb{C})$ und V eine offene semialgebraische Teilmenge von $Y(C)$, so daß $f_C|U : U \to V$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Es ist dann $f^h|U : U \to V$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Denn man hat das Inverse $(f^h|U)^{-1} = (\varphi,\psi)$: Es ist $\varphi = (f_C|U)^{-1}$. Seien T eine offene semialgebraische Teilmenge von U und $s \in P_X(T)$, man hat also ein $(X',T',g) \in \mathrm{Ob}(I_T)$ und $\tilde{s} \in \mathcal{O}_{X'}(X')$. Dann ist $(X',T',f\cdot g) \in \mathrm{Ob}(I_{\varphi^{-1}(T)})$ und somit liefert $\tilde{s}$ ein Element s_1 aus $P_Y\ (\varphi^{-1}(T))$. Die Zuordnung $s \mapsto s_1$ gibt einen Garbenmorphismus $\psi : \mathcal{A}_X|U \to \varphi_*(\mathcal{A}_Y|V)$.

Aus dem zweiten Beispiel erhält man

Proposition 1.1.5.

Sei X ein isoalgebraischer Raum und seien $s_1,\dots,s_n \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann gibt es eine Überdeckung $(U_i|i\in I)$ von X, so daß zu jedem $i\in I$ ein Schema Y_i, eine offene semialgebraische Teilmenge V_i von $Y_i(C)$, ein isoalgebraischer Isomorphismus $f_i : (V_i,\mathcal{A}_{Y_i}|V_i) \to (U_i,\mathcal{O}_X|U_i)$ und $s_{ij} \in \mathcal{O}_{Y_i}(Y_i)$ $(j=1,\dots,n)$ existieren mit $f_i^*(s_j|U_i) = s_{ij}|V_i$ für $j = 1,\dots,n$.

Auf einem isoalgebraischen Raum gibt es eine kanonische semialgebraische Struktur. Diese ist in der nachfolgenden Proposition angegeben. Ein isoalgebraischer Raum X sei immer mit dieser semialgebraischen Struktur versehen; betrachtet man nur den semialgebraischen Raum, so wird dies manchmal mit $|X|$ angezeigt.

Proposition 1.1.6.

i) Sei X ein isoalgebraischer Raum über (C,R). Auf X gibt es genau eine R-semialgebraische Struktur, für die gilt: Die offenen Teilmengen von X sind die offenen semialgebraischen Teilmengen. Ist U eine offene Teilmenge von X und $(\varphi,\psi): U \to V$ ein isoalgebraischer Isomorphismus von $(U,\mathcal{O}_X|U)$ auf einen offenen isoalgebraischen Teilraum eines Schemas, so ist φ ein semialgebraischer Isomorphismus.

ii) Ist $(\varphi,\psi): X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, so ist φ eine semialgebraische Abbildung.

iii) Ist X ein isoalgebraischer Raum und $s \in \mathcal{O}_X(X)$, so ist $\bar{s}: X \to C$, $x \mapsto s(x)$ eine semialgebraische Abbildung.

Zum Beweis genügt es, sich folgendes zu überlegen: Sind Y_1,Y_2 zwei Schemata und V_1,V_2 offene semialgebraische Teilmengen von $Y_1(C),Y_2(C)$ und ist $f = (\varphi,\psi) : (V_1,\mathcal{O}_{Y_1}|V_1) \to (V_2,\mathcal{O}_{Y_2}|V_2)$ ein isoalgebraischer Morphismus, so ist $\varphi : V_1 \to V_2$ ein semialgebraischer Morphismus.

Begründung für die letzte Behauptung: OE ist Y_2 ein Unterschema eines $\mathbb{A}^n$. Seien $z_1,\ldots,z_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)$ die Koordinatenfunktionen. Für jedes $x \in V_1$ ist dann $\varphi(x) = (f^*(z_1|V_2)(x),\ldots,f^*(z_n|V_2)(x)) \in C^n$. $x \mapsto f^*(z_i|V_2)(x)$ ist eine semialgebraische Abbildung von V_1 nach C für $i = 1,\ldots,n$.

2. Kohärente Garben auf isoalgebraischen Räumen

Definition 1.2.1.

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein C-geringter Raum und sei F eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X.

i) F heißt von endlichem Typ, wenn es eine Überdeckung $(U_i|i\in I)$ von X gibt, so daß man auf jedem U_i einen surjektiven $(\mathcal{O}_X|U_i)$-Modulgarbenmorphismus $(\mathcal{O}_X|U_i)^{n_i} \to F|U_i$ hat.

ii) F heißt kohärent, wenn F von endlichem Typ ist und wenn für jede offene Teilmenge U von X und jeden $(\mathcal{O}_X|U)$-Modulgarbenmorphismus $(\mathcal{O}_X|U)^n \to F|U$ der Kern von endlichem Typ auf $(U,\mathcal{O}_X|U)$ ist.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, daß eine $\mathcal{O}_X$-Untermodulgarbe einer kohärenten Garbe genau dann kohärent ist, wenn sie von endlichem Typ ist. Entsprechend wie auf geringten topologischen Räumen beweist man (siehe z.B. EGA I*, Ch. O, Prop. 5.3.2)

Proposition 1.2.2.

Sei $0 \to F \to G \to H \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf einem C-geringten Raum $(X,\mathcal{O}_X)$. Sind zwei der Garben kohärent, so auch die dritte.

Korollar 1.2.3.

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein C-geringter Raum.

i) Ist $f: F \to G$ ein Garbenmorphismus kohärenter Garben, so sind $\mathrm{im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{coker}(f)$ kohärente Garben.

ii) Sind F und G kohärente Garben, so sind auch $F \oplus G$, $F \otimes_{\mathcal{O}_X} G$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F,G)$ kohärente Garben.

iii) Sind F und G kohärente Untergarben einer kohärenten Garbe, so sind auch $F+G$ und $F \cap G$ kohärente Garben.

Ist $f: (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus C-geringter Räume so hat man wie üblich den Funktor f^* von der Kategorie der $\mathcal{O}_Y$-Modulgarben auf Y in die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X: Ist F eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y, so ist $f^{-1}F$ eine $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe. $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ liefert per Adjunktion einen Garbenmorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Es ist $f^*F := f^{-1}F \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. Der Funktor f^* ist linksadjungiert zu f_* und ist rechtsexakt.

<u>Proposition 1.2.4.</u>

Ist X ein Schema, so ist $\varphi_X{}^*$ ein exakter Funktor von der Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X in die Kategorie der $\mathcal{A}_X$-Modulgarben auf X^h.

Beweis:

OE ist X affin. Zu einer offenen semialgebraischen Teilmenge U von $X(C)$ sei J_U die volle Unterkategorie von I_U bestehend aus allen Tripeln der Form $(X',U',f) \in \mathrm{Ob}(I_U)$, so daß X' affin ist. J_U ist filtrierend. Ordnet man jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von $X(C)$ die C-Algebra $\varinjlim_{J_U} \mathcal{O}_{X'}(X')$ zu, so erhält man eine Prägarbe B. Der kanonische Prägarbenmorphismus $B \to P_X$ gibt einen Isomorphismus $B^{\#} \to P_X{}^{\#}$ (# bezeichnet den Übergang zur assoziierten Garbe). Sei A die Prägarbe auf X(C) mit $A(U) = \varinjlim_V \mathcal{O}_X(V)$, wobei sich der induktive Limes über alle affinen Zariski-offenen Teilmengen V von X mit $U \subseteq V$ erstreckt (U offene semialgebraische Teilmenge von X(C)). Es ist $A^{\#} = \varphi_X{}^{-1}\mathcal{O}_X$.

Sei nun $F \to G$ ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modulgarbenmorphismus auf X. Dann ist auch $\varphi_X{}^{-1}F \to \varphi_X{}^{-1}G$ injektiv. Da B(U) flach über A(U) ist für jede offene semialgebraische Teilmenge U von X(C), hat man einen injektiven Prägarbenmorphismus $h: \varphi_X{}^{-1}F \otimes'_A B \to \varphi_X{}^{-1}G \otimes'_A B$ ($\otimes'$ bezeichnet das Tensorprodukt in der Kategorie der Prägarben). Es ist dann auch $h^{\#}$ injektiv. Es ist $(\varphi_X{}^{-1}F \otimes'_A B)^{\#} = \varphi_X{}^{-1}F \otimes_{A^{\#}} B^{\#} = \varphi_X{}^{*}F$ und ebenso $(\varphi_X{}^{-1}G \otimes'_A B)^{\#} = \varphi_X{}^{*}G$.

Satz 1.2.5.

Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ eines isoalgebraischen Raumes $(X,\mathcal{O}_X)$ ist kohärent.

Beweis:

Sei $f: \mathcal{O}_X{}^n \to \mathcal{O}_X$ ein $\mathcal{O}_X$-Modulgarbenmorphismus. Zu zeigen ist, daß ker(f) von endlichem Typ ist. Nach Proposition 1.1.5. kann man annehmen: X ist ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas Y und es existieren $h_1,\dots,h_n \in \mathcal{O}_Y(Y)$, so daß $f(e_i) = h_i|X$ für $i = 1,\dots,n$, wobei $e_1,\dots,e_n \in \mathcal{O}_X{}^n(X)$ die Standarderzeugenden der Garbe $\mathcal{O}_X{}^n$ sind. Sei $F: \mathcal{O}_Y{}^n \to \mathcal{O}_Y$

der $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbenmorphismus mit $F(E_i) = h_i$ für $i = 1,\dots,n$, wobei $E_1,\dots,E_n \in \mathcal{O}_Y{}^n(Y)$ die Standarderzeugenden der Garbe $\mathcal{O}_Y{}^n$ sind. OE wird $\ker(F)$ von $b_1,\dots,b_t \in \ker(F)(Y)$ erzeugt. Nach Proposition 1.2.4. wird $\ker(f)$ von $b_1|X,\dots,b_t|X$ erzeugt.

Ist $f : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus C-geringter Räume, wobei $\mathcal{O}_X$ kohärent ist, so ist $f^*(F)$ kohärent für jede kohärente Garbe F auf Y. Also erhält man aus Satz 1.2.5.

<u>Korollar 1.2.6.</u>

i) Ist X ein Schema und F eine kohärente Garbe auf X, so ist $\varphi_X{}^*(F)$ eine kohärente Garbe auf X^h.

ii) Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Raume und F eine kohärente Garbe auf Y, so ist $f^*(F)$ eine kohärente Garbe auf X.

Auf dem isoalgebraischen Raum $(\mathbb{A}^1)^h$ läßt sich leicht eine von Null verschiedene Garbe F konstruieren, so daß $F_x = 0$ für jedes $x \in (\mathbb{A}^1)^h$. Bei kohärenten Garben ist dies nicht möglich.

<u>Satz 1.2.7.</u>

Sei F eine kohärente Garbe von einem isoalgebraischen Raum X, so daß $F_x = 0$ für jedes $x \in X$. Dann ist $F = 0$.

Beweis:

OE hat man eine exakte Sequenz

$\mathcal{O}_X^{\,m} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X^{\,n} \to F \to 0$. f werde durch die Matrix $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ $(m_{ij} \in \mathcal{O}_X(X))$ beschrieben. Nach Proposition 1.1.5. kann man annehmen: X ist ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas Y und es existieren $M_{ij} \in \mathcal{O}_Y(Y)$ mit $m_{ij} = M_{ij}|X$. Sei G der Kokern des durch die Matrix $(M_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ gegebenen $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbenmorphismus $\mathcal{O}_Y^{\,m} \to \mathcal{O}_Y^{\,n}$. Es ist dann $F = (\varphi_Y{*}G)|X$. Da $\mathcal{O}_{X,x}$ treuflach über $\mathcal{O}_{Y,x}$ ist für jedes $x \in X$, ist $G_x = 0$ für jedes $x \in X$. Deshalb existiert eine Zariski-offene Teilmenge V von Y mit $X \subseteq V$ und $G|V = 0$. Also ist $F = 0$.

<u>Korollar 1.2.8.</u>

Sei F eine kohärente Garbe auf einem isoalgebraischen X und sei $s \in F(X)$, so daß $0 = s_x \in F_x$ für jedes $x \in X$. Dann ist $s = 0$.

Beweis:

Sei G die von s erzeugte $\mathcal{O}_X$-Untermodulgarbe von F. G ist kohärent und $G_x = 0$ für jedes $x \in X$. Also ist $G = 0$ und damit auch $s = 0$.

<u>Korollar 1.2.9.</u>

Sei G eine kohärente Untergarbe einer kohärenten Garbe F auf einem isoalgebraischen Raum X. Für jede offene Teilmenge U von X ist $G(U) = \{s \in F(U) \mid s_x \in G_x \text{ für jedes } x \in U\}$.

Beweis:

Sei $s \in F(U)$ gegeben, so daß $s_x \in G_x$ für jedes $x \in U$. Sei (s) die von s erzeugte $(\mathcal{O}_X|U)$-Untermodulgarbe von $F|U$. Es ist $G|U \subseteq G|U + (s)$ und $(G|U)_x = (G|U + (s))_x$ für jedes $x \in X$. Also ist $(G|U + (s)/G|U)_x = 0$ für jedes $x \in X$. Die Garbe $G|U + (s)/G|U$ ist kohärent und somit die Nullgarbe. Daher ist $G|U + (s) = G|U$ und $s \in G(U)$.

<u>Korollar 1.2.10.</u>

Eine Sequenz $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ zwischen kohärenten Garben auf einem isoalgebraischen Raum X ist genau dann exakt, wenn für jedes $x \in X$ die Sequenz $F_x \to G_x \to H_x$ exakt ist.

Beweis:

Es sei $F_x \xrightarrow{f_x} G_x \xrightarrow{g_x} H_x$ exakt für jedes $x \in X$. Es ist dann $(\mathrm{im}(f))_x = \mathrm{im}(f_x) = \ker(g_x) = (\ker(g))_x$ für jedes $x \in X$. Da $\mathrm{im}(f)$ und $\ker(g)$ kohärente Untergarben von G sind, folgt aus Korollar 1.2.9. $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.

3. Isoalgebraische Teilräume

Definition 1.3.1.

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum.

i) Die offenen isoalgebraischen Teilräume von X sind die isoalgebraischen Räume der Form $(U,\mathcal{O}_X|U)$, wobei U eine offene Teilmenge von X ist.

ii) Sei J eine kohärente Idealgarbe von X. Man setze $Y = \{x \in X \mid (\mathcal{O}_X/J)_x \neq 0\}$. Eine Teilmenge U von Y heißt offene Teilmenge von Y, wenn es eine offene Teilmenge V von X gibt, so daß $U = V \cap Y$. Eine Familie $(U_i \mid i \in I)$ von offenen Teilmengen U_i von Y heißt Überdeckung einer offenen Teilmenge U von Y, wenn es eine endliche Teilmenge K von I gibt, so daß $\bigcup_{i\in K} U_i = \bigcup_{i\in I} U_i = U$. Die Inklusion $j : Y \to X$ ist dann eine stetige Abbildung. Der C-geringte Raum $(Y, j^{-1}(\mathcal{O}_X/J))$ heißt der von J definierte isoalgebraische Teilraum von X. $j : (Y,j^{-1}(\mathcal{O}_X/J)) \to (X,\mathcal{O}_X)$ ist in kanonischer Weise ein Morphismus C-geringter Räume. Ein C-geringter Raum $(Z,\mathcal{O}_Z)$ heißt isoalgebraischer Teilraum von X, wenn es eine kohärente Idealgarbe J von X gibt, so daß $(Z,\mathcal{O}_Z)$ der von J definierte isoalgebraische Teilraum ist.

iii) Ein C-geringter Raum $(Z,\mathcal{O}_Z)$ heißt lokal abgeschlossener isoalgebraischer Teilraum von X, wenn er ein isoalgebraischer Teilraum eines offenen isoalgebraischen Teilraums von X ist.

iv) Eine Teilmenge Y von X heißt isoalgebraische Teilmenge von X, wenn es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X gibt, so daß es auf jedem U_i Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(U_i)$ gibt mit $Y \cap U_i = \{x \in U_i \mid f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0\}$.

Sei J eine kohärente Idealgarbe auf einem isoalgebraischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $(Y, j^{-1}(\mathcal{O}_X/J))$ der von J definierte isoalgebraische Teilraum von X. Es ist dann $X \setminus Y$ eine offene Teilmenge von X. Nach Satz 1.2.7. ist $X \setminus Y$ die größte offene Teilmenge U von X, für die $(\mathcal{O}_X/J)|U = 0$. Ist $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung einer offenen Teilmenge U von Y, so existieren eine offene Teilmenge V von X und eine Überdeckung $(V_i \mid i \in I)$ von V, so daß $U = V \cap Y$ und $U_i = V_i \cap Y$ für jedes $i \in I$. Also ist Y mit der "schwächsten Grothendiecktopologie" versehen, so daß $j : Y \to X$ stetig ist. Für jede offene Teilmenge U von X ist der kanonische Morphismus $(\mathcal{O}_X/J)(U) \to j^{-1}(\mathcal{O}_X/J)(U \cap Y)$ ein Isomorphismus.
Daß $(Y, j^{-1}(\mathcal{O}_X/J))$ im kategoriellen Sinn der zur Idealgarbe J gehörige Teilraum in der Kategorie der C-geringten Räume ist, besagt die folgende Proposition.

<u>Proposition 1.3.2.</u>
Sei $j : (Y, j^{-1}(\mathcal{O}_X/J)) \to (X, \mathcal{O}_X)$ der von einer kohärenten Idealgarbe J auf einem isoalgebraischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ definierte isoalgebraische Teilraum. Sei $f = (\varphi, \psi) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus C-geringter Räume. Genau dann gibt es einen Morphismus $g : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, j^{-1}(\mathcal{O}_X/J))$ C-geringter Räume, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

wenn J im Kern von $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Z$ liegt. In diesem Fall gibt es genau ein g, so daß das Diagramm kommutiert.

Beweis:

J liege im Kern von $\psi : \mathcal{O}_X \to \varphi_*\mathcal{O}_Z$. Also hat man einen Garbenmorphismus $\overline{\psi} : \mathcal{O}_X/J \to \varphi_*\mathcal{O}_Z$. $\overline{\psi}$ bildet 1-Schnitt auf 1-Schnitt ab. Da $(\mathcal{O}_X/J)(X \setminus Y) = 0$, ist auch $\varphi_*\mathcal{O}_Z(X \setminus Y) = 0$. Deshalb ist $\varphi(Z) \subseteq Y$. Seien U eine offene Teilmenge von Y und $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung von U. Man wähle eine offene Teilmenge V von X und eine Überdeckung $(V_i \mid i \in I)$ von V, so daß $U = V \cap Y$ und $U_i = V_i \cap Y$ für jedes $i \in I$. Es ist $\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von Z und $(\varphi^{-1}(U_i) \mid i \in I) = (\varphi^{-1}(V_i) \mid i \in I)$ eine Überdeckung von $\varphi^{-1}(U)$. Also hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

wobei τ eine stetige Abbildung ist. Der Garbenmorphismus $\overline{\psi} : \mathcal{O}_X/J \to \varphi_*\mathcal{O}_Z = j_*\tau_*\mathcal{O}_Z$ gibt per Adjunktion einen Garbenmorphismus $\sigma : j^{-1}(\mathcal{O}_X/J) \to \tau_*\mathcal{O}_Z$. Für $g = (\tau, \sigma)$ gibt $j \circ g = f$. g ist eindeutig bestimmt, da $(\mathcal{O}_X/J)(U) \to j^{-1}(\mathcal{O}_X/J)(U \cap Y)$ ein Isomorphismus ist für jede offene Teilmenge U von X.

Daß ein isoalgebraischer Teilraum eines isoalgebraischen Raums ein isoalgebraischer Raum ist, wird sich aus der folgenden Proposition ergeben.

<u>Proposition 1.3.3.</u>
Sei X ein Schema und I eine kohärente Idealgarbe auf X. Sei $i : T \hookrightarrow X$ das durch I gegebene Unterschema von X und sei $j : Y \hookrightarrow X^h$ der durch $\varphi_X^*(I)$ gegebene isoalgebraische Teilraum von X^h. Dann faktorisiert i^h über j

$$\begin{tikzcd} & T^h \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "i^h"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & X^h \end{tikzcd}$$

und g ist ein Isomorphismus.

Beweis:
Für jedes $x \in X(C)$ ist $(\varphi_X^*(I))_x$ das von I_x bezüglich $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{A}_{X,x}$ erzeugte Ideal von $\mathcal{A}_{X,x}$. Also ist $Y = \{x \in X(C) \mid (\varphi_X^*(I))_x \neq \mathcal{A}_{X,x}\}$ $= \{x \in X(C) \mid I_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} = T(C)$. Man hat somit das kommutative Diagramm von Mengen

$$\begin{tikzcd} & T^h \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "i_C"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & X^h \end{tikzcd}$$

id gibt aber auch einen Isomorphismus zwischen den Siten von T^h und Y. Es ist noch zu zeigen

(1) $\varphi_X^*(I)$ liegt im Kern von $\mathcal{A}_X \to (i^h)_*\mathcal{A}_T$

(2) Die induzierte Abbildung $\mathcal{A}_X/\varphi_X^*(I) \to (i^h)_*\mathcal{A}_T$ ist ein Isomorphismus.

Denn aus (1) folgt die Existenz von $g = (\mathrm{id},\sigma)$ und aus (2) folgt, daß σ ein Isomorphismus ist (da $(\mathcal{O}_X/\varphi_X^*(I))(U) \to j^{-1}(\mathcal{O}_X/\varphi_X^*(I))(U \cap Y)$ ein Isomorphismus ist für jede offene Teilmenge U von X^h).

Beweis von (1) und (2):

Das kommutative Diagramm $\mathbb{C}$-geringter Räume

$$\begin{tikzcd} T^h \arrow[r, "i^h"] \arrow[d, "\varphi_T"'] & X^h \arrow[d, "\varphi_X"] \\ T \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

gibt für jedes $x \in T^h$ das kommutative Diagramm in den Halmen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{T,x} & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[l, "(i^h)_x^*"'] \\ \mathcal{O}_{X,x}/I_x = \mathcal{O}_{T,x} \arrow[u, "(\varphi_T)_x^*"] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[l, "i_x^*"'] \arrow[u, "(\varphi_X)_x^*"'] \end{tikzcd}$$

Da $(\varphi_T)_x^*$ und $(\varphi_X)_x^*$ Henselisierungen sind, ist der Kern von $(i^h)_x^*$ das von $I_x = \ker(i_x^*)$ und $(\varphi_X)_x^*$ erzeugte Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$. (Zur Begründung siehe Lemma 3.1. aus §3). Also $\ker(i^h)_x^* = (\varphi_X^*(I))_x$. Damit hat man für jede offene Teilmenge U von X^h: $\ker(\mathcal{O}_X(U) \to (i^h)_*\mathcal{O}_T(U)) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid (i^h)_x^*(f_x) = 0$ für jedes $x \in U \cap T^h\} = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f_x \in (\varphi_X^*(I))_x$ für jedes $x \in U \cap T^h\} = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f_x \in (\varphi_X^*(I))_x$ für jedes $x \in U\} = \varphi_X^*(I)(U)$.

Das erste Gleichheitszeichen gilt nach Korollar 1.2.8., das letzte Gleichheitszeichen gilt nach Korollar 1.2.9.. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathcal{O}_X \to (i^h)_*\mathcal{O}_T$ surjektiv ist. Dies ergibt sich aus Proposition 1.1.1.v) und Proposition 8.1 aus

[SGA 1, I]: Seien Z_o ein Unterschema eines Schemas Z, W_o ein etales Z_o-Schema und $x_o \in W_o$. Es gibt dann eine Zariski-offene Umgebung U von x_o in W_o, ein etales Z-Schema W und einen Z_o-Isomorphismus $U \xrightarrow{\sim} Z_o \times_Z W$.

Korollar 1.3.4.

Sei $(Z,\mathcal{O}_Z)$ ein isoalgebraischer Teilraum eines isoalgebraischen Raumes $(X,\mathcal{O}_X)$. Dann ist $(Z,\mathcal{O}_Z)$ ein isoalgebraischer Raum und die semialgebraische Struktur von $(Z,\mathcal{O}_Z)$ ist die semialgebraische Teilraumstruktur der semialgebraischen Teilmenge Z von $|X|$.

Beweis:

OE wird die $(Z,\mathcal{O}_Z)$ definierende Idealgarbe von $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ erzeugt. Nach Proposition 1.1.5. kann man weiterhin OE annehmen, daß X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas Y ist und daß $g_1,\dots,g_n \in \mathcal{O}_Y(Y)$ existieren mit $f_i = g_i|X$. Es ist dann $(Z,\mathcal{O}_Z)$ ein offener Teilraum des durch $\varphi_Y^*(J)$ definierten isoalgebraischen Teilraums von Y^h, wobei J die von $g_1,\dots,g_n$ erzeugte Idealgarbe von Y ist. Also ist $(Z,\mathcal{O}_Z)$ isomorph zu einem offenen isoalgebraischen Teilraum eines Schemas.

Korollar 1.3.5.

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum. Es gibt dann eine Überdeckung $(U_i|i\in I)$ von X, so daß jedes $(U_i,\mathcal{O}_X|U_i)$ isoalgebraisch isomorph zu einem lokal abgeschlossenen isoalgebraischen Teilraum eines $\mathbb{A}^n$ ist.

Beweis:

Es gibt eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X, so daß jedes $(U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$ isomorph ist zu einem offenen isoalgebraischen Teilraum V_i eines affinen Schemas $X_i \subseteq \mathbb{A}^{n_i}$. Nach Proposition 1.3.3. ist X_i^h ein isoalgebraischer Teilraum von $(\mathbb{A}^{n_i})^h$. Man wähle eine offene Teilmenge W_i von $(\mathbb{A}^{n_i})^h$, so daß $V_i = W_i \cap X_i^h$. V_i ist dann ein isoalgebraischer Teilraum von $(W_i, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n_i}}|W_i)$.

Aus 1.3.4. und 1.3.5. folgt, daß man (entsprechend wie in der komplex analytischen Geometrie) auch die lokal abgeschlossenen isoalgebraischen Teilräume der $\mathbb{A}^n$ als lokale Modelle für die isoalgebraischen Räume hätte wählen können.

Proposition 1.3.6.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum und seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_X(X)$. Es gibt genau einen isoalgebraischen Morphismus $f : X \to (\mathbb{A}^n)^h$, so daß $f^*(z_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$, wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{A}^n$ sind.

Beweis:

Eindeutigkeit von f:

Seien $f, g : X \to (\mathbb{A}^n)^h$ isoalgebraische Morphismen, so daß $f^*(z_i) = a_i = g^*(z_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Für jedes $x \in X$ ist $f(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x)) = g(x)$ und $f_x^* = g_x^* : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ mit $y := f(x) = g(x)$ (denn: Angenommen, es gibt ein $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, y}$ mit $f_x^*(s) \neq g_x^*(s)$. Wähle ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $f_x^*(s) - g_x^*(s) \notin (m_x)^k$, wobei m_x das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Da $(z_1)_y - y_1, \ldots, (z_n)_y - y_n$ $(y = (y_1, \ldots, y_n))$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, y}$

erzeugen und da $C \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,y}/m_y$ (m_y ist das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,y}$), existiert ein Polynom $p \in C[T_1,\ldots,T_n]$, so daß $s = p((z_1)_y - y_1,\ldots,(z_n)_y - y_n) + t$ mit $t \in (m_y)^k$. Es ist dann $f_x^*(s) - g_x^*(s) \in (m_x)^k$. Widerspruch).Nach Korollar 1.2.8. ist $f = g$.

Existenz von f:

Aufgrund der Eindeutigkeit von f kann man annehmen, daß X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas Y ist und daß $b_1,\ldots,b_n \in \mathcal{O}_Y(Y)$ existieren mit $a_i = b_i|X$ für $i = 1,\ldots,n$ (Proposition 1.1.5.). Sei $g: Y \to \mathbb{A}^n$ der Schemamorphismus mit $g^*(z_i) = b_i$ für $i = 1,\ldots,n$. Für $f = g^h|X$ ist dann $f^*(z_i) = a_i$ für $i = 1,\ldots,n$.

Korollar 1.3.7.

Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum, $Y = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema und $h: A = \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ ein C-Algebrenhomomorphismus. Dann gibt es genau einen isoalgebraischen Morphismus $f: X \to Y^h$, so daß für jedes $s \in A$ gilt $f^*(s) = h(s)$.

Beweis:

Sei $A = C[T_1,\ldots,T_n]/J$. Man hat ein kommutatives Diagramm von C-Algebren

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X(X) \\ C[T_1,\ldots,T_n]/J \arrow[ur, "h"] & C[T_1,\ldots,T_n] \arrow[l] \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

Nach Proposition 1.3.6. existiert ein isoalgebraischer Morphismus $g: X \to (\mathbb{A}^n)^h$, so daß für jedes $t \in C[T_1,\ldots,T_n] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)$

gilt $g^*(t) = r(t)$. Für jedes $j \in J$ ist $g^*(j) = 0$. Also liegt $\varphi_{\mathbb{A}^n}{}^*(I)$ im Kern von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n} \to g_*\mathcal{O}_X$, wobei I die durch J gegebene Idealgarbe von $\mathbb{A}^n$ ist. Nach den Propositionen 1.3.2. und 1.3.3. hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] \\ Y^h \arrow[r] & (\mathbb{A}^n)^h \end{tikzcd}$$

Für jedes $s \in A$ ist $f^*(s) = h(s)$. Die Eindeutigkeit von f folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen der Propositionen 1.3.2. und 1.3.6..

Für ein Schema Y ist der Morphismus $\varphi_Y : Y^h \to Y$ durch folgende universelle Eigenschaft gekennzeichnet.

Korollar 1.3.8.

Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Schema. Zu jedem Morphismus $f : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ C-geringter Räume gibt es genau einen isoalgebraischen Morphismus $g : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y^h,\mathcal{O}_Y)$ so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y^h \arrow[r, "\varphi_Y"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Beweis:

Nach Korollar 1.3.7. gibt es höchstens ein g. Nun zur Existenz von g. Für jedes $x \in X$ ist $C \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}/m_x$. Deshalb ist f(x) ein C-rationaler Punkt von Y und $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ist ein lokaler Ringhomomorphismus. OE ist Y affin. Sei g der isoalgebraische

Morphismus $X \to Y^h$, so daß $g^*(\varphi_Y^*(s)) = f^*(s)$ für jedes $s \in \mathcal{O}_Y(Y)$ (Korollar 1.3.7.). Für jedes $s \in \mathcal{O}_Y(Y)$ und $x \in X$ ist $s(f(x)) = f^*(s)(x) = g^*(\varphi_Y^*(s))(x) = \varphi_Y^*(s)(g(x)) = s((\varphi_Y \circ g)(x))$. Also ist $f(x) = (\varphi_Y \circ g)(x)$ für jedes $x \in X$. Für ein $s \in \mathcal{O}_Y(Y)$ ist $t := s|D(s)$ invertierbar auf $D(s)$. Deshalb ist $f^*(s)$ invertierbar auf $f^{-1}(D(s))$, $\varphi_Y^*(s)$ invertierbar auf $\varphi_Y^{-1}(D(s))$ und $g^*(\varphi_Y^*(s))$ invertierbar auf $(\varphi_Y \circ g)^{-1}(D(s))$. Für $l = (a|D(s)) \cdot t^{-n} \in \mathcal{O}_Y(D(s))$ $(a \in \mathcal{O}_Y(Y),\ n \in \mathbb{N}_0)$ gilt $(T := D(s))$:

$$f^*(l) = (f^*(a)|f^{-1}(T)) \cdot (f^*(s)|f^{-1}(T))^{-n} =$$
$$g^*(\varphi_Y^*(a))|f^{-1}(T) \cdot (g^*(\varphi_Y^*(s))|f^{-1}(T))^{-n} =$$
$$g^*(\varphi_Y^*(a)|\varphi_Y^{-1}(T)) \cdot g^*((\varphi_Y^*(s)|\varphi_Y^{-1}(T))^{-n}) =$$
$$g^*(\varphi_Y^*(a|T)) \cdot g^*(\varphi_Y^*(t^{-n})) = (\varphi_Y \circ g)^*((a|T) \cdot t^{-n}) =$$
$$(\varphi_Y \circ g)^*(l).$$

Damit ist gezeigt, daß $\varphi_Y \circ g = f$.

<u>Korollar 1.3.9.</u>

Seien X, Y isoalgebraische Räume und seien $x_o \in X$, $y_o \in Y$ gegeben.

i) Sind $f, g : X \to Y$ isoalgebraische Morphismen, so daß $f(x_o) = g(x_o) = y_o$ und $f_{x_o}^* = g_{x_o}^* : \mathcal{O}_{Y,y_o} \to \mathcal{O}_{X,x_o}$, dann gibt es eine offene Teilmenge U von X, so daß $x_o \in U$ und $f|U = g|U$.

ii) Ist $t : \mathcal{O}_{Y,y_o} \to \mathcal{O}_{X,x_o}$ ein $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus, so gibt es eine offene Teilmenge U von X mit $x_o \in U$ und einen isoalgebraischen Morphismus $f : U \to Y$, so daß $f(x_o) = y_o$ und $f_{x_o}^* = t$.

Beweis:

i) OE ist Y der isoalgebraische Raum zu einem affinen Schema Spec (A). Sei $a_1,\ldots,a_n$ ein Erzeugendensystem der C-Algebra A. Es gibt eine offene Teilmenge U von X, so daß $x_o \in U$ und $f^*(a_i)|U = g^*(a_i)|U$ für $i = 1,\ldots,n$. Nach Korollar 1.3.7. ist $f|U = g|U$.

ii) OE ist Y der isoalgebraische Raum zu einem affinen Schema Spec (A). Es gibt eine offene Teilmenge U von X mit $x_o \in U$ und einen C-Algebrenhomomorphismus $h: A \to \mathcal{O}_X(U)$, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,x_o} & \mathcal{O}_{Y,y_o} \arrow[l, "t"'] \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[u, "p"] & A \arrow[l, "h"] \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

wobei p und q die kanonischen Morphismen sind. Sei f der nach Korollar 1.3.7. durch h gegebene isoalgebraische Morphismus $U \to Y$. Wie im Eindeutigkeitsbeweis der Proposition 1.3.6. zeigt man, daß $f(x_o) = y_o$ und $f^*_{x_o} = t$ (man beachte, daß t ein lokaler Ringhomomorphismus ist).

Korollar 1.3.10.

Seien $(Z,\mathcal{O}_Z)$ ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas X, Y ein Schema und $f: Z \to Y^h$ ein isoalgebraischer Morphismus. Es existieren eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von Z, Schemata X_i, offene semialgebraische Teilmengen V_i von $X_i(C)$, etale Morphismen $p_i : X_i \to X$ und Morphismen $f_i : X_i \to Y$ von

Schemata, so daß für jedes $i \in I$ $p_i^h | V_i : V_i \to U_i$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und das Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
V_i \hookrightarrow X_i^h \arrow[d, "p_i^h | V_i"'] \arrow[dr, "f_i^h"] & \\
U_i \arrow[r, "f | U_i"'] & Y^h
\end{tikzcd}$$

Beweis:

OE ist Y affin, $Y = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[T_1,\ldots,T_n]/J)$. Sei $a_i = f^*(\overline{T}_i)$ für $i = 1,\ldots,n$, wobei $\overline{T}_i$ das Bild von T_i in $\mathbb{C}[T_1,\ldots,T_n]/J$ ist. Es existieren eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von Z, etale Morphismen $p_i : Z_i \to X$, offene semialgebraische Teilmengen V_i von $Z_i(\mathbb{C})$ und $a_{i1},\ldots,a_{in} \in \mathcal{O}_{Z_i}(Z_i)$, so daß für jedes $i \in I$ $p_i^h | V_i : V_i \to U_i$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p_i^h | V_i)^*(a_j | U_i) = a_{ij} | V_i$ für $j = 1,\ldots,n$. Sei $g_i : Z_i \to \mathbb{A}^n$ der durch $a_{i1},\ldots,a_{in} \in \mathcal{O}_{Z_i}(Z_i)$ gegebene Morphismus von Schemata. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage aus Proposition 1.3.6. hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V_i \hookrightarrow Z_i^h \arrow[d, "p_i^h | V_i"'] \arrow[dr, "g_i^h"] & \\
U_i \arrow[r, "f | U_i"'] & Y^h \hookrightarrow (\mathbb{A}^n)^h
\end{tikzcd}$$

Sei $j_1,\ldots,j_m$ ein Erzeugendensystem des Ideals J. Es ist $g_i^*(j_s) | V_i = 0$ für $s = 1,\ldots,m$. Daher existiert eine Zariski-offene Teilmenge X_i von Z_i, so daß $V_i \subseteq X_i$ und $g_i^*(j_s) | X_i = 0$ für $s = 1,\ldots,m$. Man hat einen Morphismus $f_i : X_i \to Y$ von Schemata, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_i^h | V_i"'] & X_i^h \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_i^h"] & Z_i^h \arrow[d, "g_i^h"] \\
U_i \arrow[r, "f | U_i"'] & Y^h \arrow[r, hook] & (\mathbb{A}^n)^h
\end{tikzcd}$$

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume. f heißt lokaler Isomorphismus bei $x \in X$, wenn $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein Isomorphismus ist. f heißt lokaler Isomorphismus, wenn $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein Isomorphismus ist für jedes $x \in X$.

Korollar 1.3.11.

i) Sei $f : X \to Y$ ein isoalgebraischer Morphismus, der ein lokaler Isomorphismus bei $x \in X$ ist. Dann gibt es eine offene Teilmenge U von X, so daß $x \in U$, $f(U)$ eine offene Teilmenge von Y ist und $f|U : U \to f(U)$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist.

ii) Sei $f : X \to Y$ ein lokaler Isomorphismus isoalgebraischer Räume.

   a) Es existiert eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X, so daß $f(U_i)$ eine offene Teilmenge von Y ist und $f|U_i : U_i \to f(U_i)$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist für jedes $i \in I$.

   b) Ist f bijektiv, so ist f ein Isomorphismus.

   c) Ist f endlich, so existiert eine Überdeckung $(V_j | j \in J)$ von Y, so daß für jede nichtleere Zusammenhangskomponente Z eines $f^{-1}(V_j)$ gilt: $f|Z : Z \to V_j$ ist ein isoalgebraischer Isomorphismus.

Beweis:

i) Nach Korollar 1.3.10. kann man OE annehmen, daß ein Morphismus $f_o : X_o \to Y_o$ zwischen Schemata existiert mit $X = X_o^h$, $Y = Y_o^h$, $f = f_o^h$. Da $\mathcal{O}_{Y_o^h, f_o(x)} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to$

$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}^h_{X_o,x}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $\hat{\mathcal{O}}_{Y_o,f_o(x)} = (\mathcal{O}^h_{Y_o,f_o(x)})^\wedge \to (\mathcal{O}^h_{X_o,x})^\wedge = \hat{\mathcal{O}}_{X_o,x}$ ein Isomorphismus. Nach [SGA 1, I, Cor. 4.4] ist f_o etal in x. Es existiert dann eine Zariski-offene Umgebung V von x in X_o, so daß $f_o|V$ etal ist. Die Behauptung folgt nun aus 1.1.1.v) und 1.1.4.ii).

ii) a) Wie unter i) kann man OE annehmen: Es existiert ein etaler Morphismus $f_o : X_o \to Y_o$ von Schemata, so daß $Y = Y_o^h$, X ein offener isoalgebraischer Teilraum von X_o^h und $f = f_o^h|X$. Nach Proposition 1.1.1.v) existiert eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X, so daß $f(U_i)$ eine offene Teilmenge von Y ist und $f|U_i : U_i \to f(U_i)$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Nach 1.1.4.ii) ist $f|U_i : U_i \to f(U_i)$ ein isoalgebraischer Isomorphismus.

c) Man wähle eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X mit der in a) angegebenen Eigenschaft. Nach der Proposition 4.1. aus §4 existiert eine Überdeckung $(V_j | j \in J)$ von Y durch offene zusammenhängende semialgebraische Teilmengen V_j von Y, so daß jede Zusammenhangskomponente Z eines $f^{-1}(V_j)$ in einem U_i enthalten ist. Ist Z nicht leer, so ist $f(Z) = V_j \subseteq f(U_i)$. Es ist $f|Z : Z \to V_j$ ein isoalgebraischer Isomorphismus.

Ein isoalgebraischer Morphismus $f : X \to Y$ heißt Einbettung, wenn f über einen Isomorphismus auf einen isoalgebraischen Teilraum von Y faktorisiert

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"', "\cong"] \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

T ist eindeutig bestimmt, denn T wird durch die Idealgarbe $\ker(\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X)$ definiert. Nach Proposition 1.3.2. ist dann auch g eindeutig bestimmt.

Ist $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion von Schemata, so ist $f^h : X^h \to Y^h$ eine Einbettung (Proposition 1.3.3.).

Korollar 1.3.12.

Sei $f = (\varphi,\psi) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume. f ist genau dann eine Einbettung, wenn gilt

a) φ ist injektiv, $\varphi(X)$ ist das Komplement einer offenen Teilmenge von Y und zu jeder offenen Teilmenge U von X existiert eine offene Teilmenge V von Y mit $\varphi(U) = V \cap \varphi(X)$.

b) Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ surjektiv.

Beweis:

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, der a) und b) erfüllt. Es wird bewiesen, daß f eine Einbettung ist. Da a) erfüllt ist, genügt es folgendes zu zeigen:

(*) Es existieren eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X und eine Familie $(V_i \mid i \in I)$ von offenen Teilmengen von Y, so daß $f|U_i : U_i \to V_i$ eine Einbettung ist für jedes $i \in I$.

Man kann nach Korollar 1.3.10. OE annehmen: Es existiert ein Morphismus von Schemata $f_o : X_o \to Y_o$, so daß X ein offener isoalgebraischer Teilraum von X_o^h ist, $Y = Y_o^h$ und $f = f_o^h|X$.

Da $\mathcal{O}^h_{Y_o,f_o(x)} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}^h_{X_o,x}$ surjektiv ist, erzeugt das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y_o,f_o(x)}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X_o,x}$ (bzgl. $\mathcal{O}_{Y_o,f_o(x)} \to \mathcal{O}_{X_o,x}$). Deshalb ist f_o unverzweigt in jedem $x \in X$. Nach [SGA 1, I, 7.8] hat man dann OE eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "p"] \\ X_o \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f_o"'] & Y_o \end{tikzcd}$$

wobei g eine abgeschlossene Immersion und p etal ist. Da g^h eine Einbettung ist und wegen 1.1.1.v), gilt (*).

Ist F eine kohärente Garbe auf einem isoalgebraischen Raum X, so heißt $\mathrm{supp}(F) = \{x \in F \mid F_x \neq 0\}$ der Träger von F.

Proposition 1.3.13.

Sei F eine kohärente Garbe auf einem isoalgebraischen Raum X. supp(F) ist eine isoalgebraische Teilmenge von X. $X \setminus \mathrm{supp}(F)$ ist die größte offene Teilmenge U von X mit $F|U = 0$.

Beweis:

OE hat man eine exakte Sequenz $\mathcal{O}_X^m \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X^n \to F \to 0$ auf X. f werde durch die Matrix $(M_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ $(M_{ij} \in \mathcal{O}_X(X))$ gegeben. Es ist $\mathrm{supp}(F) = \{x \in X \mid \text{Rang von } (M_{ij}(x))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} < n\}$. Also ist supp(F) eine isoalgebraische Teilmenge von X. Die zweite Behauptung folgt aus Satz 1.2.7..

4. Produkte isoalgebraischer Räume

Proposition 1.4.1.

i) Ist
$$\begin{tikzcd} X\times_T Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"'] & T \end{tikzcd}$$
ein kartesisches Diagramm von Schemata, so ist
$$\begin{tikzcd} (X\times_T Y)^h \arrow[r, "q^h"] \arrow[d, "p^h"'] & Y^h \arrow[d, "f^h"] \\ X^h \arrow[r, "g^h"'] & T^h \end{tikzcd}$$
ein kartesisches Diagramm in der Kategorie der isoalgebraischen Räume.

ii) In der Kategorie der isoalgebraischen Räume (über (C,R)) existiert das Faserprodukt. Das sich aus einem Faserprodukt isoalgebraischer Räume
$$\begin{tikzcd} X\times_T Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$
ergebende Diagramm
$$\begin{tikzcd} |X\times_T Y| \arrow[r] \arrow[d] & |Y| \arrow[d] \\ |X| \arrow[r] & |T| \end{tikzcd}$$
ist kartesisch in der Kategorie der semialgebraischen Räume (über R).

iii) Seien $f: X \to T$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, J eine kohärente Idealgarbe auf T und Y der durch J definierte isoalgebraische Teilraum von T. Sei Z der durch die kohärente Idealgarbe $f^*(J)\mathcal{O}_X := \mathrm{im}(f^*(J) \to \mathcal{O}_X)$ definierte isoalgebraische Teilraum von X. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, hook] & T \end{tikzcd}$$

. Dieses Diagramm ist kartesisch in der Kategorie der C-geringten Räume.

iv) Ist $f : X \to Y$ ein S-Morphismus isoalgebraischer Räume, so ist die Graphenabbildung $X \to X \times_S Y$ von f eine Einbettung.

Beweis:

i) folgt aus Korollar 1.3.7..Aus i) folgt die Existenz des Faserprodukts $X \times_T Y$ in der Kategorie der isoalgebraischen Räume in der folgenden Situation: X, Y, T sind offene isoalgebraische Teilräume von Schemata X_o, Y_o, T_o, $f : X \to T$ und $g : Y \to T$ sind die Einschränkungen von f_o^h und g_o^h auf X und Y, wobei $f_o : X_o \to T_o$ und $g_o : Y_o \to T_o$ Morphismen von Schemata sind. Hieraus und aus Korollar 1.3.10. folgt die allgemeine Existenz des Faserprodukts in der Kategorie der isoalgebraischen Räume. iii) folgt aus Proposition 1.3.2.. Nach Korollar 1.3.12. ist der Schnitt eines isoalgebraischen Morphismus eine Einbettung. Also ist die Graphenabbildung $X \to X \times_S Y$ als Schnitt der Projektion $X \times_S Y \to X$ eine Einbettung.

5. Reduzierte isoalgebraische Räume

Definition 1.5.1.

Ein isoalgebraischer Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt reduziert (bzw. normal, bzw. regulär), wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ reduziert (bzw. normal, bzw. regulär) ist für jedes $x \in X$.

Proposition 1.5.2.

Sei J eine kohärente Idealgarbe auf einem isoalgebraischen Raum $(X,\mathcal{O}_X)$. Ordnet man jeder offenen Teilmenge U von X den $\mathcal{O}_X(U)$-Modul $\{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid$ es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $s^n \in J(U)\}$ zu, so erhält man eine kohärente Idealgarbe. Sie wird mit $\sqrt{J}$ bezeichnet. Für jedes $x \in X$ ist $(\sqrt{J})_x$ das Nilradikal des Ideals J_x im Ring $\mathcal{O}_{X,x}$.

Beweis:

Es ist klar, daß $\sqrt{J}$ eine Garbe ist und daß die Halme von $\sqrt{J}$ die angegebene Form haben. Um zu zeigen, daß $\sqrt{J}$ kohärent ist, kann man nach Proposition 1.1.5. OE annehmen: X ist ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas X_o und es existieren $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)$, so daß J die von $f_1|X,\dots,f_m|X$ erzeugte Idealgarbe ist.

Sei J_o die von $f_1,\dots,f_m$ erzeugte Idealgarbe auf X_o und sei J_1 die Nilradikalgarbe von J_o. Es ist $\varphi_{X_o}^*(J_1)|X \subseteq \sqrt{J}$. Da $\mathcal{O}_{X_o,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$ eine Henselierung von $\mathcal{O}_{X_o,x}$ ist und da $(J_o)_x \cdot \mathcal{O}_{X,x} = J_x$ ist, ist $\sqrt{(J_o)_x} \cdot \mathcal{O}_{X,x} = \sqrt{J_x}$, d.h.

$(\varphi_{X_o}{}^*(J_1))_x = (\sqrt{J})_x$ für jedes $x \in X$. Nach Korollar 1.2.9. ist $\varphi_{X_o}{}^*(J_1)|X = \sqrt{J}$ und $\sqrt{J}$ ist damit kohärent.

Der durch die kohärente Idealgarbe $\sqrt{(0)}$ definierte isoalgebraische Teilraum eines isoalgebraischen Raumes $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt die Reduktion von X und wird mit X_{red} bezeichnet. Es ist $|X| = |X_{red}|$. X_{red} hat wie üblich folgende universelle Eigenschaft

Proposition 1.5.3.

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Dann ist X_{red} ein reduzierter isoalgebraischer Raum und ist $f: Y \to X$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, wobei Y reduziert ist, so gibt es genau einen Morphismus $g: Y \to X_{red}$, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ X_{red} \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

.

Der Beweis ergibt sich aus Proposition 1.3.2. und Korollar 1.2.8..

Die isoalgebraischen Funktionen (d.h. die Elemente aus $\mathcal{O}_X(X)$) auf einem reduzierten isoalgebraischen Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ kann man wirklich als Funktionen auf der Menge X lesen. Der entscheidende Schritt hierzu ist die (nicht schwer zu beweisende) Proposition 1.5.4..

Proposition 1.5.4.

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum. Dann ist $2\cdot\dim\mathcal{O}_{X,x} = \dim_x^{sa}X$ für jedes $x \in X$. Dabei bezeichnet $\dim_x^{sa}X$ die lokale Dimension des semialgebraischen Raums $|X|$ im Punkt $x \in X$.

Diese Proposition ist in [K, Kap. IX, §2] bewiesen.

Definition 1.5.5.

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein isoalgebraischer Raum. Für ein $x \in X$ heißt $\dim_x X := \dim\mathcal{O}_{X,x} = \frac{1}{2}\dim_x^{sa}X$ die lokale Dimension von X im Punkt x. $\dim X := \max\{\dim_x X \mid x \in X\}$ heißt die Dimension von X.

Proposition 1.5.6.

i) Seien X ein isoalgebraischer Raum und J eine kohärente Idealgarbe auf X. Für jede offene Teilmenge U von X ist $\sqrt{J}(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s(x) = 0$ für jedes $x \in U \cap \mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/J)\}$.

ii) Seien X ein isoalgebraischer Raum und A eine isoalgebraische Teilmenge von X. Ordnet man jeder offenen Teilmenge U von X den $\mathcal{O}_X(U)$-Modul $\{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s(x) = 0$ für jedes $x \in U \cap A\}$ zu, so erhält man eine kohärente Idealgarbe auf X. Sie wird mit J_A bezeichnet. Es ist $A = \mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/J_A)$.

Beweis:

i) Gegeben sei ein $s \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $s(x) = 0$ für jedes $x \in \mathrm{supp}(\mathcal{O}/J)$. Zu zeigen ist, daß ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $s^n \in J(X)$. OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas X_o und es existieren t, $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)$, so daß J die von $f_1|X,\dots,f_m|X$ erzeugte Idealgarbe ist und $s = t|X$. Sei Z die Zariski-abgeschlossene Menge $\{y \in X_o | f_1(y) = \dots = f_m(y) = 0\}$ von X_o. Nach Voraussetzung ist $t(x) = 0$ für jedes $x \in X \cap Z$. Nach Proposition 1.5.4. existiert eine Zariski-offene Teilmenge V von Z, so daß $t(y) = 0$ für jedes $y \in V$ und $X \cap Z \subseteq V$. $W = X_o \setminus (Z \setminus V)$ ist eine Zariski-offene Teilmenge von X_o, für die gilt: $X \subseteq W$ und $(t|W)(y) = 0$ für jedes $y \in \{y \in W | (f_1|W)(y) = \dots = (f_m|W)(y) = 0\}$. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $(t|W)^n \in J_o(W)$, wobei J_o die von $f_1|W,\dots,f_m|W$ erzeugte Idealgarbe ist. Dann ist $s^n \in J(X)$.

ii) OE existieren $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $A = \{x \in X | f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$. Sei J die von $f_1,\dots,f_m$ erzeugte Idealgarbe auf X. Es ist dann $A = \operatorname{supp}(\mathcal{O}/J)$ und somit ist nach i) $J_A = \sqrt{J}$. Nach Proposition 1.5.2. ist J_A kohärent.

<u>Korollar 1.5.7.</u>

Für einen isoalgebraischen Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ sind äquivalent

i) X ist reduziert

ii) Ist U eine offene Teilmenge von X und $s \in \mathcal{O}_X(U)$, so daß $s(x) = 0$ für jedes $x \in U$, dann ist $s = 0$.

Beweis:

ii) $\Rightarrow$ i) ist trivial. Es gelte nun i). Nach 1.5.2. ist $\sqrt{(0)}$

eine kohärente Garbe. Somit ist $\sqrt{(0)} = (0)$ nach Satz 1.2.7..
ii) folgt nun aus 1.5.6.i).

Aus Korollar 1.5.7. folgt

<u>Korollar 1.5.8.</u>
Es sei $f: X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume und T ein isoalgebraischer Teilraum von Y. Ist X reduziert und $f(X) \subseteq T$, dann gibt es einen Morphismus $g: X \to T$, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, dashed, "f"] \\ T \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

Sei A eine isoalgebraische Teilmenge eines isoalgebraischen Raums $(X,\mathcal{O}_X)$. Auf der semialgebraischen Teilmenge A von $|X|$ hat man eine Garbe $\mathcal{O}_A$ von C-Algebren: Für eine offene semialgebraische Teilmenge U von A ist $\mathcal{O}_A(U)$ die Menge aller Funktionen $f: U \to C$, für die es eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von U, eine Familie $(V_i | i \in I)$ von offenen semialgebraischen Teilmengen von X und $f_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$ gibt, so daß $U_i = A \cap V_i$ und $f(x) = f_i(x)$ für jedes $x \in A \cap V_i$. Der C-geringte Raum $(A,\mathcal{O}_A)$ ist ein isoalgebraischer Raum, er ist nämlich der durch die kohärente Idealgarbe J_A definierte isoalgebraische Teilraum von X.
Häufig ist es nötig zu wissen, daß eine isoalgebraische Teilmenge A eines isoalgebraischen Raumes X der zugrunde-

liegende semialgebraische Raum eines isoalgebraischen Raums (oder noch besser: eines isoalgebraischen Teilraums von X) ist; dies ist eben richtig, man versehe A mit der eben beschriebenen reduzierten Teilraumstruktur.

6. Nashräume

Die Definition eines Nashraumes erfolgt analog der Definition eines isoalgebraischen Raumes: Sei X ein Schema von endlichem Typ über R. Die Menge X(R) der R-rationalen Punkte von X ist ein semialgebraischer Raum über R. Zu jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von X(R) hat man wieder die Kategorie I_U. Die Objekte von I_U sind die Tripel (X',U',f), wobei $f : X' \to X$ ein etaler Morphismus von endlichem Typ zwischen R-Schemata ist und U' eine offene semialgebraische Teilmenge von X'(R) ist, so daß $f_R : U' \to U$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Die zu der Prägarbe $U \mapsto \varinjlim_{I_U} \mathcal{O}_{X'}(X')$ assoziierte Garbe wird mit $\mathcal{N}_X$ bezeichnet und heißt die Garbe der Nashfunktionen auf X. Ein offener Nashteilraum von X ist ein R-geringter Raum $(U, \mathcal{N}_X|U)$, wobei U eine offene semialgebraische Teilmenge von X(R) ist. (Die Kategorie der R-geringten Räume wird entsprechend 1.1.2. definiert). Ein Nashraum über R ist ein R-geringter Raum, der lokal isomorph ist zu einem offenen Nashteilraum eines Schemas von endlichem Typ über R.

Es werden nun alle Definitionen aus den Abschnitten 1., 2., 3., 4. analog für den Nashfall übernommen. Es bleiben dann alle Aussagen aus 1., 2., 3., 4. richtig. Vorsicht ist im Abschnitt 5. geboten. Hiervon sind nur noch die Propositionen 1.5.2. und 1.5.3. richtig. Zwar sind auf einem Nashraum $(X, \mathcal{O}_X)$ die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ und die Idealgarbe $\sqrt{(O)}$ kohärent und man kann somit die Reduktion eines Nashraumes bilden, aber auf einem reduzierten Nashraum (die Definition 1.5.1. wird übernommen) kann man die Schnitte der Strukturgarbe im allgemeinen nicht mehr als Funktionen lesen. Denn die zu Proposition 1.5.4. analoge Aussage $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim_x^{sa} X$ ist nicht richtig. Ist jedoch der Nashraum $(X,\mathcal{O}_X)$ regulär, so ist ein $s \in \mathcal{O}_X(X)$ eindeutig durch die zugehörige Funktion $\bar{s} : X \to R$, $x \mapsto s(x)$ bestimmt. Die am Ende von Abschnitt 5. angegebene Beschreibung der reduzierten Teilraumstruktur einer isoalgebraischen Teilmenge eines isoalgebraischen Raums führt im Nashfall im allgemeinen zu keinem Nashraum. Dies wird im folgenden an zwei Beispielen illustriert.

Sei A eine Nashteilmenge einer offenen semialgebraischen Teilmenge T des R^n. Auf A hat man eine Garbe $\mathcal{O}_A$ von R-Algebren: Für eine offene semialgebraische Teilmenge U von A ist $\mathcal{O}_A(U)$ die Menge aller Funktionen $f : U \to R$, für die es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von U, eine Familie $(V_i \mid i \in I)$ von offenen semialgebraischen Teilmengen von T und $f_i \in \mathcal{N}_{\mathbb{A}^n}(V_i)$ gibt, so daß $U_i = A \cap V_i$ und $f(x) = f_i(x)$ für jedes $x \in A \cap V_i$. Auf T hat man die Idealgarbe J_A: Für eine offene semialgebraische Teilmenge V von T ist $J_A(V) = \{s \in \mathcal{N}_{\mathbb{A}^n}(V) \mid s(x) = 0$ für jedes $x \in A \cap V\}$. Es ist $\mathcal{O}_A = j^{-1}(\mathcal{O}_T/J_A)$, wobei $j : A \to T$ die Inklusion und $\mathcal{O}_T = \mathcal{N}_{\mathbb{A}^n}|T$ ist. Der R-geringte Raum $(A,\mathcal{O}_A)$ hat folgende Eigenschaften:

i) Für jedes $a \in A$ ist $\mathcal{O}_{A,a}$ ein henselscher lokaler Ring und $R \to \mathcal{O}_{A,a}/m_a$ ist ein Isomorphismus. ($(A,\mathcal{O}_A)$ gibt also Anlaß zu einem strikt reellen Raum im Sinne der Definition aus $[K_2]$).

ii) Für jedes $a \in A$ ist $\dim \mathcal{O}_{A,a} = \dim_a^{sa} A$.

iii) Für ein $a \in A$ ist $\mathcal{O}_{A,a}$ genau dann ein Integritätsbereich, wenn der von (T,A) repräsentierte Nashkeim des R^n im Punkt a irreduzibel ist.

iv) $(A,\mathcal{O}_A)$ ist genau dann ein Nashraum, wenn die Idealgarbe J_A auf $(T,\mathcal{O}_T)$ kohärent ist.

(Begründung von iv): Ist J_A kohärent, so ist $(A,\mathcal{O}_A)$ ein Nashraum nach Korollar 1.3.4.. Ist $(A,\mathcal{O}_A)$ ein Nashraum, so ist der kanonische Morphismus R-geringter Räume $j : (A,\mathcal{O}_A) \to (T,\mathcal{O}_T)$ eine Einbettung nach Korollar 1.3.12.. Dann ist $J_A = \ker(\mathcal{O}_T \to j_*\mathcal{O}_A)$ kohärent.)

Es gilt (die Bezeichnungen seien wie oben):

(1) Sei a ein Punkt von A, für den gilt: Der von (T,A) repräsentierte Nashkeim des R^n im Punkt a ist irreduzibel und in jeder Umgebung U von a in A gibt es ein b mit $\dim_b^{sa} A \neq \dim_a^{sa} A$. Dann ist J_A nicht kohärent.

(1) ist in [C] bewiesen. Cartan benutzt hierzu die Komplexifizierung reell analytischer Mengenkeime. Auf diese Weise läßt sich (1) natürlich auch im Nashfall zeigen. Eine andere Möglichkeit ist die folgende: Angenommen, es sei J_A kohärent. Dann ist der R-geringte Raum $(A,\mathcal{O}_A)$ ein Nashraum.

Also gibt es eine offene semialgebraische Umgebung V von a in A, so daß $(V,\mathcal{O}_A|V)$ ein offener Nashteilraum eines Schemas X von endlichem Typ über $\mathbb{R}$ ist. Da $\mathcal{O}_{A,a} = \mathcal{O}_{X,a}^h$ integer ist, ist auch $\mathcal{O}_{X,a}$ integer. Deshalb gibt es eine offene semialgebraische Umgebung U von a in V, so daß $\dim_b^{sa} A = \dim \mathcal{O}_{A,b} = \dim \mathcal{O}_{X,b} = \dim \mathcal{O}_{X,a} = \dim \mathcal{O}_{A,a} = \dim_a^{sa} A$ für jedes $b \in U$. Widerspruch.

Beispiel:
Sei $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z(x^2+y^2) - x^3 = 0\}$. Es ist $\dim_{(0,0,0)}^{sa} A = 2$, $\dim_{(0,0,z)}^{sa} A = 1$ für jedes $z \neq 0$ und A ist irreduzibel in (0,0,0). Also ist $(A,\mathcal{O}_A)$ kein Nashraum.

Wie in [N, Ch. V, Prop. 8] beweist man mit Hilfe der Komplexifizierung von Nashkeimen

(2) Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ und A eine isoalgebraische Teilmenge von U. Sei a ein Punkt von A, für den gilt: A ist im Punkt a irreduzibel und in jeder Umgebung von a in A gibt es einen Punkt, in dem A reduzibel ist. Man betrachte nun U als offene semialgebraische Teilmenge es $\mathbb{R}^{2n}$ und A als Nashteilmenge. Es ist dann J_A nicht kohärent auf $(U,\mathcal{N}_{\mathbb{R}^{2n}}|U)$.

Beispiel:
Sei $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 | x^2 - zy^2 = 0\}$. Es ist A irreduzibel in (0,0,0). Für jedes $z \neq 0$ ist A reduzibel in (0,0,z). Also

gibt es im R^6 eine rein 4-dimensionale Nashteilmenge A, so daß $(A,\mathcal{O}_A)$ kein Nashraum ist.

§2 - Einige Eigenschaften isoalgebraischer Funktionen, I

Es werden die Ergebnisse über isoalgebraische Funktionen aus $[K_1]$ angegeben. Die Beweise findet man in [K]. Es wird gezeigt, daß einige elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen, wie Identitätssatz, Maximumprinzip, Differenzierbarkeit, Potenzreihenentwicklung, auch für isoalgebraische Funktionen gelten.

Satz 2.1.

Seien X ein normales Schema, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und $f \in \mathcal{A}_X(U)$. Es existieren dann ein Schema X_o, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $X_o(C)$, ein etaler Morphismus $p : X_o \to X$ und ein $f_o \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)$, so daß $p^h|V : V \to U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f_o|V$.

Satz 2.2.

Sei X ein normaler isoalgebraischer Raum und sei $f : X \to C$ eine semialgebraische Abbildung. Zu jedem $x \in X$ gebe es eine offene Teilmenge U von X, so daß $x \in U$ und $f|U : U \to C$ isoalgebraisch ist. Dann ist f isoalgebraisch.

Satz 2.3.

Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $A^n(C)$ und $f : U \to C$ eine isoalgebraische Funktion. f ist differenzierbar, d.h. für jedes $u \in U$ und jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ existiert der

Grenzwert $(D_i f)(u) = \frac{\partial f}{\partial z_i}(u) := \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(u+he_i) - f(u)}{h}$ und die dadurch bestimmte Funktion $U \to C$, $u \mapsto (D_i f)(u)$ ist isoalgebraisch.

Satz 2.4.

Sei X ein zusammenhängender normaler isoalgebraischer Raum und sei $f \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $f|V = 0$ für eine nichtleere offene Teilmenge V von X. Dann ist $f = 0$.

Beweis:

Nach 1.1.5. gibt es eine Überdeckung $(U_i | i = 1,\dots,n)$ von X, so daß zu jedem i ein zusammenhängendes normales Schema X_i, eine offene semialgebraische Teilmenge V_i von $X_i(C)$, ein isoalgebraischer Isomorphismus $h_i : (V_i, \mathcal{U}_{X_i}|V_i) \to (U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$ und $f_i \in \mathcal{O}_{X_i}(X_i)$ existieren mit $h_i^*(f|U_i) = f_i|V_i$. OE ist $V \cap U_1 \neq \emptyset$. Es ist dann $f_1|h_1^{-1}(V \cap U_1) = 0$. Deshalb ist nach 1.5.4. $f_1 = 0$ und somit $f|U_1 = 0$. OE ist $U_2 \cap U_1 \neq \emptyset$. Wie eben folgt dann $f|U_2 = 0$. OE ist $U_3 \cap (U_1 \cup U_2) \neq \emptyset$. Es ist dann $f|U_3 = 0$. ...

Satz 2.5.

Sei X ein zusammenhängender regulärer isoalgebraischer Raum und sei $s \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann ist die Abbildung $\overline{s} : X \to C$, $x \mapsto s(x)$ konstant oder offen.

Beweis:

Es sei $\overline{s}$ nicht konstant. Es ist zu zeigen, daß $\overline{s}$ offen ist in jedem Punkt $x \in X$. Sei ein $v \in X$ gegeben. OE ist $s(v) = 0$.

Nach dem Identitätssatz 2.4. ist $0 \neq s_v \in \mathcal{O}_{X,v}$. Es ist also zu zeigen:

(*) Ist X ein regulärer isoalgebraischer Raum, $v \in X$ und $s \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $s_v \neq 0$ und $s(v) = 0$, so ist $\overline{s}$ offen in v.

OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas X_o. Da $\mathcal{O}_{X_o,v}$ regulär ist, existiert OE ein etaler Morphismus $X_o \to \mathbb{A}^n$. Nach Proposition 1.1.1.v) ist dann OE X ein offener isoalgebraischer Teilraum von $\mathbb{A}^n$ und v der Nullpunkt. Sei U eine offene Teilmenge von X, so daß $v \in U$ und $L \cap U$ zusammenhängend ist für jeden 1-dimensionalen linearen Unterraum des $\mathbb{A}^n$. Wähle ein $w \in U$, so daß $w \neq v$ und $s(w) \neq 0$. Sei L_o der 1-dimensionale lineare Unterraum des $\mathbb{A}^n$ mit $w \in L_o$ und sei t die Einschränkung von s auf $L_o \cap U$. Es genügt zu zeigen, daß $\overline{t}$ offen in v ist. Nach dem Identitätssatz ist $t_v \neq 0$. Also kann man in (*) annehmen: $\dim \mathcal{O}_{X,v} = 1$. Sei a ein erzeugendes Element des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{X,v}$. Es ist $s_v = b \cdot a^m$, wobei b eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,v}$ ist und $m \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{O}_{X,v}$ ein lokaler henselscher Ring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper der Charakteristik Null ist, gibt es ein $c \in \mathcal{O}_{X,v}$ mit $b = c^m$; also $s_v = (c \cdot a)^m$. OE existieren ein Schema X_o und $d \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)$, so daß X ein offener isoalgebraischer Teilraum von X_o ist und $c \cdot a = d_v$. Sei $f : X_o \to \mathbb{A}^1$ der durch d gegebene Morphismus von Schemata. Es ist $f(v) = 0$ und es gibt eine offene Teilmenge U von X mit $v \in U$, so daß das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & U \arrow[d] \arrow[dr, "\bar{s}"] & \\ f(x) & \mathbb{A}^1(C) \arrow[r] & C \\ & x \arrow[r, mapsto] & x^m \end{tikzcd}$$

Da $c \cdot a$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,v}$ erzeugt, erzeugt d_v das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X_o,v}$. Deshalb ist f unverzweigt in v. Nach [SGA 1, I, 9.5.] ist dann f sogar etal in v. Also ist $\bar{s}$ offen in v.

Im folgenden bezeichne v den Nullpunkt des $\mathbb{A}^n$. Seien $z_1,\dots,z_n$ die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{A}^n$. $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$ ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension n und $(z_1)_v,\dots,(z_n)_v$ bildet ein reguläres Parametersystem von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$. C ist ein Koeffizientenkörper von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$. Somit läßt sich jedes $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$ bezüglich $(z_1)_v,\dots,(z_n)_v$ in eine formale Potenzreihe mit Koeffizienten in C entwickeln, $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^n} c_\alpha T^\alpha \in C[[T_1,\dots,T_n]]$ ($\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_o^n \\ |\alpha| \leq k}} c_\alpha T^\alpha$ erhält man durch Identifizierung von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}/m^{k+1}$ mit den Polynomen vom Grad $\leq k$ in $(z_1)_v,\dots,(z_n)_v$ mit Koeffizienten in C), oder anders ausgedrückt: durch Auszeichnung des regulären Parametersystems $(z_1)_v,\dots,(z_n)_v$ erhält man einen kanonischen Isomorphismus $(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v})^\wedge \xrightarrow{\sim} C[[T_1,\dots,T_n]]$.
Der Zusammenhang zwischen Differentiation und Entwicklung in formale Potenzreihen ist der folgende

<u>Satz 2.6.</u>
Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$ und sei $c = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^n} c_\alpha T^\alpha \in C[[T_1,\dots,T_n]]$ die formale Potenzreihe von f.

i) Ist $d = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^n} d_\alpha T^\alpha$ die formale Potenzreihe von

$D_i f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$, so ist $d = \frac{\partial c}{\partial T_i}$.

ii) Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(v)$.

Beweis:

i) Für D_i gilt die gewöhnliche Produktregel der Differentiation (also ist $D_i : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$ eine Derivation über C). Es ist $D_i(z_j)_v = 0$ für $j \neq i$ und $D_i(z_i)_v = 1$. Gegeben sei ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $p = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq k}} c_\alpha T^\alpha$. Also ist $f = p((z_1)_v,\dots,(z_n)_v) + x$ mit $x \in m^{k+1}$. Dann ist $D_i f = D_i p((z_1)_v,\dots,(z_n)_v) + D_i x$. Es ist $D_i p((z_1)_v,\dots,(z_n)_v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial T_j}((z_1)_v,\dots,(z_n)_v) \cdot D_i(z_j)_v = \frac{\partial p}{\partial T_i}((z_1)_v,\dots,(z_n)_v)$ und $D_i x \in m^k$. Somit ist $\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq k-1}} d_\alpha T^\alpha = \frac{\partial p}{\partial T_i}$.

ii) folgt aus i).

<u>Korollar 2.7.</u>

Sei f eine isoalgebraische Funktion auf einer offenen semialgebraischen Teilmenge von $\mathbb{A}^n(C)$. Dann ist $D_i D_j f = D_j D_i f$.

Auf C hat man den Betrag $|\;| : C \to R$, $a + ib \to \sqrt{a^2+b^2}$, wobei i eine Wurzel von -1 ist. Ein Polyzylinder mit Mittelpunkt $a = (a_1,\dots,a_n) \in C^n$ und Multiradius $r = (r_1,\dots,r_n) \in R^n$ ($r_i > 0$ für $i = 1,\dots,n$) ist $B_r(a) = \{(z_1,\dots,z_n) \in C^n \mid |z_i - a_i| < r_i$ für $i = 1,\dots,n\}$.

Sei f eine isoalgebraische Funktion auf einem Polyzylinder $B_\rho(v)$. Für jeden Multiradius $(r_1,\dots,r_n) = r < \rho$ sei $M_f(r) = \max\{|f(x_1,\dots,x_n)| \mid |x_1| = r_1,\dots,|x_n| = r_n\}$. Ist $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha T^\alpha$

die formale Potenzreihe von $f_v \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$, so folgt im holomorphen Fall aus der Cauchyschen Integralformel $|c_\alpha| \leq \frac{M_f(r)}{r^\alpha}$. In der allgemeinen Situation erhält man eine ähnliche Abschätzung.

Satz 2.8.

Sei $f : B_\rho(v) \to C$ eine isoalgebraische Funktion auf einem Polyzylinder und sei $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^n} c_\alpha T^\alpha$ die formale Potenzreihe von $f_v \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,v}$. Für jeden Multiradius $r < \rho$ und jedes $\alpha \in \mathbb{N}_o^n$ gilt $|c_\alpha| \leq 2^{|\alpha|} \frac{M_f(r)}{r^\alpha}$.

Beweis:

1. Fall: $n = 1$

Es gilt

(1) Sei g eine isoalgebraische Funktion auf $B_\rho(v)$ und sei $\sum_{n \in \mathbb{N}_o} c_n T^n$ die formale Potenzreihe von $g_v \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,v}$. Es sei $c_n = 0$ für $n = 0,1,\dots,k-1$. Für jedes $r \in R$ mit $0 < r < \rho$ gilt dann: $|g(x)| \leq \frac{M_g(r)}{r^k}|x|^k$ für jedes $x \in \overline{B}_r(v)$ und $|c_k| \leq \frac{M_g(r)}{r^k}$

denn: Die Voraussetzung $c_n = 0$ für $n = 0,\dots,k-1$ besagt gerade, daß $g_v \in m^k$, wobei m das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,v}$ ist. Also ist $h : B_\rho(v) \to C$, $h(x) = \frac{g(x)}{x^k}$ für $x \neq 0$ und $h(0) = c_k$ isoalgebraisch. Nach Satz 2.5. ist $|h(x)| \leq \max\{|h(t)| \mid |t| = r\}$ für jedes $x \in \overline{B}_r(v)$. Hieraus folgt (1).

Satz 2.8. wird durch vollständige Induktion nach $\alpha \in \mathbb{N}_o$ bewiesen. Der Fall $\alpha = 0$ ist in (1) enthalten. Satz 2.8. gelte für $\alpha = 0,1,\dots,k-1$. Sei g die isoalgebraische Funktion $f - (c_o + c_1 z + \dots + c_{k-1}z^{k-1})$. Nach (1) ist

$|c_k| \leq \frac{1}{r^k} \max\{|g(x)| \mid |x| = r\}$. Für jedes x mit $|x| = r$ gilt:

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |f(x)| + |c_o| + |c_1|r + \ldots + |c_{k-1}|r^{k-1} \\ &\leq M_f(r) + 2^0 M_f(r) + 2^1 M_f(r) + \ldots + 2^{k-1} M_f(r) \\ &= 2^k M_f(r). \end{aligned}$$

2. Fall: n beliebig

Satz 2.8. wird durch vollständige Induktion nach n bewiesen. Satz 2.8. gelte für ein vorgegebenes n. Seien $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n+1})$ und $r = (r_1, \ldots, r_{n+1})$ Multiradien mit $r < \rho$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}_o^{n+1}$ ein Multiindex und f eine isoalgebraische Funktion auf $B_\rho(v)$. Sei $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid |x_i| < \rho_i$ für $i = 1, \ldots, n\}$. Nach Satz 2.3 ist $g: B \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{\alpha_{n+1}!} (D_{n+1})^{\alpha_{n+1}} f(x, 0)$ eine isoalgebraische Funktion. Nach Fall 1. und Satz 2.6.ii) gilt für jedes $x \in B$:

(2) $|g(x)| \leq 2^{\alpha_{n+1}} \frac{M(x)}{r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}$, wobei $M(x) = \max\{|f(x,y)| \mid |y| = r_{n+1}\}$.

Nach Induktionsvoraussetzung und Satz 2.6.ii) ist $|\frac{1}{\beta!} (D^\beta g)(v)| \leq 2^{|\beta|} \frac{N}{Q^\beta}$, wobei $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $Q = (r_1, \ldots, r_n)$ und $N = \max\{|g(x_1, \ldots, x_n)| \mid |x_1| = r_1, \ldots, |x_n| = r_n\}$. Somit folgt aus (2):

$$|c_\alpha| = |\frac{1}{\beta!} (D^\beta g)(v)| \leq 2^{|\beta|} 2^{\alpha_{n+1}} \frac{M_f(r)}{Q^\beta r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}} = 2^{|\alpha|} \frac{M_f(r)}{r^\alpha}$$

<u>Satz 2.9.</u>

Sei f eine isoalgebraische Funktion auf einem Polyzylinder $B_\rho(v)$ und sei $c = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^n} c_\alpha T^\alpha$ die formale Potenzreihe von $f_v \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, v}$. Sei $\mathcal{T} \in R$ eine Mikrobe von R, d.h. $(\mathcal{T}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge in R. Dann konvergiert c auf $B_r(v)$ gleichmässig gegen f für jeden Multiradius $r < \frac{\mathcal{T}}{2} \cdot \rho$.

Beweis:

Zunächst wird (1) aus dem Beweis von Satz 2.8. verallgemeinert.

(3) Sei g eine isoalgebraische Funktion auf $B_\rho(v)$ und sei $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha T^\alpha$ die formale Potenzreihe von $g_v \in \mathfrak{O}_{\mathbb{A}^n,v}$. Sei k eine natürliche Zahl. Für jeden Multiindex $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha|<k$ sei $c_\alpha = 0$. Dann gilt für jeden Multiradius $(r_1,\dots,r_n) = r < \rho$ und jedes $(x_1,\dots,x_n) = x \in \overline{B}_r(v)$:

$$|g(x)| \leq M_g(r)\cdot(\max\{|\tfrac{x_i}{r_i}|\,|\,i = 1,\dots,n\})^k.$$

denn: OE ist $x \neq v$. Sei $p = \min\{|\frac{\rho_i}{x_i}|\,|\,i = 1,\dots,n\}$ und $q = \min\{|\frac{r_i}{x_i}|\,|\,i = 1,\dots,n\}$ (Ist $x_i = 0$, so setze man $|\frac{\rho_i}{x_i}| = |\frac{r_i}{x_i}| = +\infty$). Man hat die isoalgebraische Funktion $h : \{t\in\mathbb{A}^1(\mathbb{C})\,|\,|t| < p\} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto g(tx)$. Die formale Potenzreihe von $h_v \in \mathfrak{O}_{\mathbb{A}^1,v}$ ist $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} d_m T^m$ mit $d_m = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|=m}} c_\alpha x^\alpha$. Also ist $d_m = 0$ für $m = 0,1,\dots,k-1$. Somit folgt aus (1) aus dem Beweis von Satz 2.8. $|g(x)| = |h(1)| \leq \frac{M_h(q)}{q^k} = M_h(q)\cdot(\max\{|\frac{x_i}{r_i}|\,|\,i = 1,\dots,n\})^k$. Für jedes $t\in\mathbb{C}$ mit $|t| = q$ ist $tx \in \overline{B}_r(v)$ und somit ist aufgrund des Maximumprinzip $|h(t)| = |g(tx)| \leq M_g(r)$. Also ist $M_h(q) = \max\{|h(t)|\,|\,|t|=q\} \leq M_g(r)$.

Satz 2.9. ergibt sich aus den folgenden beiden Behauptungen (sei $r < \frac{\vartheta}{2}\cdot\rho$ ein fest gegebener Multiradius):

(*) Für jedes $k\in\mathbb{N}$ sei g_k die isoalgebraische Funktion $f - \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|<k}} c_\alpha z^\alpha$ ($z_1,\dots,z_n$ sind die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{A}^n$ und $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha_n}$.) Dann ist $(\max\{|g_k(x)|\,|\,x\in\overline{B}_r(v)\})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(**) Zu jedem $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge I von $\mathbb{N}_0^n$, so daß für jede endliche Teilmenge J von $\mathbb{N}_0^n \setminus I$ und jedes $x \in B_r(v)$ gilt: $\sum_{\alpha \in J} |c_\alpha x^\alpha| < \varepsilon$

Begründung von (*):

Sei $Q = (Q_1,\ldots,Q_n)$ ein Multiradius , so daß $Q < \rho$ und $r < \frac{\mathcal{J}}{2} \cdot Q$. Nach Satz 2.8. und (3) gilt für jedes $x \in \overline{B}_r(v)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$: $|g_k(x)| \leq M_{g_k}(Q) \cdot (\max\{|\frac{x_i}{Q_i}|\,|\,i = 1,\ldots,n\})^k \leq$ $(M_f(Q) + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| < k}} 2^{|\alpha|} \frac{M_f(Q)}{Q^\alpha} Q^\alpha) \cdot (\frac{\mathcal{J}}{2})^k \leq M_f(Q)(1 + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| < k}} 1) \cdot \mathcal{J}^k$

$\leq M_f(Q) k^n \mathcal{J}^k$

und $(k^n \mathcal{J}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Begründung von (**):

Sei $Q = (Q_1,\ldots,Q_n)$ ein Multiradius, so daß $Q < \rho$ und $r < \frac{\mathcal{J}}{2} Q$. Nach Satz 2.8. gilt für jedes $x \in B_r(v)$: $|c_\alpha x^\alpha| \leq 2^{|\alpha|} \frac{M_f(Q)}{Q^\alpha} (\frac{\mathcal{J}}{2})^{|\alpha|} Q^\alpha = M_f(Q) \mathcal{J}^{|\alpha|}$. Also gilt für jede endliche Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}_0^n \setminus \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \,|\, |\alpha| \leq k-1\}$ und jedes $x \in B_r(v)$: $\sum_{\alpha \in J} |c_\alpha x^\alpha| \leq M_f(Q) \cdot \binom{k+n-1}{n-1} \mathcal{J}^k \frac{1}{(1-\mathcal{J})^n}$. Es ist $(\binom{k+n-1}{n-1} \mathcal{J}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

<u>Satz 2.10.</u>

Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von C^n. Sei $f : U \to C$ eine Funktion, für die gilt

a) f ist eine komplexwertige Nashfunktion, d.h. $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ sind Elemente aus $\mathcal{N}_{\mathbb{A}^{2n}}(U)$, wobei man U als offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^{2n}(R) = R^{2n} = C^n$ betrachtet.

b) f ist partiell differenzierbar, d.h. für jedes $u \in U$ und jedes $i \in \{1,\ldots,n\}$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z_i}(u)$.

Dann ist f eine isoalgebraische Funktion.

Beweis:

Man zeichne eine Wurzel i von -1 aus. Man identifiziere C^n mit R^{2n} indem man setzt $(z_1,\ldots,z_n) = (\mathrm{Re}(z_1),\mathrm{Im}(z_1),\ldots,\mathrm{Re}(z_n),\mathrm{Im}(z_n))$. R^{2n} wiederum betrachte man ganz kanonisch als Teilmenge von C^{2n}.

Nach Satz 2.2. genügt es zu zeigen, daß es zu jedem Punkt aus U eine offene semialgebraische Umgebung in U gibt, auf der f isoalgebraisch ist. Gegeben sei ein $u \in U$. OE ist u=O. Es gibt eine offene zusammenhängende semialgebraische Umgebung V von O in C^{2n} und eine isoalgebraische Funktion $\tilde{f}: V \to C$, so daß $V \cap R^{2n} \subseteq U$ und $f(x) = \tilde{f}(x)$ für jedes $x \in V \cap R^{2n}$. Es gilt

(1) Sind r und s isoalgebraische Funktionen auf V, so daß $r(x) = s(x)$ für jedes $x \in V \cap R^{2n}$, so ist $r = s$.

Denn: Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}$ und jedes $x \in V \cap R^{2n}$ ist $(D^\alpha r)(x) = (D^\alpha s)(x)$. Nach Satz 2.6.ii) ist dann $r_x = s_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{2n},x}$ für jedes $x \in V \cap R^{2n}$. Nach dem Identitätssatz ist $r = s$.

Da f partiell differenzierbar ist, gilt für jedes $x \in V \cap R^{2n}$:
$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_1}(x) = \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_2}(x)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_3}(x) = \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_4}(x)$, $\ldots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_{2n-1}}(x) = \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_{2n}}(x)$. Aus (1) folgt

(2) Auf V gilt $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_1} = \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_2}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_3} = \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_4}$, $\ldots$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_{2n-1}} = \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_{2n}}$.

Sei $h : C^{2n} \to C^{2n}$ die lineare Abbildung $(z_1,\dots,z_{2n}) \mapsto$ $(\frac{1}{2}(z_1+z_{n+1}),\frac{1}{2i}(z_1-z_{n+1}),\dots,\frac{1}{2}(z_n+z_{2n}),\frac{1}{2i}(z_n-z_{2n}))$. Sei P ein Polyzylinder in C^n mit Mittelpunkt 0, so daß $h(P\times P) \subseteq V$, wobei $P\times P = \{(z_1,\dots,z_{2n}) \in C^{2n} \mid (z_1,\dots,z_n) \in P$ und $(z_{n+1},\dots,z_{2n}) \in P\}$. Für jedes $z = (z_1,\dots,z_n) \in P$ ist $h((z,\overline{z})) = (\mathrm{Re}(z_1),\mathrm{Im}(z_1),\dots,\mathrm{Re}(z_n),\mathrm{Im}(z_n))$ ($\overline{}$ bezeichnet die Konjugation auf C, bestimmt durch R und i). Also ist $P \subseteq U \subseteq C^n$. Sei $g : P\times P \to C$ die isoalgebraische Funktion $\tilde{f}\circ h$. Es gelten

(3) Für jedes $z \in P$ ist $g((z,\overline{z})) = f(z)$

(4) $\frac{\partial g}{\partial z_{n+1}} = 0,\dots,\frac{\partial g}{\partial z_{2n}} = 0.$

Dabei folgt (4) aus (2). Aus (4) ergibt sich

(5) Für jedes $z \in P$ ist g auf $\{z\}\times P$ konstant.

Sei j die isoalgebraische Abbildung $P \to P\times P$, $z \mapsto (z,0)$. Nach (3) und (5) ist $f|P = g\circ j$. Also ist $f|P$ isoalgebraisch.

Abschließend noch ein rein algebraisches Ergebnis

Satz 2.11.

$\mathcal{A}_{\mathbb{A}^n,0}$ ist algebraisch abgeschlossen in seiner Komplettierung $(\mathcal{A}_{\mathbb{A}^n,0})^\wedge$.

Für einen Beweis von Satz 2.11. siehe [EGA IV, 18.9.3]. Es gilt $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{A}^n,0} \subseteq (\mathcal{A}_{\mathbb{A}^n,0})^\wedge = (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0})^\wedge$. Es ist leicht einzusehen, daß $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^n,0}$ algebraisch über $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$ ist. Satz 2.11. sichert also einen "gewissen Vorrat" an isoalgebraischen Funktionen.

Satz 2.11. wird in keinem Beweis der bisher aufgeführten Sätze verwendet. Auch in dieser Arbeit wird Satz 2.11. nur einmal benötigt, nämlich beim Beweis des Riemannschen Hebbarkeitssatzes.

Bemerkung:

Satz 2.1. und Satz 2.2. gelten analog für Nashfunktionen, wenn das Schema bzw. der Nashraum regulär sind. Auch gilt der Identitätssatz für reguläre Nashräume. Nashfunktionen auf offenen semialgebraischen Teilmengen des R^n sind differenzierbar. Der Zusammenhang zwischen Differentiation und formaler Potenzreihe eines Nashfunktionskeims ist natürlich derselbe wie im isoalgebraischen Fall (Satz 2.6.). Da die formale Potenzreihe einer isoalgebraischen Funktion lokal gegen die Funktion konvergiert (wenn der Körper R mikrobial ist), gilt dies ebenso für Nashfunktionen.

§3 - Weierstraßscher Vorbereitungssatz und Divisionssatz

In [EGA IV, 18.6.8] ist gezeigt

Lemma 3.1.

Seien A ein lokaler Ring und B eine endliche A-Algebra. Seien $B_1,\ldots,B_r$ die Lokalisationen von B in den maximalen Idealen von B. Für die Henselisierung B^h von B gilt:
$B^h = B_1^h \times \ldots \times B_r^h = B\otimes_A A^h$.

Lemma 3.2.

Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, so daß $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ quasiendlich ist für ein $x \in X$. Es gelten dann

i) $\mathcal{O}_{Y,f(y)} \to \mathcal{O}_{X,y}$ ist endlich für jedes y in einer Umgebung von x.

ii) Es existieren eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X und eine offene semialgebraische Umgebung V von f(x) in Y, so daß $f(U) \subseteq V$ und $f|U: U \to V$ endlich ist.

Beweis:

Nach Korollar 1.3.10. kann man OE annehmen: Es existiert ein Morphismus von Schemata $g: S \to T$, so daß $X = S^h$, $Y = T^h$, $f = g^h$. Da $\mathcal{O}^h_{T,g(x)} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}^h_{S,x}$ quasiendlich ist, ist auch $\mathcal{O}_{T,g(x)} \to \mathcal{O}_{S,x}$ quasiendlich. Nach Zariskis Hauptsatz ([EGA III, 4.4.3]) hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "g|U"'] & & V \arrow[dl, "h"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

wobei U eine Zariski-offene Umgebung von x in S ist, i eine offene Immersion und h ein endlicher Morphismus ist. Also ist OE g endlich. ii) ist klar und i) folgt aus Lemma 3.1..

Ein Morphismus zwischen semialgebraischen Räumen $f: X \to Y$ heißt quasiendlich in $x \in X$, wenn x isoliert in der Faser $f^{-1}(f(x))$ ist.

<u>Satz 3.3.</u>

Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume und sei $x \in X$. Es sind äquivalent

i) $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ist quasiendlich

ii) $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ist endlich.

iii) Es existieren eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X und eine offene semialgebraische Umgebung V von f(x) in Y, so daß $f(U) \subseteq V$ und $f|U: U \to V$ endlich ist.

iv) f ist quasiendlich in x.

Beweis:

i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) ist klar (Lemma 3.2.).

iv) $\Rightarrow$ i):

Ist m das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$, so ist $\mathcal{O}_{X,x}/m\cdot\mathcal{O}_{X,x}$

der lokale Ring der Faser $f^{-1}(f(x))$ in x. Nach Proposition 1.5.4. ist $0 = \dim_x f^{-1}(f(x)) = \dim \mathcal{O}_{f^{-1}(f(x)),x}$. Also ist $\mathcal{O}_{X,x}/m\cdot\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{f^{-1}(f(x)),x}$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Ein einfaches aber für uns wichtiges Beispiel eines endlichen Morphismus ist

Beispiel 3.4.

Sei X ein isoalgebraischer Raum und sei $F \in \mathcal{O}_X(X)[T]$ ein normiertes Polynom über dem Ring $\mathcal{O}_X(X)$. Sei Y der durch F gegebene isoalgebraische Teilraum von $X\times(\mathbb{A}^1)^h$ und sei $p: Y \to X$ die Einschränkung der Projektion $X\times(\mathbb{A}^1)^h \to X$ auf Y. Seien $\Delta \in \mathcal{O}_X(X)$ die Diskriminante von F und $S = \{x \in X \mid \Delta(x) = 0\}$.

Es gelten:

i) p ist endlich und flach und für jedes $y \in Y$ ist $\dim_y Y = \dim_{p(y)} X$.

ii) Es existiert eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von $X \setminus S$, so daß für jedes $i \in I$ und jede Zusammenhangskomponente Z von $f^{-1}(U_i)$ $p|Z: Z \to U_i$ ein Isomorphismus ist.

iii) Ist X normal und zusammenhängend und $\Delta \neq 0$, so ist Y reduziert.

Beweis:

OE ist $X = W^h$, wobei W ein Schema ist, und $F \in \mathcal{O}_W(W)[T]$.

Ist V das durch F gegebene Unterschema von $W \times \mathbb{A}^1$ und $q : V \to W$ die Einschränkung der Projektion $W \times \mathbb{A}^1 \to W$ auf V, so ist $Y = V^h$ und $p = q^h$ (Proposition 1.3.3.).

i) q ist endlich und flach. Also ist auch $p = q^h$ endlich und flach. Für jedes $v \in V$ ist $\dim \mathcal{O}_{W,q(v)} = \dim \mathcal{O}_{V,v}$ (denn q ist endlich und flach). Nach 1.5.4. ist dann $\dim_y Y = \dim_{p(y)} X$ für jedes $y \in Y$.

ii) q ist über $W \setminus \{w \in W \mid \Delta(w) = 0\}$ etal. Also folgt ii) aus 1.3.11.ii)c).

iii) Es ist also W zusammenhängend und normal und $\Delta \neq 0$. Sei a ein generischer Punkt von V. Da $\dim \mathcal{O}_{V,a} = \dim \mathcal{O}_{W,q(a)}$, ist q(a) der generische Punkt von W. Da q etal über dem generischen Punkt von W ist, ist $\mathcal{O}_{V,a}$ reduziert. Also hat V die Eigenschaft R_o. $W \times \mathbb{A}^1$ ist normal, hat also die Eigenschaft S_2. Für jedes $x \in W \times \mathbb{A}^1 =: T$ ist F_x ein Nichtnullteiler in $\mathcal{O}_{T,x}$. Deshalb hat V noch die Eigenschaft S_1. Ein Schema, das R_o und S_1 erfüllt, ist reduziert.

<u>Satz 3.5.</u>

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Seien $v \in X$, $a \in \mathbb{A}^1(C)$ und A der lokale Ring von $X \times (\mathbb{A}^1)^h$ im Punkt (v,a). Sei z ein Element von A, das, eingeschränkt auf den isoalgebraischen Teilraum $\{v\} \times (\mathbb{A}^1)^h$, das maximale Ideal des lokalen Rings von $\{v\} \times (\mathbb{A}^1)^h$ im Punkt (v,a) erzeugt.

Gegeben sei ein $f \in A$, so daß $f \mid \{v\} \times (\mathbb{A}^1)^h$ in (v,a) eine

Nullstelle der Vielfachheit k ($1 \leq k < \infty$) besitzt. Dann gelten

i) A/fA ist ein freier Modul über $\mathcal{O}_{X,v}$ mit Basis $1, z, z^2, \ldots, z^{k-1}$ mod fA. Also läßt sich jedes $g \in A$ schreiben

$$g = h \cdot f + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k$$

mit $h \in A$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{O}_{X,v}$. $h, a_1, \ldots, a_k$ sind eindeutig bestimmt.

ii) Es existieren $h \in A$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{O}_{X,v}$, so daß

$$f = h \cdot (z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k).$$

h ist eine Einheit in A und $a_1, \ldots, a_k$ liegen im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,v}$. $h, a_1, \ldots, a_k$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien m das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,v}$ und B der lokale Ring von $\{v\} \times (\mathbb{A}^1)^h$ in (v,a), also $B = A/mA$. Für jedes $g \in A$ bezeichnet $\bar{g}$ das Bild von g unter der Einschränkungsabbildung $A \to B$. Es ist $\bar{f} = u \cdot \bar{z}^k$ mit einer Einheit u aus B.

i) $A/fA \otimes_{\mathcal{O}_{X,v}} \mathcal{O}_{X,v}/m = B/\bar{f}B$ ist ein freier Modul über $\mathcal{O}_{X,v}/m$ mit Basis $1, \bar{z}, \ldots \bar{z}^{k-1}$ mod $\bar{f}B$. Nach Lemma 3.2. ist dann A/fA ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{X,v}$-Modul.
A ist flach über $\mathcal{O}_{X,v}$ und $\bar{f}$ ist ein Nichtnullteiler von $A/mA = B$. Nach [EGA 0_{III}, 10.2.4] ist dann f ein Nichtnullteiler von A und A/fA flach über $\mathcal{O}_{X,v}$.

ii) Nach i) existieren $t \in A$ und $b_1, \ldots, b_k \in \mathcal{O}_{X,v}$, so daß gilt

(*) $z^k = t\cdot f + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_k$

Hieraus erhält man $\bar{z}^k = \bar{t}\cdot\bar{f} + \bar{b}_1\bar{z}^{k-1} + \ldots + \bar{b}_k$ und somit

(**) $(1-\bar{t}\cdot u)\bar{z}^k = \bar{b}_1\bar{z}^{k-1} + \ldots + \bar{b}_k$

Für jedes $i \in \{1,\ldots,k\}$ ist entweder $\bar{b}_i = 0$ oder $\bar{b}_i$ ist eine Einheit in B. Aus (**) folgt dann $\bar{b}_i = 0$ für jedes $i \in \{1,\ldots,k\}$, also $1 = \bar{t}\cdot u$. Damit ist $\bar{t}$ eine Einheit in B und t eine Einheit in A. Aus (*) folgt

$f = t^{-1}(z^k + (-b_1)z^{k-1} + \ldots + (-b_k))$.

Es sei nun $f = h\cdot(z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k)$ mit $h \in A$ und $a_1,\ldots,a_k \in \mathcal{O}_{X,v}$. Man hat dann $(u-\bar{h})\bar{z}^k = \bar{a}_1\bar{z}^{k-1} + \ldots + \bar{a}_k$. Wie eben folgt hieraus $\bar{a}_i = 0$ für jedes $i \in \{1,\ldots,k\}$ und $u = \bar{h}$. Also ist h eine Einheit in A und $a_1,\ldots,a_k$ liegen im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,v}$.

<u>Satz 3.6.</u>

Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1)(\mathbb{C})$. Sei p die Einschränkung der Projektion $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$ auf U, $p : U \to p(U) =: V$. Sei f eine isoalgebraische Funktion auf U, so daß $f|p^{-1}(v)$ mit Vielfachheit gerechnet genau k Nullstellen $(1 \leq k < \infty)$ auf $p^{-1}(v)$ besitzt für jedes $v \in V$. Es gelten dann

i) Sei X der durch f definierte isoalgebraische Teilraum von U und sei $q : X \to V$ die Einschränkung von p auf X. Es ist $q_*\mathcal{O}_X$ eine freie $(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}|V)$-Modulgarbe mit Basis 1, $t,\ldots,t^{k-1} \in \mathcal{O}_X(X)$, wobei t die Einschränkung der (n+1)-ten Koordinatenfunktion von $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ auf X ist.

ii) Zu jedem $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1}(U)$ existieren eindeutig bestimmte $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1}(U)$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(V)$, so daß
$$g = h \cdot f + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k \quad ,$$
wobei z die Einschränkung der (n+1)-ten Koordinatenfunktion von $A^n \times \mathbb{A}^1$ auf U ist und $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1}(U)$ bezüglich p als $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(V)$-Modul betrachtet wird.

iii) Es existieren $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1}(U)$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(V)$, so daß h keine Nullstellen hat und
$$f = h(z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k).$$

Beweis von i):

Aus 3.5.ii) folgt

(1) Ist v ein Punkt aus V und T eine offene semialgebraische Umgebung von $q^{-1}(v)$ in X, so gibt es eine offene semialgebraische Umgebung W von v in V, so daß $q^{-1}(W) \subseteq T$.

Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}|V$ und sei $a : \mathcal{O}^k \to q_*\mathcal{O}_X$ der durch $t^{k-1}, t^{k-2}, \ldots, 1 \in \mathcal{O}_X(X) = q_*\mathcal{O}_X(V)$ gegebene $\mathcal{O}$-Modulgarbenmorphismus. Es gilt

(2) Für jedes $v \in V$ ist die Halmabbildung $a_v : (\mathcal{O}^k)_v \to (q_*\mathcal{O}_X)_v$ ein Isomorphismus.

Denn: Es sei $q^{-1}(v) = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Nach (1) ist $(q_*\mathcal{O}_X)_v = \mathcal{O}_{X,x_1} \times \ldots \times \mathcal{O}_{X,x_r}$. Somit ist nach 3.5.i) $(q_*\mathcal{O}_X)_v$ ein freier $\mathcal{O}_v$-Modul vom Rang k. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $\bar{a}_v$: $(\mathcal{O}^k)_v \otimes_{\mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v/m_v \to (q_*\mathcal{O}_X)_v \otimes_{\mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v/m_v$ surjektiv ist, wobei m_v das maximale Ideal von $\mathcal{O}_v$ ist. Für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ sei

$x_i = (v,y_i)$ mit $y_i \in C$ und k_i die Vielfachheit der Nullstelle von $f|p^{-1}(v)$ im Punkt x_i. Für jedes $i \in \{1,\dots,r\}$ und $s \in \{0,1,\dots,k_i-1\}$ sei $b_{i,s} = (t-y_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(t-y_{i-1})^{k_{i-1}}\cdot (t-y_i)^s\cdot(t-y_{i+1})^{k_{i+1}}\cdot\ldots\cdot(t-y_r)^{k_r} \in \mathcal{O}_X(X)$. Für jedes $j \in \{1,\dots,r\} \setminus \{i\}$ ist das Bild von $b_{i,s}$ in $\mathcal{O}_{X,x_j}\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{O}_V/m_v$ Null. Die Bilder von $b_{i,0},\dots,b_{i,k_i-1}$ in $\mathcal{O}_{X,x_i}\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{O}_V/m_v$ bilden eine Basis des $\mathcal{O}_V/m_v$-Moduls $\mathcal{O}_{X,x_i}\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{O}_V/m_v$. Also bilden die von $b_{i,s} \in \mathcal{O}_X(X) = q_*\mathcal{O}_X(V)$ $(i=1,\dots,r,\ s=0,1,\dots,k_i-1)$ gegebenen Elemente von $(q_*\mathcal{O}_X)_v\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{O}_V/m_v$ eine Basis des $\mathcal{O}_V/m_v$-Moduls $(q_*\mathcal{O}_X)_v\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{O}_V/m_v$. Diese Basis liegt im Bild von $\overline{a}_v$.

Weiterhin gilt

(3) Es existieren semialgebraische Teilmengen $V_1,\dots,V_w$ von V und zu jedem $i \in \{1,\dots,w\}$ semialgebraische Funktionen $s_{i,1},\dots,s_{i,l(i)} : V_i \to C$, so daß gilt
 a) V ist die disjunkte Vereinigung von $V_1,\dots,V_w$
 b) Ist $v \in V_i$ und sind $x,y \in \{1,\dots,l(i)\}$ mit $x \neq y$, so ist $s_{i,x}(v) \neq s_{i,y}(v)$.
 c) Ist $v \in V_i$, so ist $q^{-1}(v) = \{(v,s_{i,1}(v)),\dots,(v,s_{i,l(i)}(v$
 d) Zu vorgegebenen $i \in \{1,\dots,w\}$ und $j \in \{1,\dots,l(i)\}$ ist die Vielfachheit der Nullstelle von $f|p^{-1}(v)$ in $(v,s_{i,j}(v))$ unabhängig von $v \in V_i$.

Denn: Für jedes $g \in \mathbb{N}$ sei $F_g = \{x \in X | f|p^{-1}(p(x))$ hat in x eine Nullstelle der Vielfachheit $g\}$. Es ist $F_g = \{x \in X | (D^i f)(x) = 0$ für $i = 0,\dots,g-1$ und $(D^g f)(x) \neq 0\}$, wobei D die Ableitung nach der $(n+1)$-ten Koordinatenfunktion ist. Deshalb ist jedes F_g eine semialgebraische Teilmenge von X. Der Satz von Hardt ([DK_1, §6]), angewendet auf $q : (X,F_1,F_2,\dots,F_k)\to V$, liefert (3).

Es wird nun gezeigt, daß der Garbenmorphismus $a : \mathcal{O}^k \to q_*\mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus ist. Seien $\tilde{V}$ eine offene semialgebraische Teilmenge von V und $g \in \mathcal{O}_X(q^{-1}(\tilde{V})) = q_*\mathcal{O}_X(\tilde{V})$. Wähle gemäß (2) zu jedem $v \in \tilde{V}$ die eindeutig bestimmten Elemente $a_{1v},\dots,a_{kv} \in \mathcal{O}_v$, so daß $a_v((a_{1v},\dots,a_{kv})) = g_v$. Zu zeigen ist, daß isoalgebraische Funktionen $a_1,\dots,a_k \in \mathcal{O}(\tilde{V})$ existieren, so daß $(a_i)_v = a_{iv}$ für jedes $v \in \tilde{V}$ und jedes $i \in \{1,\dots,k\}$ (denn 1.2.8., nicht angewendet auf $q_*\mathcal{O}_X$, sondern angewendet auf $\mathcal{O}_X$ ergibt dann $a((a_1,\dots,a_k)) = g$).
Sei $v \in \tilde{V}$ gegeben. Es existieren dann eine offene semialgebraische Umgebung W von v in $\tilde{V}$ und $b_1,\dots,b_k \in \mathcal{O}(W)$, so daß $(b_i)_w = a_{iw}$ für jedes $w \in W$ und jedes $i \in \{1,\dots,k\}$ (Denn es existieren eine offene semialgebraische Umgebung W_1 von v in $\tilde{V}$ und $b_1,\dots,b_k \in \mathcal{O}(W_1)$, so daß $(b_i)_v = a_{iv}$ für jedes $i \in \{1,\dots,k\}$. Es ist dann $a((b_1,\dots,b_k))_v = g_v$. Also existiert eine offene semialgebraische Umgebung W von v in W_1, so daß $a((b_1,\dots,b_k))_w = g_w$ für jedes $w \in W$. Da a_w ein Isomorphismus ist für jedes $w \in W$, ist $(b_i)_w = a_{iw}$ für jedes $w \in W$ und jedes $i \in \{1,\dots,k\}$.). Also gibt es Funktionen $a_1,\dots,a_k : \tilde{V} \to C$, so daß es zu jedem $v \in \tilde{V}$ eine offene semialgebraische Umgebung in $\tilde{V}$ gibt, auf der $a_1,\dots,a_k$ isoalgebraisch sind, und so daß $(a_i)_v = a_{iv}$ für jedes $v \in \tilde{V}$ und

jedes $i \in \{1,\dots,k\}$. Nach 2.2. ist noch zu zeigen, daß diese $a_1,\dots,a_k$ semialgebraische Funktionen sind. Wie man nach einigen Überlegungen erkennt, folgt dies aus (3).

Beweis von ii):

Gegeben sei ein $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1}(U)$. Nach i) existieren eindeutig bestimmte $a_1,\dots,a_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(V)$, so daß $g|X = a_1t^{k-1} + \dots + a_k$.

Somit gilt:

(*) Zu jedem $x \in X$ existiert ein $H_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1,x}$, so daß in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1,x}$ gilt: $g_x = H_x \cdot f_x + (a_1)_x(z^{k-1})_x + \dots + (a_k)_x$.

Auf $U \setminus X$ hat man natürlich eine isoalgebraische Funktion H, so daß auf $U \setminus X$ gilt $g = H \cdot f + a_1z^{k-1} + \dots + a_k$. Nach (*) setzt sich H zu einer Funktion $h : U \to C$ fort, für die gilt: Zu jedem $x \in U$ gibt es eine offene semialgebraische Umgebung in U, auf der h isoalgebraisch ist, und auf U ist $g = h \cdot f + a_1z^{k-1} + \dots + a_k$. Da $U \setminus X$ dicht in U ist, ist h semialgebraisch. Nach Satz 2.2. ist h isoalgebraisch.

Beweis von iii):

Nach ii) existieren $H \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1}(U)$, $b_1,\dots,b_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(V)$, so daß $z^k = H \cdot f + b_1z^{k-1} + \dots + b_k$. Für jedes $v \in V$ hat $(z^k - b_1z^{k-1} - \dots - b_k)\,|p^{-1}(v)$ mit Vielfachheit gerechnet höchstens k Nullstellen. Deshalb ist $H(u) \neq 0$ für jedes $u \in U$. Es ist dann $f = \frac{1}{H} \cdot (z^k + (-b_1)z^{k-1} + \dots + (-b_k))$.

Aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz und Divisionssatz in seiner lokalen Form (Satz 3.5.) und in seiner globalen Form (Satz 3.6.) erhält man wie im komplex analytischen Fall das Korollar (siehe z.B. [H, II.8])

Korollar 3.7.

Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(C)$, $f_1,\ldots,f_r$ isoalgebraische Funktionen auf U und J die von $f_1,\ldots,f_r$ erzeugte Idealgarbe auf U. Zu jedem $x \in U$ existiert eine offene semialgebraische Umgebung V von x in U, für die gilt: Ist $g \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}^n}(V)$ mit $g_x \in J_x$, so existieren $g_1,\ldots,g_r \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}^n}(V)$, so daß auf V $g = g_1 f_1 + \ldots + g_r f_r$.

Bemerkung:

Zum Beweis des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes und Divisionssatzes wurde nur Lemma 3.2. benötigt. Dieses ist auch im Nashfall richtig. Deshalb läßt sich für Nashfunktionen der Weierstraßsche Vorbereitungssatz und Divisionssatz im lokalen Fall (Satz 3.5.) genauso beweisen wie für isoalgebraische Funktionen. Auch die globale Form (Satz 3.6.) ist für Nashfunktionen richtig, wenn man voraussetzt, daß $q: X \to V$ endlich ist.

§4 - Endliche Abbildungen

Das erste Ziel dieses Paragraphen ist, den Kohärenzsatz für endliche isoalgebraische Morphismen zu beweisen. Der Beweisgang ist ähnlich wie im komplex analytischen Fall (siehe z.B. [N]).

Proposition 4.1.

Sei $f: X \to Y$ eine endliche Abbildung zwischen semialgebraischen Räumen. Sei $(U_i \mid i = 1,\dots,r)$ eine Überdeckung von X. Dann gibt es eine Überdeckung $(V_j \mid j = 1,\dots,s)$ von Y, so daß für jedes V_j gilt: jede Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(V_j)$ ist in einem U_i enthalten.

Beweis:

OE ist Y affin. Dann ist auch X affin. Nach dem Satz von Hardt ([DK_1, §6]) existiert eine Zerlegung von Y in semialgebraische Teilmengen, $Y = T_1 \cup \dots \cup T_n$, so daß $(f^{-1}(T_i); f^{-1}(T_i) \cap U_1, \dots, f^{-1}(T_i) \cap U_r)$ bezüglich f trivial über T_i ist $(i = 1,\dots,n)$. Sei $\psi: N \xrightarrow{\sim} Y$ die erste baryzentrische Unterteilung einer simultanen Triangulierung von $Y, T_1,\dots,T_n$. Nach [DK_3] gibt es einen geometrischen simplizialen Komplex M, einen semialgebraischen Isomorphismus $\varphi: M \to X$ und eine simpliziale Abbildung $\alpha: M \to N$, so daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ N & \xrightarrow[\psi]{} & Y \end{array}$$

Da α simplizial ist und nach Konstruktion von ψ, ist φ eine simultane Triangulierung von $X, U_1,\dots,U_r$. Seien $e_1,\dots,e_s \in Y$ die Ecken der Triangulierung $\psi : N \to Y$ und sei $V_i = \mathrm{Stern}(e_i) \subseteq Y$ für $i = 1,\dots,s$. Gegeben sei ein $t \in \{1,\dots,s\}$. Es sei $f^{-1}(e_t) = \{x_1,\dots,x_p\}$. $x_1,\dots,x_p$ sind dann Ecken der Triangulierung $\varphi : M \to X$. Es ist $f^{-1}(V_t) = \mathrm{Stern}(x_1) \cup \dots \cup \mathrm{Stern}(x_p)$ und diese Vereinigung ist eine disjunkte Vereinigung. Ist ein x_j in einem U_i enthalten, so ist auch $\mathrm{Stern}(x_j) \subseteq U_i$.

<u>Proposition 4.2.</u>

Sei $f : X \to Y$ eine endliche Abbildung zwischen semialgebraischen Räumen. Dann ist f_* ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben auf X in die Kategorie der abelschen Garben auf Y.

Beweis:

Sei $h : F \to G$ ein surjektiver Garbenmorphismus auf X. Zu zeigen ist, daß $f_*(h) : f_*(F) \to f_*(G)$ surjektiv ist. Gegeben seien eine offene semialgebraische Teilmenge V von Y und ein $\tilde{s} \in f_*(G)(V)$, d.h. ein $s \in G(f^{-1}(V))$. Es gibt eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von $f^{-1}(V)$, so daß man zu jedem $i \in I$ ein $s_i \in F(U_i)$ hat mit $h(s_i) = s|U_i$. Nach Proposition 4.1. gibt es eine Überdeckung $(V_j \mid j \in J)$ von V, für die gilt: Ist $f^{-1}(V_j) = \bigcup_{k=1}^{n(j)} Z_k$ die Zerlegung von $f^{-1}(V_j)$ in Zusammenhangskomponenten, so ist jedes Z_k in einem $U_{i(k)}$ $(i(k) \in I)$ enthalten. Sei t_j der Schnitt von F über $f^{-1}(V_j)$, der gegeben ist durch $t_j|Z_k = s_{i(k)}|Z_k$ $(k = 1,\dots,n(j))$. t_j gibt ein $\tilde{t}_j \in f_*(F)(V_j)$ mit $f_*(h)(\tilde{t}_j) = \tilde{s}|V_j$.

Lemma 4.3.

Sei $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume, so daß $f_*\mathcal{O}_X$ eine kohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe ist. Dann ist f_*F eine kohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe für jede kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe F.

Beweis:

Es gibt eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X, so daß man auf jedem U_i eine exakte Sequenz hat $\mathcal{O}_X^{m_i}|U_i \to \mathcal{O}_X^{n_i}|U_i \to F|U_i \to 0$. OE ist $m_i = m$ und $n_i = n$ für jedes $i \in I$. Nach Proposition 4.1. existiert eine Überdeckung $(V_j | j \in J)$ von Y, so daß man auf jedem $f^{-1}(V_j)$ eine exakte Sequenz hat $\mathcal{O}_X^m|f^{-1}(V_j) \to \mathcal{O}_X^n|f^{-1}(V_j) \to F|f^{-1}(V_j) \to 0$. Nach Proposition 4.2. hat man dann eine exakte Sequenz auf V_j $(f_*\mathcal{O}_X)^m|V_j \to (f_*\mathcal{O}_X)^n|V_j \to f_*F|V_j \to 0$. Also ist $f_*F|V_j$ kohärent.

Lemma 4.4.

Seien X, Y isoalgebraische Räume und $i: Y \to X$ eine Einbettung. Sei F eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe. F ist genau dann eine kohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe, wenn i_*F eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe ist.

Beweis:

Nach 1.2.6. ist $F = i^*i_*F$ kohärent, wenn i_*F kohärent ist. Es ist $i_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/J$, wobei J eine kohärente Idealgarbe auf X ist. Nach 4.3. ist i_*F kohärent, wenn F kohärent ist.

Lemma 4.5.

Sei $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus von Schemata und sei F

eine kohärente α_X-Modulgarbe auf X^h. Dann ist $(f^h)_*(F)$ eine kohärente α_Y-Modulgarbe.

Beweis:
OE ist Y ein Unterschema eines $\mathbb{A}^m$, $i : Y \hookrightarrow \mathbb{A}^m$. Nach Lemma 4.4. genügt es Lemma 4.5. für $i \cdot f$ zu beweisen. Also OE $Y = \operatorname{Spec} A$ mit $A = C[X_1,\dots,X_m]$. Es ist $X = \operatorname{Spec} B$, wobei B als A-Modul endlich erzeugt ist. Sei $e_1,\dots,e_n \in B$ ein Erzeugendensystem der A-Algebra B. Sei $p_i \in A[T_i]$ ein normiertes Polynom mit $p_i(e_i) = 0$ $(i=1,\dots,n)$. $p_1,\dots,p_n$ liegen im Kern des surjektiven A-Algebrenhomomorphismus $A[T_1,\dots,T_n] \to B$, $T_i \mapsto e_i$. Man hat deshalb das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} B \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & \operatorname{Spec} (A[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n)) \arrow[dl, "g"] \\
& \operatorname{Spec} A &
\end{tikzcd}\quad ,$$

wobei e eine abgeschlossene Immersion und g der kanonische Morphismus ist. Nach Lemma 4.4. ist Lemma 4.5. nur für g zu beweisen. Es ist also zu zeigen:

(*) Ist Y ein $\mathbb{A}^m$ und X das durch normierte Polynome $p_i \in \mathcal{O}_Y(Y)[T_i]$ $(i = 1,\dots,n)$ gegebene Unterschema von $Y \times \mathbb{A}^n$ und $f : X \to Y$ die Einschränkung der Projektion $Y \times \mathbb{A}^n \to Y$ auf X, so ist $(f^h)_*(F)$ eine kohärente α_Y-Modulgarbe für jede kohärente α_X-Modulgarbe F auf X^h.

Es wird (*) durch vollständige Induktion nach n bewiesen. Der Fall $n = 1$ folgt aus Satz 3.6.i) und Lemma 4.3..
Induktionsschritt: Sei W das durch p_n gegebene Unterschema von $Y \times \mathbb{A}^n = (Y \times \mathbb{A}^{n-1}) \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{m+(n-1)} \times \mathbb{A}^1$ und sei $w : W \to Y \times \mathbb{A}^{n-1}$ die Einschränkung der Projektion $(Y \times \mathbb{A}^{n-1}) \times \mathbb{A}^1 \to Y \times \mathbb{A}^{n-1}$ auf W.

X ist ein Unterschema von W, $a : X \hookrightarrow W$. Sei Z das durch $p_1, \dots, p_{n-1}$ gegebene Unterschema von $Y \times \mathbb{A}^{n-1}$, $b : Z \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^{n-1}$, und sei $z : Z \to Y$ die Einschränkung der Projektion $Y \times \mathbb{A}^{n-1} \to Y$ auf Z. Man hat einen Morphismus $q : X \to Z$, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "a"] \arrow[d, "q"'] & W \arrow[d, "w"] \\ Z \arrow[r, hook, "b"'] & Y \times \mathbb{A}^{n-1} \end{tikzcd}$$

und so daß $f = z \circ q$. Nach Lemma 4.4. und da (*) für n = 1 gilt, ist $(b^h)_*(q^h)_*(F) = (w^h)_*(a^h)_*(F)$ kohärent. Deshalb ist nach Lemma 4.4. auch $(q^h)_*(F)$ kohärent. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $(f^h)_*(F) = (z^h)_*(q^h)_*(F)$ kohärent.

<u>Satz 4.6.</u>

Sei $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume und sei F eine kohärente Garbe auf X. Dann ist f_*F kohärent.

Beweis:

OE ist Y ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas Y_o. Nach Korollar 1.3.10. existieren eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X, Schemata X_i, offene isoalgebraische Teilräume W_i von X_i, Morphismen $f_i : X_i \to Y_o$ von Schemata und isoalgebraische Isomorphismen $p_i : W_i \to U_i$, so daß für jedes $i \in I$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} W_i \subseteq X_i^h \arrow[dr, "f_i^h"] \arrow[d, "p_i"'] & \\ U_i \arrow[r, "f \mid U_i"'] & Y_o^h \end{tikzcd}$$

Nach Proposition 4.1. gibt es eine Überdeckung $(V_j \mid j \in J)$ von

Y, so daß jede Zusammenhangskomponente eines $f^{-1}(V_j)$ in einem U_i enthalten ist. Es genügt Satz 4.6. zu beweisen, indem man Y durch ein V_j und X durch eine Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(V_j)$ ersetzt. Also ist OE X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas X_o, Y ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas Y_o und $f: X \to Y$ die Einschränkung von f_o^h auf X, wobei $f_o: X_o \to Y_o$ ein Morphismus von Schemata ist. Die Menge $W = \{x \in X_o \mid f_o$ ist (Zariski-) quasiendlich in $x\}$ ist Zariski-offen in X_o. Nach Proposition 1.5.4. ist $X \subseteq W$. Indem X_o durch W ersetzt ist also OE f_o quasiendlich. Nach Zariskis Hauptsatz ([EGA III, 4.4.3]) ist dann sogar OE f_o endlich.
Es seien $Z = (f_o^h)^{-1}(Y)$ und $g = f_o^h | Z : Z \to Y$. X ist eine offene semialgebraische Teilmenge von Z. Da $g|X : X \to Y$ endlich ist, ist X auch eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von Z. Ist F_o die Fortsetzung von F durch Null auf Z, so ist F_o eine kohärente Garbe auf Z. Nach Lemma 4.5. ist $g_*\mathcal{O}_Z = (f_o^h)_*\mathcal{O}_{X_o}|Y$ kohärent. Nach Lemma 4.3. ist dann auch $f_*F = g_*F_o$ kohärent.

Korollar 4.7.

Seien Y ein isoalgebraischer Raum, U eine offene Teilmenge von $Y \times (\mathbb{A}^1)^h$, p die Einschränkung der Projektion $Y \times (\mathbb{A}^1)^h \to Y$ auf U, $V = p(U)$ und f eine isoalgebraische Funktion auf U, so daß $f|p^{-1}(v)$ mit Vielfachheit gerechnet genau k Nullstellen $(1 \leq k < \infty)$ auf $p^{-1}(v)$ besitzt für jedes $v \in V$. Sei X der durch f definierte isoalgebraische Teilraum von U und sei

$q: X \to V$ die Einschränkung von p auf X.
Dann ist $q_*\mathcal{O}_X$ eine freie $\mathcal{O}_V$-Modulgarbe vom Rang k.

Beweis:
Nach (1) aus dem Beweis von Satz 3.6. ist $q: X \to V$ endlich. Also ist $q_*\mathcal{O}_X$ eine kohärente Garbe. 4.7. folgt nun aus dem Punkt (2) aus dem Beweis von Satz 3.6. und Korollar 1.2.10..

Korollar 4.8.
Sei $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume. Dann ist f(X) eine isoalgebraische Teilmenge von Y.

Beweis:
Ist J der Kern von $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, so ist $f(X) = \mathrm{supp}(\mathcal{O}_Y/J)$.

Korollar 4.9.
Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, der quasi-endlich in einem Punkt $x \in X$ ist. Sei W eine offene semialgebraische Umgebung von $y = f(x)$ in Y und seien $g_1, \dots, g_r$ isoalgebraische Funktionen auf W, so daß $(g_1)_y, \dots, (g_r)_y$ den Kern von $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ erzeugen. Es gibt eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X und eine offene semialgebraische Umgebung V von y in W, so daß $f(U) = \{v \in V \mid g_1(v) = \dots = g_r(v) = 0\}$.

Beweis:
Nach Satz 3.3. ist OE f endlich. Es gilt dann auch OE $f^{-1}(y) =$

$\{x\}$. Sei J der Kern von $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. Es gibt eine offene semialgebraische Umgebung V von y in W, so daß $g_1|V,\dots,g_r|V$ die Idealgarbe J auf V erzeugen. Es ist dann $f(f^{-1}(V)) = \{v \in V | g_1(v) = \dots = g_r(v) = 0\}$.

Nach dem Beweis des Kohärenzsatzes für endliche Abbildungen wird nun noch gezeigt, daß sich auch in der isoalgebraischen Geometrie, entsprechend wie in der algebraischen Geometrie oder komplex analytischen Geometrie, endliche Morphismen als Spektren kohärenter Algebrengarben ergeben.
Eine $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe auf einem isoalgebraischen Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt von endlichem Typ bzw. kohärent, wenn sie als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von endlichem Typ bzw. kohärent ist. Für eine $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe F und $f_1,\dots,f_n \in F(X)$ bezeichnet $(f_1,\dots,f_n)$ die von $f_1,\dots,f_n$ erzeugte Idealgarbe von F. Ordnet man jeder offenen Teilmenge U von X die $\mathcal{O}_X(U)$-Algebra $\mathcal{O}_X(U)[T_1,\dots,T_n]$ zu, so erhält man eine Garbe. Sie wird mit $\mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]$ bezeichnet.

<u>Lemma 4.10.</u>
Seien X ein isoalgebraischer Raum und F eine $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe vom endlichen Typ. Es gelten

i) Ist G eine von endlich vielen Elementen aus $F(X)$ erzeugte Idealgarbe von F, so ist G als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von endlichem Typ.

ii) Sei $s \in F(X)$. Es existiert eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X, so daß s auf jedem U_i ganz über $\mathcal{O}_X(U_i)$ ist, d.h. es existieren $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{O}_X(U_i)$ mit $(s|U_i)^n + a_1(s|U_i)^{n-1} +$

$\dots + a_n = 0$.

Beweis:

i) Da F von endlichem Typ ist, hat man OE einen surjektiven $\mathcal{O}_X$-Modulgarbenmorphismus $\mathcal{O}_X^m \to F$. Weiterhin hat man auch einen surjektiven F-Modulgarbenmorphismus $F^n \to G$. Also gibt es einen surjektiven $\mathcal{O}_X$-Modulgarbenmorphismus $\mathcal{O}_X^{m\cdot n} \to G$.

ii) OE existieren $s_1, \dots, s_n \in F(X)$, die F als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe erzeugen. Sei $e \in F(X)$ der Einsschnitt von F. Es existiert eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$, so daß für jedes $i \in I$ gilt: $e|U_i$, $s|U_i$ und alle $(s_p \cdot s_q)|U_i$ $(p = 1, \dots, n$, $q = 1, \dots, n)$ liegen in dem von $s_1|U_i, \dots, s_n|U_i$ erzeugten $\mathcal{O}_X(U_i)$-Untermodul M von $F(U_i)$. Dann ist M eine $\mathcal{O}_X(U_i)$-Unteralgebra von $F(U_i)$ und $s|U_i$ ist darin enthalten. Deshalb genügt $s|U_i$ einer ganzen Gleichung über $\mathcal{O}_X(U_i)$.

Lemma 4.11.

i) Sei X ein isoalgebraischer Raum. Gegeben seien normierte Polynome $p_i \in \mathcal{O}_X(X)[T_i]$ für $i = 1, \dots, n$ und Polynome $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}_X(X)[T_1, \dots, T_n]$. Dann ist $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_n]/(p_1, \dots, p_n, g_1, \dots, g_m)$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

ii) Sei F eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe auf einem isoalgebraischen Raum X. Dann gibt es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X, so daß auf jedem U_i $F|U_i$ als $\mathcal{O}_X|U_i$-Algebrengarbe isomorph ist zu einer Algebrengarbe von der in i) angegebenen Form.

Beweis:

i) Es ist $\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n)$ eine freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von endlichem Rang, also kohärent. Es seien $\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_m$ die von $g_1,\ldots,g_m$ gegebenen Elemente aus $\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n)(X)$. Nach Lemma 4.10.i) ist $(\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_m)$ kohärent. Also ist $\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n,$ $g_1,\ldots,g_m) = (\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n))/(\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_m)$ kohärent.

ii) Nach Lemma 4.10.ii) kann man OE annehmen: F wird als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von $s_1,\ldots,s_n \in F(X)$ erzeugt und jedes s_i ist ganz über $\mathcal{O}_X(X)$. Sei f der $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbenmorphismus $\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n] \to F$, $T_i \mapsto s_i$. f ist surjektiv und es existieren normierte Polynome $p_i \in \mathcal{O}_X(X)[T_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$, so daß jedes p_i in $\ker(f)(X)$ liegt. Also faktorisiert f über $\overline{f} : \mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n) \to F$. Da $\ker(\overline{f})$ kohärent ist, kann man OE annehmen, daß $\ker(\overline{f})$ als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von $\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_m \in \ker(\overline{f})(X)$ erzeugt wird. Weiterhin existieren OE $g_1,\ldots,g_m \in$ $\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n](X)$, so daß $\overline{g}_i$ durch g_i gegeben ist. Es ist dann F als $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe isomorph zu $\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/$ $p_1,\ldots,p_n, g_1,\ldots,g_m)$.

Sei X ein isoalgebraischer Raum und sei F eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe auf X. Auf der Kategorie der isoalgebraischen Räume über X betrachte man folgenden kontravarianten Funktor in die Kategorie der Mengen

$$(f : Y \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-Alg.}}(F, f_*\mathcal{O}_Y).$$

Satz 4.12.

Dieser Funktor ist repräsentierbar, $a_F : \mathrm{Spech}(F) \to X$, $b_F : F \to (a_F)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spech}(F)})$. a_F ist ein endlicher Morphismus und b_F ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Nach Lemma 4.11.ii) kann man OE annehmen $F = \mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n, g_1,\dots,g_m)$, wobei $g_1,\dots,g_m \in \mathcal{O}_X(X)[T_1,\dots,T_n]$ und $p_i \in \mathcal{O}_X(X)[T_i]$ normiert $(i = 1,\dots,n)$. Sei H der durch $p_1,\dots,p_n$, $g_1,\dots,g_m$ definierte isoalgebraische Teilraum von $X\times(\mathbb{A}^n)^h$ und sei $t : H \to X$ die Einschränkung der Projektion $X\times(\mathbb{A}^n)^h \to X$ auf H. Sei $\bar{\alpha} : \mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n] \to t_*\mathcal{O}_H$ der $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbenmorphismus, bei dem T_i auf das durch die i-te Koordinatenfunktion des $\mathbb{A}^n$ gegebene Element von $t_*\mathcal{O}_H(X)$ abgebildet wird. Nach der Definition von H faktorisiert $\bar{\alpha}$ über $\alpha : \mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n, g_1,\dots,g_m) \to t_*\mathcal{O}_H$.

t und α repräsentieren den Funktor, denn: Sei $f : Y \to X$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume und sei $\beta : \mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n, g_1,\dots,g_m) \to f_*\mathcal{O}_Y$ ein $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbenmorphismus. Seien $\bar{T}_1,\dots,\bar{T}_n$ die durch $T_1,\dots,T_n$ gegebenen Elemente aus $\mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n, g_1,\dots,g_m)(X)$. Nach 1.3.6. bestimmen $\beta(\bar{T}_1),\dots,\beta(\bar{T}_n) \in f_*\mathcal{O}_Y(X) = \mathcal{O}_Y(Y)$ einen X-Morphismus $\bar{g} : Y \to X\times(\mathbb{A}^n)^h$. Nach 1.3.2. faktorisiert $\bar{g}$ über einen Morphismus $g : Y \to H$. Sei $\sigma : t_*\mathcal{O}_H \to f_*\mathcal{O}_Y$ der durch g gegebene $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbenmorphismus. Nach Konstruktion von g kommutiert dann

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & t_*\mathcal{O}_H \arrow[d, "\sigma"] \\ & f_*\mathcal{O}_Y \end{tikzcd} .$$

g ist aber auch der einzige X-Morphismus $Y \to H$, der obiges Dreieck kommutativ macht.

Es ist klar, daß $t : H \to X$ endlich ist.

α ist ein Isomorphismus, denn: Sei H' der durch $p_1,\dots,p_n$ definierte isoalgebraische Teilraum von $X\times(\mathbb{A}^n)^h$ und sei α' der entsprechend α definierte $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbenmorphismus $\mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n) \to t'_*\mathcal{O}_{H'}$, wobei t' die Einschränkung der Projektion $X\times(\mathbb{A}^n)^h \to X$ auf H' ist. Es wird zunächst gezeigt, daß α' ein Isomorphismus ist. Da $t'_*\mathcal{O}_{H'}$ kohärent ist (Satz 4.6.), genügt es dies halmweise zu überprüfen (Korollar 1.2.10.). Sei k_i der Grad von p_i und sei H_i der von p_i definierte isoalgebraische Teilraum von $X\times(\mathbb{A}^1)^h$ $(i = 1,\dots,n)$. Es ist $H' = H_1\times_X H_2\times_X \dots\times_X H_n$. Durch vollständige Induktion nach n zeigt man mit Hilfe des Weierstraßschen Divisionssatzes 3.5.i), daß $(t'_*\mathcal{O}_{H'})_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul vom Rang $k_1\cdot\ldots\cdot k_n$ ist für jedes $x \in X$. Ebenso ist $(\mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n))_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul vom Rang $k_1\cdot\ldots\cdot k_n$ für jedes $x \in X$. Es ist leicht einzusehen, daß $(\mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n))_x\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_{X,x}/m_x \to (t'_*\mathcal{O}_{H'})_x\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_{X,x}/m_x$ surjektiv ist (m_x ist das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$). Also ist $(\alpha')_x$ und damit auch α' ein Isomorphismus. Sei J die Idealgarbe auf H', die erzeugt wird von den isoalgebraischen Funktionen auf H', die durch $g_1,\dots,g_m$ gegeben sind. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_m) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tau"'] & \mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n) \arrow[d, "\alpha'"] \\ t'_*J \arrow[r, hook] & t'_*\mathcal{O}_{H'}, \end{tikzcd}$$

wobei $\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_m$ die von $g_1,\ldots,g_m$ gegebenen Elemente von $\mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n)(X)$ sind. τ ist ein Isomorphismus, denn es gilt allgemein (nach Proposition 4.1.): Sei $g: V \to W$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume und sei I die von $s_1,\ldots,s_m \in \mathcal{O}_V(V)$ erzeugte Idealgarbe auf V. Dann ist g_*I die von $s_1,\ldots,s_m \in g_*\mathcal{O}_V(W)$ erzeugte Idealgarbe der $\mathcal{O}_W$-Algebrengarbe $g_*\mathcal{O}_V$.

H ist der durch J definierte isoalgebraische Teilraum von H'. Sei $j: H \to H'$ die Inklusion. Man hat die exakte Sequenz $0 \to J \to \mathcal{O}_{H'} \to j_*\mathcal{O}_H \to 0$ und somit nach 4.2. auch die exakte Sequenz $0 \to t'_*J \to t'_*\mathcal{O}_{H'} \to t'_*j_*\mathcal{O}_H \to 0$. Dadurch erhält man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"', "\simeq"] & \mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"', "\simeq"] & \mathcal{O}_X[T_1,\ldots,T_n]/(p_1,\ldots,p_n,g_1,\ldots,g_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & t'_*J \arrow[r] & t'_*\mathcal{O}_{H'} \arrow[r] & t_*\mathcal{O}_H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Also ist α ein Isomorphismus.

<u>Korollar 4.13.</u>

Sei $f: Y \to X$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume. Man betrachte $a = a_{f_*\mathcal{O}_Y}: \mathrm{Spech}(f_*\mathcal{O}_Y) \to X$. Die Identität $id: f_*\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_Y$ definiert einen X-Morphismus $g: Y \to \mathrm{Spech}(f_*\mathcal{O}_Y)$. g ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Sei $Z = \mathrm{Spech}(f_*\mathcal{O}_Y)$ und $\sigma : a_*\mathcal{O}_Z \to f_*\mathcal{O}_Y$ der durch g gegebene Garbenmorphismus. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} f_*\mathcal{O}_Y \arrow[r, "b_{f_*\mathcal{O}_Y}"] \arrow[dr, "id"'] & a_*\mathcal{O}_Z \arrow[d, "\sigma"] \\ & f_*\mathcal{O}_Y \end{tikzcd}$$

$b_{f_*\mathcal{O}_Y}$ ist ein Isomorphismus. Also ist σ ein Isomorphismus. a und f sind endliche Abbildungen. Deshalb gilt: g ist bijektiv und für jedes $y \in Y$ ist $\mathcal{O}_{Z,g(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ ein Isomorphismus. Nach Korollar 1.3.11.ii) ist g ein Isomorphismus.

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Seien F,G kohärente $\mathcal{O}_X$-Algebrengarben und sei $f : F \to G$ ein $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbenmorphismus. Es existiert dann genau ein X-Morphismus $h : \mathrm{Spech}(G) \to \mathrm{Spech}(F)$, so daß der durch h induzierte Morphismus $t : (a_F)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spech}(F)}) \to (a_G)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spech}(G)})$ ein kommutatives Diagramm liefert:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "b_F"] \arrow[d, "f"'] & (a_F)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spech}(F)}) \arrow[d, "t"] \\ G \arrow[r, "b_G"'] & (a_G)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spech}(G)}) \end{tikzcd} \quad .$$

h wird mit Spech(f) bezeichnet. Man hat dann den kontravarianten Funktor Spech von der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Algebrengarben in die Kategorie der isoalgebraischen Räume über X. Aus 4.12. und 4.13. folgt

Korollar 4.14.

Spech ist eine Äquivalenz von der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Algebrengarben in die Kategorie der isoalgebraischen

Räume über X, deren Strukturmorphismus endlich ist.

Korollar 4.15.

Sei $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume. Dann gibt es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von Y, so daß für jedes $i \in I$ gilt: Es existieren ein endlicher Morphismus von Schemata $f_i: X_i \to Y_i$, ein offener isoalgebraischer Teilraum V_i von Y_i und isoalgebraische Isomorphismen $p_i: U_i \to V_i$ und $q_i: f^{-1}(U_i) \to (f_i^h)^{-1}(V_i)$, so daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i) & \xrightarrow{q_i} & (f_i^h)^{-1}(V_i) \\ {\scriptstyle f|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i^h|} \\ U_i & \xrightarrow[p_i]{} & V_i \end{array}$$

Beweis:

Nach Korollar 4.13. ist $X = \mathrm{Spech}(F)$ das Spektrum einer kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Algebrengarbe F. Nach Lemma 4.11.ii) ist OE $F = \mathcal{O}_Y[T_1,\dots,T_n]/(p_1,\dots,p_n, g_1,\dots,g_m)$, wobei $g_1,\dots,g_m \in \mathcal{O}_Y(Y)[T_1,\dots,T_n]$ und $p_i \in \mathcal{O}_Y(Y)[T_i]$ normiert $(i = 1,\dots,n)$. Nach dem Beweis von Satz 4.12. ist X der isoalgebraische Teilraum von $Y \times (\mathbb{A}^n)^h$, der durch $p_1,\dots,p_n$, $g_1,\dots,g_m$ definiert ist. Nach 1.1.5. ist OE Y ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas Y_o und es existieren $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n, \tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_m \in \mathcal{O}_{Y_o}(Y_o)[T_1,\dots,T_n]$, so daß $p_i = \tilde{p}_i|Y$ $(i = 1,\dots,n)$ und $g_i = \tilde{g}_i|Y$ $(i = 1,\dots,m)$ und $\tilde{p}_i \in \mathcal{O}_{Y_o}(Y_o)[T_i]$ normiert. Sei X_o das durch $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n$, $\tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_m$ definierte Unterschema von $Y_o \times \mathbb{A}^n$. Sei f_o die Einschränkung der Projektion $Y_o \times \mathbb{A}^n \to Y_o$ auf X_o. Es ist f_o endlich, $X = (f_o^h)^{-1}(Y)$ und $f = f_o^h|X$.

§5 - Überlagerungsdarstellung irreduzibler isoalgebraischer Keime

Es wird die Überlagerungsdarstellung irreduzibler isoalgebraischer Keime wie in [F, §15] bewiesen.

Sei X ein isoalgebraischer Raum und sei $x \in X$. Auf der Menge der Paare (U,S), wobei U eine offene Teilmenge von X mit $x \in U$ und S eine isoalgebraische Teilmenge von U ist, wird folgende Äquivalenzrelation $\sim$ betrachtet: Es ist $(U,S) \sim (U',S')$ genau dann, wenn es eine offene Teilmenge V von X gibt mit $x \in V \subseteq U \cap U'$, so daß $S \cap V = S' \cap V$. Die Äquivalenzklassen von $\sim$ heißen die isoalgebraischen Keime von X in x. Auf der Menge der isoalgebraischen Keime von X in x hat man die Relation $\subseteq$ und die Operationen $\cap$ und $\cup$. Einem Ideal J von $\mathcal{O}_{X,x}$ ordnet man einen isoalgebraischen Keim $V(J)$ von X in x zu: Sind $f_1,\ldots,f_m \in \mathcal{O}_X(U)$, wobei U eine offene Teilmenge von X mit $x \in U$ ist, und erzeugen $(f_1)_x,\ldots,(f_m)_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ das Ideal J, so ist $(U,\{x \in U \mid f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\})$ ein Repräsentant von $V(J)$. Umgekehrt hat man zu einem isoalgebraischen Keim T von X in x ein Ideal $J(T)$ von $\mathcal{O}_{X,x}$: $J(T) = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid$ es existieren ein Repräsentant (U,S) von T und ein $g \in \mathcal{O}_X(U)$, so daß $g(y) = 0$ für jedes $y \in S$ und $g_x = f\}$. Ein isoalgebraischer Keim T von X in x heißt irreduzibel, wenn gilt: Sind T_1, T_2 isoalgebraische Keime von X in x mit $T = T_1 \cup T_2$, so ist

$T_1 = T$ oder $T_2 = T$. Die maximalen Elemente der Menge aller irreduziblen isoalgebraischen Keime von X in x, die in einem vorgegebenen isoalgebraischen Keim T von X in x enthalten sind, heißen die irreduziblen Komponenten von T. Die irreduziblen Komponenten des durch (X,X) repräsentierten isoalgebraischen Keims von X in x, heißen die lokalen irreduziblen Komponenten von X in x. X heißt lokal irreduzibel in x, wenn (X,X) einen irreduziblen isoalgebraischen Keim von X in x repräsentiert. X heißt lokal irreduzibel, wenn X in jedem Punkt lokal irreduzibel ist.

Aus Proposition 1.5.6. folgt

<u>Proposition 5.1.</u>

i) $T \mapsto J(T)$ ist eine Bijektion von der Menge der isoalgebraischen Keime von X in x auf die Menge der Ideale I von $\mathcal{O}_{X,x}$ mit $I = \sqrt{I}$. Die Umkehrabbildung ist $I \mapsto V(I)$.

Insbesondere gelten

ii) Sind $J_1, \ldots, J_m$ die minimalen Primideale von $\mathcal{O}_{X,x}$ so sind $V(J_1), \ldots, V(J_m)$ die lokalen irreduziblen Komponenten von X in x. Die Vereinigung der lokalen irreduziblen Komponenten von X in x ist der durch (X,X) repräsentierte isoalgebraische Keim von X in x.

iii) Ein reduzierter isoalgebraischer Raum X ist genau dann lokal irreduzibel in $x \in X$, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ integer ist.

Korollar 5.2.

Sei X ein isoalgebraischer Raum, der lokal irreduzibel in einem Punkt $x \in X$ ist. Dann ist $\dim_y X = \dim_x X$ für jedes y in einer Umgebung von x in X.

Beweis:

OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines reduzierten Schemas X_o. Da $\mathcal{O}_{X,x}$ integer ist, ist auch $\mathcal{O}_{X_o,x}$ integer. Also ist OE X_o irreduzibel. Dann ist $\dim \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ für jedes $y \in X$. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 1.5.4..

Korollar 5.3.

Sei X ein Schema und sei $x \in X(C)$. Es gibt einen etalen Morphismus $f: Y \to X$ von Schemata und ein $y \in Y(C)$ mit $f(y) = x$, so daß gilt: Sind $Y_1, \dots, Y_m$ die irreduziblen Komponenten von Y, so repräsentieren $(Y^h, Y_1(C)), \dots, (Y^h, Y_m(C))$ die lokalen irreduziblen Komponenten von Y^h in y.

Beweis:

Seien $J_1, \dots, J_m$ die minimalen Primideale von $\mathfrak{a}_{X,x}$. Man wähle Erzeugende $g_{i1}, \dots, g_{ik(i)} \in \mathfrak{a}_{X,x}$ des Ideals J_i $(i = 1, \dots, m)$. Es gibt einen etalen Morphismus von Schemata $f: Y \to X$, ein $y \in Y(C)$ mit $f(y) = x$ und $\tilde{g}_{ij} \in \mathcal{O}_Y(Y)$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, k(i))$, so daß $(f^h)^*_y(g_{ij}) =$

$(\tilde{g}_{ij})_y \in \mathfrak{a}_{Y,y}$ für $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,k(i)$. Also gilt für die minimalen Primideale $p_1,\dots,p_m$ von $\mathcal{O}_{Y,y}$: $p_1\mathfrak{a}_{Y,y},\dots,p_m\mathfrak{a}_{Y,y}$ sind die minimalen Primideale von $\mathfrak{a}_{Y,y}$. Seien $Y_1,\dots,Y_m$ die irreduziblen Komponenten von Y, die $p_1,\dots,p_m$ entsprechen. Auf den anderen irreduziblen Komponenten von Y liegt y nicht. Also sind OE $Y_1,\dots,Y_m$ die irreduziblen Komponenten von Y. Es gilt dann 5.3..

Bemerkung:
Sei X ein Nashraum. Ist T ein Nashkeim von X in $x \in X$ und $J(T) \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das zu T gehörige Ideal, so ist $\dim^{sa} T = \dim \mathcal{O}_{X,x}/J(T)$. Aus dem Nullstellensatz für die Ringe $\mathcal{N}_{\mathbb{A}^n}(U)$ (siehe [BE, Th. 8.1]) erhält man: $T \mapsto J(T)$ ist eine Bijektion von der Menge der Nashkeime von X in x auf die Menge der reellen Ideale von $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Umkehrabbildung ist $I \mapsto V(I)$. Insbesondere gilt: Ein Nashkeim T von X in x ist genau dann irreduzibel, wenn J(T) ein Primideal in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Ist I ein reelles Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ und sind $p_1,\dots,p_r$ die minimalen I umfassenden Primideale von $\mathcal{O}_{X,x}$ ($p_1,\dots,p_r$ sind dann ebenfalls reell), so sind $V(p_1),\dots,V(p_r)$ die irreduziblen Komponenten von V(I).

Satz 5.4.
Sei $p: X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume. Gegeben sei ein $x \in X$, so daß $\mathcal{O}_{X,x}$ integer, $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$ normal und $\mathcal{O}_{Y,p(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv und endlich ist. Dann existieren eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X,

eine offene zusammenhängende semialgebraische Umgebung V von p(x) in Y, ein normiertes Polynom $F \in \mathcal{O}_Y(V)[T]$ und ein Morphismus $q : U \to Z$, wobei Z der durch F definierte isoalgebraische Teilraum von $V \times (\mathbb{A}^1)^h$ ist, so daß gilt:

i) a) Die Diskriminante $\Delta \in \mathcal{O}_Y(V)$ von F ist ungleich Null.

b) Das Polynom $F_{p(x)} = T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathcal{O}_{Y,p(x)}[T]$ ist irreduzibel in $\mathcal{O}_{Y,p(x)}[T]$ und $a_1, \ldots, a_n$ liegen im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$.

c) $\deg F = [\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) : \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{Y,p(x)})]$.

ii) $\mathcal{O}_{Z,q(x)}$ ist integer, $\mathcal{O}_{Z,q(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ist injektiv und $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{Z,q(x)}) \to \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$ ist bijektiv.

iii) Es kommutiert

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p|U"'] & & Z \arrow[dl, "t"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

wobei t die Einschränkung der Projektion $V \times (\mathbb{A}^1)^h \to V$ auf Z ist. $p|U$, q, t sind endlich und surjektiv und ist $S = \{v \in V \mid \Delta(v) = 0\}$, so ist $q|U \setminus p^{-1}(S) : U \setminus p^{-1}(S) \to Z \setminus t^{-1}(S)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Wähle ein a aus dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, so daß $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{Y,p(x)})(a)$. Sei $F_o = T^n + b_1 T^{n-1} + \ldots + b_n \in \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{Y,p(x)})[T]$ das Minimalpolynom von a. Es ist $F_o \in \mathcal{O}_{Y,p(x)}[T]$ und die Diskriminante $\Delta_o \in \mathcal{O}_{Y,p(x)}$ von

F_o ist ungleich Null. Jedes b_i $(i = 1,\ldots,n)$ liegt im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$ (denn: Sei m das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$. Da a im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ liegt und da $F_o(a) = 0$, ist $b_n \in m$. Also ist $F_o \bmod m = T^k \cdot s$, wobei $k \in \mathbb{N}$, s ein normiertes Polynom aus $(\mathcal{O}_{Y,p(x)}/m)[T]$ ist und T^k und s teilerfremd in $(\mathcal{O}_{Y,p(x)}/m)[T]$ sind. Da $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$ henselsch ist, existieren normierte Polynome $P,Q \in \mathcal{O}_{Y,p(x)}[T]$, so daß $P \bmod m = T^k$, $Q \bmod m = s$ und $F_o = P \cdot Q$. Da F_o irreduzibel ist, ist $Q = 1$, also $F_o \bmod m = T^n$, woraus folgt $b_i \in m$ für $i=1,\ldots,n$). Man wähle eine offene semialgebraische Umgebung $\tilde{V}$ von $p(x)$ in Y und ein normiertes Polynom $\tilde{F} \in \mathcal{O}_Y(\tilde{V})[T]$, so daß $\tilde{F}_{p(x)} = F_o$. Seien $\tilde{Z}$ der durch $\tilde{F}$ definierte isoalgebraische Teilraum von $\tilde{V} \times (\mathbb{A}^1)^h$ und $\tilde{t} : \tilde{Z} \to \tilde{V}$ die Einschränkung der Projektion $\tilde{V} \times (\mathbb{A}^1)^h \to \tilde{V}$ auf $\tilde{Z}$. Es gibt nur einen Punkt $y \in \tilde{Z}$ mit $\tilde{t}(y) = p(x)$. Nach dem Weierstraßschen Divisionssatz 3.5.i) ist $\mathcal{O}_{\tilde{Z},y}$ kanonisch isomorph zu $\mathcal{O}_{Y,p(x)}[T]/(\tilde{F}_{p(x)})$. Sei $\varphi : \mathcal{O}_{Y,p(x)}[T]/(\tilde{F}_{p(x)}) = \mathcal{O}_{\tilde{Z},y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ der $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$-Algebrenhomomorphismus, der $T \bmod (\tilde{F}_{p(x)})$ auf a abbildet. φ ist injektiv, $\mathcal{O}_{\tilde{Z},y}$ ist integer und $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{\tilde{Z},y}) \to \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$ ist bijektiv. Wähle gemäß Korollar 1.3.9.ii) eine offene semialgebraische Umgebung $\tilde{U}$ von x in X und einen Morphismus $\tilde{q} : \tilde{U} \to \tilde{Z}$ mit $\tilde{q}(x) = y$ und $\tilde{q}_x^* = \varphi$. Nach eventueller Verkleinerung von $\tilde{U}$ ist $\tilde{q}$ ein $\tilde{V}$-Morphismus (d.h. $p(\tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$ und $\tilde{t} \circ \tilde{q} = p|\tilde{U}$) (nach Korollar 1.3.9.i)). OE sind $(\tilde{U},\mathcal{O}_X|\tilde{U})$ und $(\tilde{V},\mathcal{O}_Y|\tilde{V})$ reduziert und $(\tilde{U},\mathcal{O}_X|\tilde{U})$ ein lokal abgeschlossener isoalgebraischer Teilraum eines $\mathbb{A}^r$. Seien $z_1,\ldots,z_r$ die Einschränkungen der Koordinatenfunktionen des $\mathbb{A}^r$ auf $\tilde{U}$. Nach dem Satz vom universellen Nenner existieren $c_1,\ldots,c_r \in \mathcal{O}_{Y,p(x)}[a]$, so daß $\Delta_o \cdot (z_i)_x = c_i$ für $i=1,\ldots,r$. Also gilt nach geeigneter Verkleinerung von $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$

(*) Es existieren $\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_r \in \mathcal{O}_{\tilde{Z}}(\tilde{Z})$, so daß auf $\tilde{U}$ $\tilde{q}^*(\tilde{\Delta})\cdot z_i = \tilde{q}^*(\tilde{c}_i)$ für $i = 1,\ldots,r$, wobei $\tilde{\Delta} = \tilde{t}^*(d)$ und $d \in \mathcal{O}_Y(\tilde{V})$ die Diskriminante von $\tilde{F}$ ist.

Aufgrund von Korollar 4.9. existiert eine offene semialgebraische Umgebung W von y in $\tilde{Z}$, so daß nach geeigneter Verkleinerung von $\tilde{U}$ $\tilde{q}(\tilde{U}) = W$ und $\tilde{q} : \tilde{U} \to W$ endlich ist. Ist $\tilde{S} = \{w \in W \mid \tilde{\Delta}(w) = 0\}$, so ist $\tilde{q}|\tilde{U} \setminus \tilde{q}^{-1}(\tilde{S}) : \tilde{U} \setminus \tilde{q}^{-1}(\tilde{S}) \to W \setminus \tilde{S}$ ein Isomorphismus. Denn: Gegeben sei ein $w \in W \setminus \tilde{S}$. Es gibt ein $u \in \tilde{U} \setminus \tilde{q}^{-1}(\tilde{S})$ mit $\tilde{q}(u) = w$. u ist eindeutig festgelegt, denn nach (*) sind die Koordinaten von $u \in \tilde{U} \subseteq \mathbb{A}^r(C)$ $\left(\frac{\tilde{c}_1(w)}{\tilde{\Delta}(w)},\ldots,\frac{\tilde{c}_r(w)}{\tilde{\Delta}(w)}\right)$. Die Funktionen $w \mapsto \frac{\tilde{c}_i(w)}{\tilde{\Delta}(w)}$ sind isoalgebraisch auf $W \setminus \tilde{S}$. Also ist $\tilde{q}|\tilde{U} \setminus \tilde{q}^{-1}(\tilde{S})$ ein Isomorphismus ($\tilde{U} \setminus \tilde{q}^{-1}(\tilde{S})$ und $W \setminus \tilde{S}$ sind reduziert). Man wähle nun eine offene zusammenhängende semialgebraische Umgebung V von $p(x)$ in $\tilde{V}$, so daß $\tilde{t}^{-1}(V) \subseteq W$, und setze $U = \tilde{q}^{-1}(\tilde{t}^{-1}(V))$, $q = \tilde{q}|U$ und $F = \tilde{F}|V$. Es sind dann i), ii), iii) aus 5.4. erfüllt.

Korollar 5.5.

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, so daß f einen semialgebraischen Isomorphismus $|X| \to |Y|$

gibt. Sei X reduziert und Y normal. Dann ist f ein isoalgebraischer Isomorphismus.

Beweis:
Gegeben sei ein $x \in X$. Sei g der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Da f eine offene Abbildung ist, ist g injektiv. Nach Satz 3.3. ist g endlich. Sei p ein Primideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, so daß $\dim\mathcal{O}_{X,x} = \dim\mathcal{O}_{X,x}/p$. Es ist $g^{-1}(p) = (0)$, denn $\dim\mathcal{O}_{Y,f(x)} = \dim\mathcal{O}_{X,x} = \dim\mathcal{O}_{X,x}/p = \dim\mathcal{O}_{Y,f(x)}/g^{-1}(p)$. Wähle einen lokal abgeschlossenen isoalgebraischen Teilraum $(T,\mathcal{O}_T)$ von X, so daß $x \in T$ und $\mathcal{O}_{T,x} = \mathcal{O}_{X,x}/p$. Nach Korollar 4.9. gibt es eine offene semialgebraische Umgebung U von x in T, so daß f(U) eine offene semialgebraische Umgebung von f(x) in Y ist. Da f injektiv ist, ist U eine offene Teilmenge von X. Da X reduziert ist, folgt hieraus $p = (0)$. Also ist $\mathcal{O}_{X,x}$ integer.
Da f injektiv ist, folgt aus i)c) und iii) aus Satz 5.4., daß $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{Y,f(x)}) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$. Da $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ normal ist, ist g ein Isomorphismus. Nach Korollar 1.3.11. ist f ein Isomorphismus.

Um Satz 5.4. zur Untersuchung irreduzibler isoalgebraischer Keime benützen zu können, benötigt man das folgende Lemma.

Lemma 5.6.

Sei X ein isoalgebraischer Raum und sei $x \in X$. Es gibt eine offene Teilmenge U von X mit $x \in U$ und einen Morphismus $f: U \to (\mathbb{A}^n)^h$, so daß $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv und endlich ist.

Beweis:

Sei $n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$. OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas X_o. Da $n = \dim \mathcal{O}_{X_o,x}$, ist OE X_o ein n-dimensionales affines Schema. Sei $g: X_o \to \mathbb{A}^n$ ein endlicher Morphismus. Man setze $f = g^h | X$. Es ist dann $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ endlich. Da $\dim \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, f(x)} = \dim \mathcal{O}_{X,x}$, ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv.

§6 - Der Riemannsche Hebbarkeitssatz

Der 1. Riemannsche Hebbarkeitssatz wird in der komplexen Analysis im allgemeinen mittels Cauchyscher Integralformel bewiesen. Aus dem 1. Riemannschen Hebbarkeitssatz und der Überlagerungsdarstellung irreduzibler holomorpher Mengenkeime folgt

(*) Sei X ein normales Schema über $\mathbb{C}$ und sei U eine zusammenhängende offene Teilmenge von $X(\mathbb{C})$. Dann ist $U \cap X_{reg}(\mathbb{C})$ zusammenhängend.

Häufig wird (*) auch als eine Form des Hauptsatzes von Zariski bezeichnet. Wie sich in den nachfolgenden Beweisen zeigt, ist der isoalgebraische Riemannsche Hebbarkeitssatz über (C,R) äquivalent zu (*), formuliert in der semialgebraischen Topologie über (C,R). Im folgenden wird der Riemannsche Hebbarkeitssatz für beliebiges (C,R) bewiesen. Insbesondere ergibt sich dadurch ein Beweis für (*) ohne analytische Hilfsmittel. Es wird jedoch als algebraisches Hilfsmittel Satz 2.11. verwendet.

Definition 6.1.

Sei X ein semialgebraischer Raum und sei A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X, so daß $\mathring{A} = \emptyset$. Eine Funktion $f : X \setminus A \to C$ heißt lokal beschränkt auf X, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X gibt, so daß f auf $U \setminus A$ beschränkt ist. Eine Funktion $f : X \setminus A \to C$ heißt schwach lokal beschränkt auf X, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $K \in R$ gibt, so daß es in jeder Umgebung U von

x in X ein $y \in U \setminus A$ gibt mit $|f(y)| < K$.

Lemma 6.2.

Seien X ein normales Schema, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und $f \in \mathcal{A}_X(U)$. Dann existieren ein normales Schema X_o, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $X_o(C)$, eine Zariski-offene Teilmenge W von X_o mit $V \subseteq W$, ein $f_o \in \mathcal{O}_{X_o}(W)$ und ein endlicher Morphismus $p : X_o \to X$, so daß $p^h|V : V \to U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f_o|V$.

Beweis:

Nach Satz 2.1. existieren ein etaler Morphismus $g : W \to X$ von Schemata, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $W(C)$ und ein $f_o \in \mathcal{O}_W(W)$, so daß $g^h|V : V \to U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(g^h|V)^*(f) = f_o|V$. Nach dem Hauptsatz von Zariski ([EGA IV, 8.12.11]) hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & X_o \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

wobei X_o ein normales Schema, i eine offene Immersion und p endlich ist.

Lemma 6.3.

Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^1(C)$, $u \in U$ und $f : U \setminus \{u\} \to C$ eine isoalgebraische Funktion, die auf U schwach lokal beschränkt ist. Dann läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf U fortsetzen.

Beweis:

OE ist U zusammenhängend. Nach Lemma 6.2. existieren ein reguläres zusammenhängendes eindimensionales Schema X, eine offene semialgebraische Teilmenge V von X(C), eine Zariski-offene Teilmenge W von X mit $V \subseteq W$, ein $f_o \in \mathcal{O}_X(W)$ und ein endlicher Morphismus $p : X \to \mathbb{A}^1$, so daß $p^h|V : V \to U \setminus \{u\}$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f_o|V$. Sei $p^{-1}(u) = \{v_1,\dots,v_r\}$ und sei V_i eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung von v_i in $p^{-1}(U)$ mit $p^{-1}(u) \cap V_i = \{v_i\}$ $(i = 1,\dots,r)$. Es gibt eine offene semialgebraische Umgebung T von u in U, so daß $p^{-1}(T) \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_r$. Also gibt es ein $s \in \{1,\dots,r\}$, so daß $(V_s \setminus \{v_s\}) \cap V \neq \emptyset$. Da V offen und abgeschlossen in $p^{-1}(U \setminus \{u\})$ ist, ist $V_s \setminus \{v_s\} \subseteq V$. Man setze $V_o = V \cup V_s$. Es ist $p_C : V_o \to U$ bijektiv. Nach Korollar 4.9. ist p_C eine offene semialgebraische Abbildung (denn für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,p(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ endlich und somit injektiv). Also ist $p_C : V_o \to U$ ein semialgebraischer Isomorphismus. Nach Korollar 5.5. ist $p^h|V_o : V_o \to U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Da f schwach lokal beschränkt auf U ist, ist v_s keine Polstelle der durch f_o gegebenen rationalen Funktion $\tilde{f}$ auf X, d.h. V_o liegt im maximalen Definitionsbereich von $\tilde{f}$. Also läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf U fortsetzen.

<u>Lemma 6.4.</u>

Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(C)$ und sei A eine isoalgebraische Teilmenge von U, so daß für jedes $(z_1,\ldots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ die Menge $A \cap \{(z_1,\ldots,z_{n-1},z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ endlich ist. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine semialgebraische Funktion, die auf $U \setminus A$ isoalgebraisch ist. Dann existiert für jedes $u \in U$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z_n}(u)$ und die Funktion $D : U \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_n}(u)$ ist semialgebraisch auf U und isoalgebraisch auf $U \setminus A$.

Beweis:

Nach Lemma 6.3. und Satz 2.3. existiert für jedes $u \in U$ die partielle Abbildung $\frac{\partial f}{\partial z_n}(u)$. $D|U \setminus A$ ist isoalgebraisch (Satz 2.3.). Es ist noch zu zeigen, daß D stetig ist in jedem Punkt $a \in A$. Gegeben sei ein Punkt $a_o \in A$. OE ist $a_o = 0$. Nach Satz 3.3. existieren Polyzylinder P und Q in $\mathbb{A}^{n-1}(\mathbb{C})$ und $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ mit Mittelpunkt 0, so daß $P \times \overline{Q} \subseteq U$ und $(P \times \partial Q) \cap A = \emptyset$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $D|P \times \partial Q$ semialgebraisch ist, gibt es eine offene semialgebraische Umgebung P_o von 0 in P, so daß $|D(p,q) - D(0,q)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $p \in P_o$ und jedes $q \in \partial Q$. Da $D|\{p\} \times Q$ isoalgebraisch ist für jedes $p \in P$, ist nach dem Maximumprinzip $|D(p,q) - D(0,q)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $p \in P_o$ und jedes $q \in Q$. Es existiert eine offene semialgebraische Umgebung Q_o von 0 in Q, so daß $|D(0,q) - D(0,0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $q \in Q_o$. Dann ist $|D(y) - D(0)| < \varepsilon$ für jedes $y \in P_o \times Q_o$.

<u>Lemma 6.5.</u>

Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ und A eine isoalgebraische Teilmenge von U mit $\dim A \leq n-1$. Sei

$f: U \to C$ eine semialgebraische Funktion, die auf $U \setminus A$ isoalgebraisch ist. Auf U gelte

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

wobei $a_1, \ldots, a_m$ isoalgebraische Funktionen auf U sind. Dann gibt es zu jedem $u \in U$ ein $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,u}$, so daß in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,u}$ gilt

$$g^m + (a_1)_u\, g^{m-1} + \ldots + (a_m)_u = 0.$$

Beweis:

Gegeben sei ein $u \in A$. OE ist $u = 0$. Sei V eine offene semialgebraische Umgebung von 0 in U, für die gilt: $L \cap V$ ist zusammenhängend für jeden eindimensionalen linearen Unterraum von $\mathbb{A}^n(C)$ und es gibt ein $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(V)$, so daß $s \neq 0$ und $A \cap V \subseteq \{x \in V \mid s(x) = 0\}$. Man wähle $p_1, \ldots, p_n \in V \setminus \{x \in V \mid s(x) = 0\}$, so daß $p_1, \ldots, p_n$ eine Basis des C-Vektorraums $\mathbb{A}^n(C)$ ist. Im folgenden sei $\mathbb{A}^n(C)$ mit dem durch die Basis $p_1, \ldots, p_n$ gegebenen Koordinatensystem versehen. Nach dem Identitätssatz ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Menge $L_i \cap V \cap A$ endlich, wobei $L_i = \{t \cdot p_i \mid t \in C\}$. Nach Satz 3.3. gibt es eine offene semialgebraische Umgebung Q von 0 in U, so daß $(q+L_i) \cap Q \cap A$ endlich ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $q \in Q$.

Sei F der Ring aller semialgebraischen Funktionen $h: Q \to C$, die auf $Q \setminus A$ isoalgebraisch sind. Nach Lemma 6.4. ist jedes $h \in F$ unendlich oft partiell differenzierbar. Deshalb hat man den Ringhomomorphismus $^\vee : F \to C[[T_1, \ldots, T_n]]$, $h \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha h)(0) \cdot T^\alpha$. In F hat man $r^m + b_1 r^{m-1} + \ldots + b_m = 0$, wobei $r = f|Q$ und $b_i = a_i|Q$, also gilt in $C[[T_1, \ldots, T_n]]$

(*) $\check{r}^m + \check{b}_1 \check{r}^{m-1} + \ldots + \check{b}_m = 0.$

Durch Auszeichnung des Koordinatensystems auf $\mathbb{A}^n(C)$ wird auch ein reguläres Parametersystem von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$ ausgezeichnet und man erhält dadurch einen Isomorphismus $l : (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0})^\wedge \to \mathbb{C}[[T_1,\dots,T_n]]$. Nach Satz 2.6.ii) ist $l(b) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha b)(0)\cdot T^\alpha$ für jedes $b \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0} \subseteq (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0})^\wedge$. Damit folgt Lemma 6.5. aus (*) und Satz 2.11. .

Lemma 6.6.

Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(C)$ und A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von U mit $\dim A \leq 2n-2$. Dann läßt sich jede isoalgebraische Funktion $f : U \setminus A \to C$, die schwach lokal beschränkt auf U ist, zu einer isoalgebraischen Funktion auf U fortsetzen.

Beweis:

Gegeben sei die Situation aus Lemma 6.2.: Es existieren ein normales rein n-dimensionales Schema X, eine offene semialgebraische Teilmenge V von X(C), eine dichte Zariski-offene Teilmenge W von X mit $V \subseteq W$, ein $f_0 \in \mathcal{O}_X(W)$ und ein endlicher Morphismus $p : X \to \mathbb{A}^n$, so daß $p^h|V : V \to U \setminus A$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f_0|V$. Sei V_0 der Abschluß von V in $p^{-1}(U)$. Es gilt

(1) $p_C|V_0 : V_0 \to U$ ist ein semialgebraischer Isomorphismus.

Denn: $p_C|V_0 : V_0 \to U$ ist eine endliche Abbildung. $U \setminus A$ ist dicht in U, also ist $p_C|V_0$ surjektiv. Es bleibt noch zu zeigen, daß $p_C|V_0$ injektiv ist. Gegeben sei ein $u \in U$. Es sei $(p_C|V_0)^{-1}(u) = \{u_1,\dots,u_r\}$. Seien $U_1,\dots,U_r$ paarweise disjunkte offene semialgebraische Umgebungen von $u_1,\dots,u_r$ in

V_o. Es gibt eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung T von u in U, so daß $(p_C|V_o)^{-1}(T) \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_r$. Da $T \setminus A$ zusammenhängend ist ([DK, §13]), ist auch $(p_C|V_o)^{-1}(T \setminus A)$ zusammenhängend und somit existiert ein $t \in \{1,\ldots,r\}$, so daß $(p_C|V_o)^{-1}(T \setminus A) \subseteq U_t$. Da $(p_C|V_o)^{-1}(U \setminus A) = V$ dicht in V_o ist, ist $(p_C|V_o)^{-1}(U \setminus A) \cap (p_C|V_o)^{-1}(T) \cap U_i = (p_C|V_o)^{-1}(T \setminus A) \cap U_i \neq \emptyset$ für jedes $i \in \{1,\ldots,r\}$. Also ist $r = 1$.

(2) V_o ist eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und $p^h|V_o : V_o \to U$ ist ein isoalgebraischer Isomorphismus.

Denn: Gegeben sei ein $v \in V_o$. Es existieren eine offene semialgebraische Umgebung V_1 von v in $p^{-1}(U)$, eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung U_1 von $p(v)$ in U, ein normiertes Polynom $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U_1)[T]$ und ein isoalgebraischer Morphismus $q : V_1 \to Z$, wobei Z der durch F definierte isoalgebraische Teilraum von $U_1 \times (\mathbb{A}^1)^h$ ist, so daß i), ii), iii) aus Satz 5.4. gelten (Es ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p(v)} \to \mathcal{O}_{X,v}$ endlich und somit auch injektiv). Es ist $p_C(V_o \cap V_1)$ offen in U_1 (nach (1)) und abgeschlossen in U_1 (da $p_C|V_1 : V_1 \to U_1$ endlich ist). Also ist nach (1) $p_C|V_o \cap V_1 : V_o \cap V_1 \to U_1$ ein semialgebraischer Isomorphismus. Dann ist auch $t|L : L \to U_1$ ein semialgebraischer Isomorphismus, wobei L die abgeschlossene semialgebraische Teilmenge $q(V_o \cap V_1)$ von Z ist und $t : Z \to U_1$ die Einschränkung der Projektion $U_1 \times (\mathbb{A}^1)^h \to U_1$ auf Z ist. Ist $l : Z \to (\mathbb{A}^1)^h$ die Einschränkung der Projektion $U_1 \times (\mathbb{A}^1)^h \to (\mathbb{A}^1)^h$ auf Z, so gibt $l \circ (t|L)^{-1}$ eine semialgebraische Funktion $g : U_1 \to C$, für die gilt $g^m + a_1 g^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, wobei $F = T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U_1)[T]$. Sei $\Delta \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U_1)$ die Diskriminante von F und sei

$S = \{u \in U_1 | \Delta(u) = 0\}$. Nach Beispiel 3.4.ii) ist $g|U_1 \setminus S$ isoalgebraisch. Da $F_{p(v)}$ irreduzibel in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p(v)}[T]$ ist, ist nach Lemma 6.5. $\deg F = 1$. Also ist $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p(v)}) \to \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,v})$ ein Isomorphismus und damit auch $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p(v)} \to \mathcal{O}_{X,v}$ ein Isomorphismus. Nach Korollar 1.3.11.i) existieren eine offene semialgebraische Umgebung V_2 von v in $p^{-1}(U)$ und eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung U_2 von $p(v)$ in U, so daß $p_C|V_2 : V_2 \to U_2$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Wie oben folgt dann, daß auch $p_C|V_o \cap V_2 : V_o \cap V_2 \to U_2$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Also ist $V_2 \subseteq V_o$ und V_o ist offen. Nach Korollar 1.3.11.ii)b) ist $p^h|V_o : V_o \to U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus.

(3) V_o liegt im maximalen Definitionsbereich der durch f_o gegebenen rationalen Funktion $\tilde{f}$ auf X.

Denn: Sei P der Träger des Polstellendivisors von $\tilde{f}$ und N der Träger des Nullstellendivisors von $\tilde{f}$. Zu zeigen ist, daß $V_o \cap P = \emptyset$. Angenommen, es sei $V_o \cap P \neq \emptyset$. Da V_o offen in $X(C)$ ist, gibt es ein $v \in V_o \cap P$ mit $v \notin N$. Dann gibt es zu jedem $K \in R$ eine offene semialgebraische Umgebung T von $p(v)$ in U, so daß $|f(u)| > K$ für jedes $u \in T \setminus A$. Widerspruch dazu, daß f schwach lokal beschränkt auf U ist.

Aus (2) und (3) folgt, daß sich f isoalgebraisch auf U fortsetzen läßt.

Korollar 6.7.

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Ist X lokal irreduzibel in einem Punkt $x \in X$, so gibt es ein Fundamentalsystem von offenen semialgebraischen Umgebungen U von x in X, so daß $U \setminus A$ zusammenhängend ist für jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge A von U mit $\dim A \leq \dim_x^{sa} X - 2$. Ist X zusammenhängend und lokal irreduzibel, so ist $X \setminus A$ zusammenhängend für jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge A von X mit $\dim A \leq \dim^{sa} X - 2$.

Beweis:

Zunächst ein Hilfssatz.

Hilfssatz:

Sei U eine offene zusammenhängende semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(C)$ und sei F ein normiertes Polynom aus $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U)[T]$, das irreduzibel in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U)[T]$ ist. Die Diskriminante $\Delta \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U)$ von F sei ungleich Null und sei $S = \{u \in U \mid \Delta(u) = 0\}$. Dann ist der durch $F|U \setminus S$ gegebene isoalgebraische Teilraum X von $(U \setminus S) \times (\mathbb{A}^1)^h$ zusammenhängend.

Beweis:

Sei $t : X \to U \setminus S$ die Einschränkung der Projektion $(U \setminus S) \times (\mathbb{A}^1)^h \to U \setminus S$ auf X. Angenommen, es sei X die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener (und abgeschlossener) semialgebraischer Teilmengen T_1 und T_2. Nach Beispiel 3.4.ii) sind $t(T_1)$ und $t(T_2)$ offene und abgeschlossene semialgebraische Teilmengen von $U \setminus S$, also $t(T_1) = t(T_2) = U \setminus S$. Für jedes $u \in U \setminus S$ bilde man die Polynome

$$F_1(u,T) = (T-a_1)\cdot \ldots \cdot (T-a_{i(u)}) \in C[T]$$
$$F_2(u,T) = (T-b_1)\cdot \ldots \cdot (T-b_{j(u)}) \in C[T],$$

wobei $a_1,\dots,a_{i(u)}$, $b_1,\dots,b_{j(u)} \in C$ dadurch bestimmt sind, daß $\{(u,a_1),\dots,(u,a_{i(u)})\} = t^{-1}(u) \cap T_1$ und $\{(u,b_1),\dots,(u,b_{j(u)})\} = t^{-1}(u) \cap T_2$. Nach Beispiel 3.4.ii) erhält man dadurch normierte Polynome $F_1,F_2 \in \mathfrak{a}_{An}(U \setminus S)[T]$. Es ist $F_1 \cdot F_2 = F|U \setminus S$. Die Koeffizienten von F_1 und F_2 sind isoalgebraische Funktionen auf $U \setminus S$, die lokal beschränkt auf U sind. Nach Lemma 6.6. lassen sich F_1,F_2 zu $G_1,G_2 \in \mathfrak{a}_{An}(U)[T]$ fortsetzen. Es ist $G_1 \cdot G_2 = F$. Widerspruch zur Irreduzibilität von F.

Nun zum Beweis des Korollars. Sei X lokal irreduzibel in $x \in X$. OE ist X reduziert. Nach Satz 5.4., Lemma 5.6. und dem Hilfssatz existiert ein Fundamentalsystem von offenen semialgebraischen Umgebungen U von x in X mit: Es existiert eine isoalgebraische Teilmenge S von U, so daß $\dim S \leq \dim_x X-1$ und $U \setminus S$ eine zusammenhängende semialgebraische Mannigfaltigkeit ist der Dimension $\dim_x^{sa} X$. Deshalb ist $(U \setminus S) \setminus A$ zusammenhängend für jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge A von U mit $\dim A \leq \dim_x^{sa} X-2$. Nach Korollar 5.2. ist OE $\dim_y X = \dim_x X$ für jedes $y \in U$. Dann ist $(U \setminus A) \setminus S$ dicht in $U \setminus A$. Also ist $U \setminus A$ zusammenhängend.
Sei nun X zusammenhängend und lokal irreduzibel.
$L = \{x \in X | \dim_x X = \dim X\} = \{x \in X | \dim_x X \geq \dim X\}$ ist eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X. Nach Korollar 5.2. ist L auch offen. Also ist $\dim_x^{sa} X = \dim^{sa} X$ für jedes $x \in X$. Es sei A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X mit $\dim A \leq \dim^{sa} X-2$. Angenommen, es sei $X \setminus A$ die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener semialge-

braischer Teilmengen T_1 und T_2 von $X \setminus A$. Es ist $X = \overline{X \setminus A} = \overline{T_1} \cup \overline{T_2}$. Da X zusammenhängend ist, existiert ein $x \in \overline{T_1} \cap \overline{T_2}$. Wähle eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X, so daß $U \setminus A$ zusammenhängend ist. Es ist $U \setminus A$ die disjunkte Vereinigung von $U \cap T_1$ und $U \cap T_2$ und $U \cap T_1 \neq \emptyset$, $U \cap T_2 \neq \emptyset$. Widerspruch.

Satz 6.8. (1. und 2. Riemannscher Hebbarkeitssatz)
Seien X ein normaler isoalgebraischer Raum, A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X und $f : X \setminus A \to C$ eine isoalgebraische Funktion.

i) Ist $\dim_a A \leq \dim_a^{sa} X-2$ für jedes $a \in A$ und ist f schwach lokal beschränkt auf X, so läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf X fortsetzen.

ii) Ist $\dim_a A \leq \dim_a^{sa} X-3$ für jedes $a \in A$, so läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf X fortsetzen.

Beweis:
OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines normalen zusammenhängenden n-dimensionalen Schemas Z. Nach Lemma 6.2. existieren ein normales rein n-dimensionales Schema X_o, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $X_o(C)$, eine dichte Zariski-offene Teilmenge W von X_o mit $V \subseteq W$, ein $f_o \in \mathcal{O}_{X_o}(W)$ und ein endlicher Morphismus $p : X_o \to Z$, so daß $p^h|V : V \to X \setminus A$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f_o|V$. Sei V_o der Abschluß von V in $p^{-1}(X)$. Es sei $\dim_a A \leq \dim_a^{sa} X-2$ für jedes $a \in A$. Mit Hilfe des Korollars 6.7. zeigt man wie im Punkt (1) aus dem Beweis des Lemmas 6.6.

(1)' $p_C|V_o : V_o \to X$ ist ein semialgebraischer Isomorphismus. Weiterhin gilt

(2)' V_o ist eine offene semialgebraische Teilmenge von $X_o(C)$. Denn: Gegeben sei ein $v \in V_o$. Sei T eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung von v in $p^{-1}(X)$. Da V offen und abgeschlossen in $p^{-1}(X \setminus A)$ ist, ist $T \cap V$ offen und abgeschlossen in $T \setminus p^{-1}(A)$. Nach Korollar 6.7. ist $T \setminus p^{-1}(A)$ zusammenhängend. Da $T \cap V \neq \emptyset$, ist $T \setminus p^{-1}(A) = T \cap V$, also $T \setminus p^{-1}(A) \subseteq V$ und damit $T \subseteq V_o$ (denn $T \setminus p^{-1}(A)$ ist dicht in T).

Nach (1)' und Korollar 5.5. ist $p^h|V_o : V_o \to X$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Es genügt noch zu zeigen, daß V_o im maximalen Definitionsbereich W_o der durch f_o gegebenen rationalen Funktion auf X_c liegt.

Beweis von i):
Entsprechend wie im Punkt (3) des Beweises von Lemma 6.6. zeigt man $V_o \subseteq W_o$.
Beweis von ii):
Es ist $(X_o \setminus W_o) \cap V_o \subseteq V_o \setminus V = V_o \cap p^{-1}(A)$. Also ist $\dim^{sa}(X_o \setminus W_o) \cap V_o \leq 2n-3$. Der semialgebraische Raum $(X_o \setminus W_o)(C)$ ist leer oder rein $(2n-2)$-dimensional. Also ist $(X_o \setminus W_o) \cap V_o = \emptyset$, d.h. $V_o \subseteq W_o$.

§7 - Normalisierung und irreduzible Komponenten eines isoalgebraischen Raumes

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge A von X heißt nirgends dicht in X, wenn A keine offene Teilmenge von X enthält. Ist X reduziert so sind z.B. $N(X) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \text{ ist nicht normal}\}$ und $S(X) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \text{ ist nicht regulär}\}$ nirgends dicht in X. Leicht zu beweisen ist

Proposition 7.1.
Eine isoalgebraische Teilmenge A eines isoalgebraischen Raumes X ist genau dann nirgends dicht in X, wenn $\dim_a A < \dim_a X$ für jedes $a \in A$.

Proposition 7.2.
Seien $f: X \to Z$ und $g: Y \to Z$ endliche Morphismen isoalgebraischer Räume, wobei X und Y normal sind. Sei A eine isoalgebraische Teilmenge von Z, so daß $f^{-1}(A)$ nirgends dicht in X und $g^{-1}(A)$ nirgends dicht in Y ist. Dann läßt sich jeder $(Z \setminus A)$-Morphismus $t: X \setminus f^{-1}(A) \to Y \setminus g^{-1}(A)$ auf genau eine Weise zu einem Z-Morphismus $h: X \to Y$ fortsetzen. Ist t ein Isomorphismus, so auch h.

Beweis:
Zunächst wird gezeigt, daß sich t zu einer semialgebraischen Abbildung $X \to Y$ fortsetzen läßt. Hierzu genügt es

zu beweisen: Für jedes $x \in f^{-1}(A)$ läßt sich t zu einer stetigen Abbildung auf $(X \setminus f^{-1}(A)) \cup \{x\}$ fortsetzen. Gegeben sei ein $x \in X$. Es sei $g^{-1}(f(x)) = \{y_1,\dots,y_r\}$. Wähle disjunkte offene semialgebraische Umgebungen $U_1,\dots,U_r$ von $y_1,\dots,y_r$ in Y. Es gibt eine offene semialgebraische Umgebung T von f(x) in Z, so daß $g^{-1}(T) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_r$. Sei U eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung von x in $f^{-1}(T)$. Nach Korollar 6.7. und Proposition 7.1. ist $U \setminus f^{-1}(A)$ zusammenhängend. Also gibt es ein $s \in \{1,\dots,r\}$, so daß $t(U \setminus f^{-1}(A)) \subseteq U_s$. Durch $x \mapsto y_s$ setzt sich t zu einer stetigen Abbildung auf $(X \setminus f^{-1}(A)) \cup \{x\}$ fort.
Nach Proposition 7.1. und dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 6.8.i) ist die semialgebraische Fortsetzung $h : X \to Y$ von t ein isoalgebraischer Morphismus.

Definition 7.3.

Eine Normalisierung eines reduzierten isoalgebraischen Raumes X ist ein Paar $(\hat{X},f)$, für das gilt

i) $\hat{X}$ ist ein normaler isoalgebraischer Raum

ii) $f : \hat{X} \to X$ ist ein endlicher Morphismus, so daß $f^{-1}(N(X))$ nirgends dicht in $\hat{X}$ ist und $f|\hat{X} \setminus f^{-1}(N(X)) : \hat{X} \setminus f^{-1}(N(X)) \to X \setminus N(X)$ ein Isomorphismus ist.

Satz 7.4.

Jeder reduzierte isoalgebraische Raum X hat eine Normalisierung $(\hat{X},f)$ und diese ist eindeutig bestimmt, d.h. ist $(\hat{X}',f')$ eine weitere Normalisierung von X, so gibt es genau einen X-Morphismus $g : \hat{X} \to \hat{X}'$ und g ist ein Isomorphismus.

Beweis:
Die Eindeutigkeit folgt aus Proposition 7.2.. Nun zur Existenz der Normalisierung. Aufgrund der Eindeutigkeit kann man OE annehmen, daß X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines reduzierten Schemas X_o ist. Sei $f : Y \to X_o$ die Normalisierung von X_o. Dann ist $f^h|(f^h)^{-1}(X) : (f^h)^{-1}(X) \to X$ eine Normalisierung von X.

<u>Lemma 7.5.</u>
Seien X ein zusammenhängender lokal irreduzibler isoalgebraischer Raum und A eine isoalgebraische Teilmenge von X. Dann ist entweder A nirgends dicht in X oder A = X.

Beweis:
$L = \{x \in X | \dim_x X = \dim X\}$ ist eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X. Nach Korollar 5.2. ist L offen. Also $\dim_x X = \dim X$ für jedes $x \in X$. $T=\{a \in A | \dim_a A = \dim_a X\}$ $= \{a \in A | \dim_a A \geq \dim X\}$ ist eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X. Da X lokal irreduzibel ist, ist T offen in X. Also ist entweder $T = \emptyset$, und damit A nirgends dicht in X, oder T = X, und damit A = X.

<u>Lemma 7.6.</u>
Sei A eine isoalgebraische Teilmenge eines isoalgebraischen

Raumes X und sei Z eine Zusammenhangskomponente von $X \setminus A$. Dann ist $\overline{Z}$ eine isoalgebraische Teilmenge von X.

Beweis:

OE ist X reduziert. Sei $(\hat{X},f)$ eine Normalisierung von X. Seien $Z_1,\ldots,Z_r$ die Zusammenhangskomponenten von $\hat{X}$. Nach Korollar 6.7. und Lemma 7.5. ist $Z_i \setminus f^{-1}(A)$ entweder leer oder zusammenhängend und dicht in Z_i (für $i = 1,\ldots,r$). $f^{-1}(Z)$ ist offen und abgeschlossen in $\hat{X} \setminus f^{-1}(A)$. Somit ist $f^{-1}(Z) \cap Z_i$ entweder leer oder dicht in Z_i. Also ist $\overline{f^{-1}(Z)}$ Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von $\hat{X}$. Nach Korollar 4.8. ist $\overline{Z} = f(\overline{f^{-1}(Z)})$ eine isoalgebraische Teilmenge von X.

<u>Definition 7.7.</u>

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Eine isoalgebraische Teilmenge A von X heißt irreduzibel, wenn gilt: Ist A die Vereinigung zweier isoalgebraischer Teilmengen A_1 und A_2 von X, so ist $A = A_1$ oder $A = A_2$. Die maximalen irreduziblen isoalgebraischen Teilmengen von X heißen die irreduziblen Komponenten von X.

Zum Beispiel ist nach 7.5. ein zusammenhängender lokal irreduzibler isoalgebraischer Raum (insbesondere ein zusammenhängender normaler isoalgebraischer Raum) irreduzibel.

Satz 7.8.

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Sei A eine nirgends dichte isoalgebraische Teilmenge von X, so daß $X \setminus A$ lokal irreduzibel ist (zum Beispiel $A = S(X_{red})$ oder $A = N(X_{red})$). Seien $Z_1,\dots,Z_r$ die Zusammenhangskomponenten von $X \setminus A$. Dann sind $\overline{Z}_1,\dots,\overline{Z}_r$ die irreduziblen Komponenten von X.

Beweis:

Nach Lemma 7.6. sind $\overline{Z}_1,\dots,\overline{Z}_r$ isoalgebraische Teilmengen von X. Da $Z_1,\dots,Z_r$ irreduzible isoalgebraische Räume sind, sind $\overline{Z}_1,\dots,\overline{Z}_r$ irreduzible isoalgebraische Teilmengen von X. Es ist $X = \overline{Z}_1 \cup \dots \cup \overline{Z}_r$. Also sind $\overline{Z}_1,\dots,\overline{Z}_r$ die irreduziblen Komponenten von X.

Der Zusammenhang zwischen Normalisierung, irreduziblen Komponenten und lokalen irreduziblen Komponenten ist der folgende.

Proposition 7.9.

Sei X ein reduzierter isoalgebraischer Raum und sei $(\hat{X},f)$ eine Normalisierung von X.

i) Sind $Z_1,\dots,Z_r$ die Zusammenhangskomponenten von $\hat{X}$, so sind $f(Z_1),\dots,f(Z_r)$ die irreduziblen Komponenten von X.

ii) Zu jedem $x \in X$ existiert ein Fundamentalsystem von offenen semialgebraischen Umgebungen U, für die gilt: Sind $U_1,\dots,U_s$ die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(U)$, so existiert in jedem U_i genau ein x_i mit $f(x_i) = x$ und $(U,f(U_1)),\dots,(U,f(U_s))$ sind Repräsentanten für die lokalen irreduziblen Komponenten von X in x (Nach i) sind $f(U_1),\dots,f(U_s)$ die irreduziblen Komponenten von U).

iii) Sei $x \in X$ und sei $f^{-1}(x) = \{x_1,\dots,x_r\}$. Seien $p_1,\dots,p_s$ die minimalen Primideale von $\mathcal{O}_{X,x}$. Es ist $r = s$ und nach geeigneter Umnummerierung der $p_1,\dots,p_s$ ist p_i der Kern von $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\hat{X},x_i}$ $(i = 1,\dots,s)$. $\mathcal{O}_{\hat{X},x_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{\hat{X},x_s}$ ist die Normalisierung von $\mathcal{O}_{X,x}$.

Beweis:

i) Nach Korollar 4.8. sind $f(Z_1),\dots,f(Z_r)$ isoalgebraische Teilmengen von X. Da $Z_1,\dots,Z_r$ irreduzible isoalgebraische Räume sind, sind $f(Z_1),\dots,f(Z_r)$ irreduzible isoalgebraische Teilmengen von X. Für jedes $i \in \{1,\dots,r\}$ ist $Z_i \cap (\hat{X} \setminus f^{-1}(N(X))) \neq \emptyset$, da $f^{-1}(N(X))$ nirgends dicht in $\hat{X}$ ist. Deshalb ist $f(Z_i) \not\subseteq f(Z_j)$ für $i \neq j$. Es ist $X = f(Z_1) \cup \dots \cup f(Z_r)$. Also sind $f(Z_1),\dots,f(Z_r)$ die irreduziblen Komponenten von X.

ii) Gegeben sei eine offene semialgebraische Umgebung V eines Punktes $x \in X$. Es sei $f^{-1}(x) = \{x_1,\dots,x_s\}$. Wähle disjunkte offene semialgebraische Umgebungen $W_1,\dots,W_s$ von $x_1,\dots,x_s$ in $\hat{X}$ und eine offene semialgebraische Umgebung W von x in V, so daß $f^{-1}(W) \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_s$. Seien $Z_1,\dots,Z_m$ die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(W)$.

OE ist $x_i \in Z_i$ für $i = 1,\ldots,s$. Man setze $T = f(Z_{s+1}) \cup \ldots \cup f(Z_m)$ und $U = W \setminus T$. Da $f(Z_1),\ldots,f(Z_m)$ die irreduziblen Komponenten von W sind, ist $f(Z_i) \cap T \subseteq N(W) \subseteq N(X)$ für $i = 1,\ldots,s$ (nach Satz 7.8.). Deshalb ist nach Korollar 6.7. $Z_i \setminus f^{-1}(T)$ zusammenhängend (denn $f^{-1}(N(X))$ ist nirgends dicht in $\hat{X}$). Also sind $U_1 := Z_1 \setminus f^{-1}(T),\ldots,U_s := Z_s \setminus f^{-1}(T)$ die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(U)$.

Seien $t_1,\ldots,t_s$ die durch $(U,f(U_1)),\ldots,(U,f(U_s))$ repräsentierten isoalgebraischen Keime von X in x. Ist $i \neq j$, so ist $f(U_i) \cap L \not\subseteq f(U_j) \cap L$ für jede offene semialgebraische Umgebung L von x in U (nach Satz 7.8.). Also ist $t_i \not\subseteq t_j$ für $i \neq j$. Da $f^{-1}(x) \cap U_i = \{x_i\}$ und U_i lokal irreduzibel in x_i ist, ist t_i irreduzibel (für $i = 1,\ldots,s$). Es ist $f(U_1) \cup \ldots \cup f(U_s) = U$ und somit ist $t_1 \cup \ldots \cup t_s$ der durch (X,X) repräsentierte Keim. Also sind $t_1,\ldots,t_s$ die lokalen irreduziblen Komponenten von X in x.

iii) Sei U eine offene semialgebraische Umgebung von x in X, so daß für die Zusammenhangskomponenten $U_1,\ldots,U_r$ von $f^{-1}(U)$ gilt: $x_i \in U_i$ für $i = 1,\ldots,r$ und $(U,f(U_1)),\ldots,(U,f(U_r))$ sind Repräsentanten für die lokalen irreduziblen Komponenten von X in x. Man versehe die isoalgebraische Teilmenge $f(U_i)$ von U mit der reduzierten Teilraumstruktur, J_i sei die zugehörige Idealgarbe ($i = 1,\ldots r$). Es sind dann $(J_1)_x,\ldots,(J_r)_x$ die minimalen Primideale von $\mathcal{O}_{X,x}$. $(J_i)_x$ ist aber auch der

Kern des durch $f|U_i : U_i \to U$ gegebenen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{U_i,x_i} = \mathcal{O}_{\hat{X},x_i}$ $(i = 1,\ldots,r)$. Sei $f_i : U_i \to X_i := f(U_i)$ der durch f induzierte isoalgebraische Morphismus. Es ist noch zu zeigen, daß f_i einen Isomorphismus $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X_i,x}) \to \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{U_i,x_i})$ gibt. Sei $n = \dim_x X_i$. Nach Satz 5.4. und Lemma 5.6. gilt: Es gibt eine offene semialgebraische Umgebung V von x in X_i, eine offene semialgebraische Teilmenge W von $\mathbb{A}^n(C)$, eine isoalgebraische Teilmenge S von W mit $\dim S \leq n-1$ und einen endlichen Morphismus $p : V \to W$, so daß $\mathcal{O}_{W,p(x)} \to \mathcal{O}_{V,x}$ injektiv und endlich ist und $\# p^{-1}(y) = [\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{V,x}) : \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{W,p(x)})]$ und $\#(p \circ f_i')^{-1}(y) = [\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{U_i,x_i}) : \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{W,p(x)})]$ für jedes $y \in W \setminus S$, wobei $f_i' = f_i | f_i^{-1}(V) : f_i^{-1}(V) \to V$. Da $f_i | U_i \setminus f^{-1}(N(X)) : U_i \setminus f^{-1}(N(X)) \to X_i \setminus N(X)$ ein Isomorphismus ist, ist $[\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{U_i,x_i}) : \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X_i,x})] = 1$.

<u>Proposition 7.10.</u>

Für einen reduzierten isoalgebraischen Raum X sind äquivalent

i) X ist irreduzibel

ii) $X \setminus N(X)$ ist zusammenhängend

iii) $X \setminus S(X)$ ist zusammenhängend

iv) Für jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge A von X mit $\dim A \leq \dim^{sa} X-2$ ist $X \setminus A$ zusammenhängend.

v) Es gibt eine semialgebraische Teilmenge von X, die offen dicht zusammenhängend und semialgebraisch regulär ist.

vi) Es gibt einen zusammenhängenden dichten lokal irreduziblen offenen isoalgebraischen Teilraum von X.

vii) Für jede isoalgebraische Teilmenge A von X gilt: $A = X$ oder A ist nirgends dicht in X.

Beweis:

Klar ist i) $\Leftrightarrow$ ii), i) $\Leftrightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ v), iii) $\Rightarrow$ vi), iv) $\Rightarrow$ iii), vii) $\Rightarrow$ i).

v) $\Rightarrow$ i):

Sei U eine dichte offene semialgebraische Teilmenge von X, die zusammenhängend und semialgebraisch regulär ist. Der isoalgebraische Raum U ist irreduzibel, denn $U \setminus S(U)$ ist zusammenhängend ([DK, §13]). Dann ist auch $X = \overline{U}$ irreduzibel.

vi) $\Rightarrow$ i):

Sei U ein dichter offener isoalgebraischer Teilraum von X, der zusammenhängend und lokal irreduzibel ist. Der isoalgebraische Raum U ist irreduzibel, also ist auch $X = \overline{U}$ irreduzibel.

iii) $\Rightarrow$ vii):

Sei A eine isoalgebraische Teilmenge von X. Nach Lemma 7.5. ist $A \cap (X \setminus S(X)) = X \setminus S(X)$ oder $A \cap (X \setminus S(X))$ ist nirgends dicht in $X \setminus S(X)$. Im ersten Fall ist $A = X$ und im zweiten Fall ist A nirgends dicht in X.

iii) $\Rightarrow$ iv):

$(X \setminus S(X)) \setminus A$ ist zusammenhängend und $(X \setminus S(X)) \setminus A = (X \setminus A) \setminus S(X)$ ist dicht in $X \setminus A$.

Korollar 7.11.

Sei A eine isoalgebraische Teilmenge eines irreduziblen isoalgebraischen Raumes X mit $\dim A = \dim X$. Dann ist $A = X$.

Korollar 7.12.

Für einen reduzierten isoalgebraischen Raum X sind äquivalent

i) X ist lokal irreduzibel

ii) Für jede zusammenhängende offene semialgebraische Teilmenge U von X und jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge A von U mit $\dim A \leq \dim^{sa} U-2$ ist $U \setminus A$ zusammenhängend.

iii) Für jede zusammenhängende offene semialgebraische Teilmenge U von X ist $U \setminus S(X)$ zusammenhängend.

Beweis:

i) $\Rightarrow$ ii): Korollar 6.7.

ii) $\Rightarrow$ iii): klar

iii) $\Rightarrow$ i):

Gegeben sei ein $x \in X$. Wähle eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X, so daß die irreduziblen Komponenten von U die lokalen irreduziblen Komponenten von X in x repräsentieren. Es ist dann U zusammenhängend. Nach Voraussetzung ist $U \setminus S(U)$ zusammenhängend. Also ist U irreduzibel und damit X lokal irreduzibel in $x \in X$.

Aus 7.10. und 7.12. folgt

Korollar 7.13.

Seien X und Y isoalgebraische Räume, die semialgebraisch isomorph sind (d.h. $|X|$ und $|Y|$ sind isomorph). Dann gelten

i) X ist genau dann irreduzibel, wenn Y irreduzibel ist.

ii) X ist genau dann lokal irreduzibel, wenn Y lokal irreduzibel ist.

Proposition 7.14.

Für einen isoalgebraischen Raum X sind äquivalent

i) Für jeden Punkt $x \in X$ und jede lokale irreduzible Komponente K von X in x ist $\dim K = n$.

ii) Es gibt eine dichte Teilmenge T von X, so daß $\dim_x X = n$ für jedes $x \in T$.

iii) Jede irreduzible Komponente von X hat die Dimension n.

iv) Der semialgebraische Raum $|X|$ ist rein 2n-dimensional.

Ein isoalgebraischer Raum, der die äquivalenten Bedingungen i) - iv) erfüllt, heißt rein von der Dimension n.

Beweis:

Klar ist i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv).

iv) $\Rightarrow$ i):

Gegeben sei ein $x \in X$. Man wähle eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X, so daß die irreduziblen Komponenten von U die lokalen irreduziblen Komponenten von X in x repräsentieren. Nach Voraussetzung ist jede Zusammenhangskomponente Z von $U \setminus S(U_{red})$ und somit auch der

Abschluß $\overline{Z}$ von Z in U semialgebraisch rein von der Dimension $2n$.

Als erste Anwendung der Zerlegung eines isoalgebraischen Raums in irreduzible Komponenten erhält man

Proposition 7.15.

Sei $(X_i \mid i \in I)$ eine Familie von isoalgebraischen Teilmengen eines isoalgebraischen Raums X. Dann gibt es eine endliche Teilmenge K von I, so daß $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in K} X_i$. Insbesondere ist $\bigcap_{i\in I} X_i$ eine isoalgebraische Teilmenge von X.

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach $\dim X$. 7.15. gelte für $\dim X \leq n-1$. Sei X ein isoalgebraischer Raum der Dimension n. Seien $A_1,\dots,A_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Es genügt 7.15. für die Familien $(X_i \cap A_1 \mid i \in I)$, $\dots$, $(X_i \cap A_r \mid i \in I)$ zu beweisen. Sei ein $p \in \{1,\dots,r\}$ gegeben. Ist $X_i \cap A_p = A_p$ für jedes $i \in I$, so ist 7.15. trivialerweise erfüllt. Existiert ein $q \in I$ mit $X_q \cap A_p \neq A_p$, so ist $\dim(X_q \cap A_p) < \dim A_p \leq n$ (nach Korollar 7.11.). Man wende die Induktionsvoraussetzung an auf die Familie $(X_i \cap X_q \cap A_p \mid i \in I)$ von isoalgebraischen Teilmengen von $X_q \cap A_p$.

Proposition 7.16.

Sei X ein isoalgebraischer Raum und sei $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Man hat die Funktionen $\overline{f} : X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \overline{f(x)}$ und $|f| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$.

Es gelten:

i) Ist $\overline{f}$ nicht konstant bei $x_o \in X$ (d.h. gibt es in jeder Umgebung von x_o in X ein x mit $f(x) \neq f(x_o)$), so ist $\overline{f}$ offen in x_o (d.h. für jede Umgebung U von x_o in X ist $f(x_o)$ innerer Punkt von $\overline{f}(U)$).

ii) Ist X irreduzibel, so ist $\overline{f}$ konstant oder offen.

iii) Ist X zusammenhängend und $\overline{f}$ nicht konstant, so hat $|f|$ kein Maximum.

Beweis:

i) Hilfssatz:

Seien Y ein rein n-dimensionaler isoalgebraischer Raum, y_o ein Punkt von Y und g eine isoalgebraische Funktion auf Y, so daß $\overline{g}$ nicht konstant ist. Es gebe einen endlichen Morphismus $p: Y \to Q$ mit $p^{-1}(p(y_o)) = \{y_o\}$, wobei Q ein Polyzylinder von $\mathbb{A}^n(C)$ ist. Dann ist $\overline{g}$ offen in y_o.

Beweis:

Sei a ein Punkt von Y mit $g(a) \neq g(y_o)$. Sei L der 1-dimensionale affine Unterraum von $\mathbb{A}^n(C)$, auf dem p(a) und $p(y_o)$ liegen. Für jedes $y \in Y$ ist $\mathcal{O}_{Q,p(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ endlich und injektiv. Nach Korollar 4.9. ist p eine offene Abbildung. Deshalb ist $p^{-1}(L)$ ein semialgebraischer Raum rein von der Dimension 2. Sei K eine irreduzible Komponente von $p^{-1}(L)$, auf der a liegt. Nach Proposition 7.14. hat K die Dimension 1. p(K) ist eine 1-dimensionale isoalgebraische Teilmenge von Q. Da

$L \cap Q$ eine irreduzible isoalgebraische Teilmenge von Q ist, ist $p(K) = L \cap Q$ (nach Korollar 7.11.). Da $p^{-1}(p(y_o)) = \{y_o\}$ ist, liegt y_o auf K. Man versehe K mit der reduzierten Teilraumstruktur. Sei $(\hat{K}, h)$ eine Normalisierung von K. $\hat{K}$ ist zusammenhängend und regulär. Nach Satz 2.5. ist $\overline{g}$ offen in y_o.

Nun zum Beweis von i). Sei U eine Umgebung von x_o in X. Man wähle eine offene semialgebraische Umgebung V von x_o in U, so daß jede irreduzible Komponente von V den Punkt x_o enthält (dies ist nach Proposition 7.9. möglich). Sei K eine irreduzible Komponente von V, die nicht in $f^{-1}(f(x_o))$ enthalten ist. Es ist dann $K \cap f^{-1}(f(x_o))$ eine nirgends dichte isoalgebraische Teilmenge von K. Nach Lemma 5.6. gibt es eine offene semialgebraische Umgebung Y von x_o in K und einen endlichen Morphismus $p: Y \to Q$, so daß $p^{-1}(p(x_o)) = \{x_o\}$ und Q ein Polyzylinder in $\mathbb{A}^n(C)$ ist mit $n = \dim K$. Nach dem Hilfssatz ist $f(x_o)$ innerer Punkt von $\overline{f}(U)$.

ii) Sei X ein irreduzibler reduzierter isoalgebraischer Raum und sei $\overline{f}$ nicht konstant. Nach Satz 2.5. ist $\overline{f}|X \setminus S(X)$ offen. Also ist $\overline{f}$ nicht konstant bei x_o für jedes $x_o \in X$. Nach i) ist $\overline{f}$ offen.

iii) folgt aus ii).

<u>Beispiel 7.17.</u>

Sei X ein zusammenhängender normaler isoalgebraischer Raum und sei $p \in \mathcal{O}_X(X)[T]$ ein normiertes Polynom. Es gibt (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmte Polynome $p_1,\ldots,p_k \in \mathcal{O}_X(X)[T]$ und natürliche Zahlen $n_1,\ldots,n_k$, so daß $p_1,\ldots,p_k$ normiert und irreduzibel in $\mathcal{O}_X(X)[T]$ sind und $p = p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$. Die Diskriminante $\Delta \in \mathcal{O}_X(X)$ von $p_1\cdot\ldots\cdot p_k$ ist ungleich Null. Ist Y_i der durch p_i gegebene isoalgebraische Teilraum von $X\times(\mathbb{A}^1)^h$ $(i = 1,\ldots,k)$, so sind $Y_1,\ldots,Y_k$ die irreduziblen Komponenten des durch p definierten isoalgebraischen Teilraums Y von $X\times(\mathbb{A}^1)^h$. (Nach Beispiel 3.4. sind $Y_1,\ldots,Y_k$ reduziert).

Beweis:

Hilfssatz:

Der Ring $\mathcal{O}_X(X)$ ist integer und normal.

Beweis:

Da X irreduzibel ist, ist $\mathcal{O}_X(X)$ integer. Gegeben seien $f,g \in \mathcal{O}_X(X)$, $g \neq 0$, so daß $\frac{f}{g}$ ganz über $\mathcal{O}_X(X)$ ist. Zu jedem $x \in X$ existiert dann ein eindeutig bestimmtes $h_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, so daß $f_x = h_x g_x$. Also gibt es eine Funktion $h : X \to \mathbb{C}$, so daß $f = hg$ und es zu jedem $x \in X$ eine offene semialgebraische Umgebung gibt, auf der h isoalgebraisch ist. Auf der dichten offenen Menge $\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$ ist h semialgebraisch. Also ist h semialgebraisch und nach Satz 2.2. ist h isoalgebraisch.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß sich p auf eindeutige Weise in normierte irreduzible Polynome zerlegen läßt, und daß die Diskriminante Δ von $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ ungleich Null ist. Sei $S = \{x \in X \mid \Delta(x) = 0\}$. Wie im Hilfssatz des Beweises von Korollar 6.7. zeigt man, daß $Y_i \cap (X \setminus S) \times (\mathbb{A}^1)^h$ zusammenhängend ist $(i = 1, \ldots, k)$. Nach Beispiel 3.4. ist $Y_i \cap (X \setminus S) \times (\mathbb{A}^1)^h$ normal und dicht in Y_i. Also ist Y_i irreduzibel. Für $i \neq j$ ist $Y_i \not\subseteq Y_j$. Weiterhin ist $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$. Also sind $Y_1, \ldots, Y_k$ die irreduziblen Komponenten von Y.

Satz 7.18.

Sei X ein irreduzibles Schema. Dann ist X^h ein irreduzibler isoalgebraischer Raum. Insbesondere ist X^h zusammenhängend.

Beweis:

Hilfssatz:

Der Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)$ ist ganz abgeschlossen in $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n(\mathbb{C}))$.

Beweis:

Gegeben sei ein $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n(\mathbb{C}))$, so daß $f^m + p_1 f^{m-1} + \ldots + p_m = 0$ mit $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$. Dann ist $|f(z)| \leq 1 + |p_1(z)| + \ldots + |p_m(z)|$ für jedes $z \in \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$. Somit existieren ein $r_0 > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $|f(z)| < r^k$ für jedes $r > r_0$ und jedes $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $|z_i| < r$ $(i = 1, \ldots, n)$. Sei $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha T^\alpha$ die formale Potenzreihe von $f_0 \in \mathcal{A}_{\mathbb{A}^n,0}$. Nach Satz 2.8. ist $c_\alpha = 0$ für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| > k$. Aufgrund des Identitätssatzes ist $f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq k}} c_\alpha T^\alpha \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)$

Nun zum Beweis von Satz 7.18..

1. Fall: X ist das durch ein normiertes irreduzibles Polynom $p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)[T]$ gegebene Unterschema von $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$. Aufgrund des Hilfssatzes ist p auch in $\mathcal{U}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n(\mathbb{C}))[T]$ irreduzibel. Nach 7.17. ist X^h irreduzibel.

2. Fall: X ist ein integres affines Schema. Es existieren ein $n \in \mathbb{N}_0$, ein durch ein normiertes irreduzibles Polynom aus $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)[T]$ definiertes Unterschema X_o von $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ und ein Morphismus $g : X \to X_o$, so daß gilt: Ist $h : Y \to X$ die Normalisierung von X, so ist $g \cdot h : Y \to X_o$ die Normalisierung von X_o. Nach Fall 1 und Proposition 7.9. ist X^h irreduzibel.

3. Fall: X ist ein integres Schema. Man überdecke X_{reg} durch endlich viele offene affine Unterschemata $U_1, \ldots, U_r$. Nach Fall 2 sind $U_1(\mathbb{C}), \ldots, U_r(\mathbb{C})$ zusammenhängend. Also ist auch $X_{reg}(\mathbb{C})$ zusammenhängend.

§8 - Noethersche Normalisierung, der Satz über die wesentlichen Singularitäten, der Remmertsche Projektionssatz

1. Noethersche Normalisierung

Lemma 8.1.1.

Sei $f: X \to Y$ eine quasiendliche Abbildung zwischen semialgebraischen Räumen (d.h. jedes $x \in X$ ist isoliert in der Faser $f^{-1}(f(x))$, oder anders ausgedrückt, für jedes $y \in Y$ ist $f^{-1}(y)$ endlich) und sei X lokal vollständig. Dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & S \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

wobei g eine endliche Abbildung und i eine offene Einbettung ist.

Beweis:

Sei $K = X \cup \{\infty\}$ die Einpunktvervollständigung von X. Sei S der Abschluß des Graphen von f in $Y \times K$ und sei g die Einschränkung der Projektion $Y \times K \to Y$ auf S. g ist endlich und die kanonische Abbildung $i: X \to S$ ist eine offene Einbettung.

Lemma 8.1.2.

Sei $f: X \to Y$ eine quasiendliche Abbildung zwischen semialgebraischen Räumen und sei X lokal vollständig. Dann gibt es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X und eine Familie $(V_i \mid i \in I)$

von offenen semialgebraischen Teilmengen von Y, so daß $f(U_i) \subseteq V_i$ und $f|U_i : U_i \to V_i$ endlich ist für jedes $i \in I$.

Beweis:

Sei
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & S \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$
das kommutative Diagramm aus Lemma 8.1.1..

Nach dem Beweis der Proposition 4.1. gibt es geometrische simpliziale Komplexe M und N, semialgebraische Isomorphismen $\varphi : M \to S$ und $\psi : N \to Y$ und eine simpliziale Abbildung $\alpha : M \to N$, so daß gilt: Es kommutiert
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & S \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "\psi"'] & Y \end{tikzcd}$$
und sind $e_1, \ldots, e_r \in i(X)$ die Ecken der Triangulierung φ, die in $i(X)$ liegen, so ist $i(X) = \mathrm{Stern}_\varphi(e_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Stern}_\varphi(e_r)$. Es ist $g|\mathrm{Stern}_\varphi(e_k) : \mathrm{Stern}_\varphi(e_k) \to \mathrm{Stern}_\psi(g(e_k))$ endlich $(k=1,..,r)$.

Satz 8.1.3.

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Dann existiert eine Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X, so daß es zu jedem U_i einen surjektiven endlichen isoalgebraischen Morphismus $g : U_i \to V$ gibt, wobei V ein offener isoalgebraischer Teilraum eines $\mathbb{A}^n$ ist.

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach dim X. Der Fall dim X = 0 ist klar. Sei nun dim X = n. OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines n-dimensionalen affinen Schemas X_o. Sei $g: X_o \to \mathbb{A}^n$ ein endlicher Morphismus. Nach Lemma 8.1.2. gibt es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X und eine Familie $(V_i \mid i \in I)$ von offenen zusammenhängenden semialgebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}^n(C)$, so daß $g_C | U_i : U_i \to V_i$ endlich ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist noch zu zeigen, daß $g(U_i) = V_i$, wenn $\dim U_i = n$. Gegeben sei ein U_i mit $\dim U_i = n$. Es ist $g(U_i)$ eine n-dimensionale isoalgebraische Teilmenge von V_i. Da der isoalgebraische Raum V_i irreduzibel ist, ist $g(U_i) = V_i$ (nach Korollar 7.11.).

2. Der Satz über die wesentlichen Singularitäten

Seien X ein komplex analytischer Raum, Y eine analytische Teilmenge von X und A eine analytische Teilmenge von $X \setminus Y$. Der Abschluß $\bar{A}$ von A in X ist im allgemeinen keine analytische Teilmenge von X. Ein Punkt $a \in \bar{A}$ heißt wesentliche Singularität von A, wenn es keine offene Umgebung U von a in X gibt, so daß $\bar{A} \cap U$ eine analytische Teilmenge von U ist. Der Satz über die wesentlichen Singularitäten von Remmert, Stein, Thullen ([A, §37.]) macht Aussagen über die Menge der wesentlichen Singularitäten. Diese Menge ist z.B. leer in der folgenden Situation

(*) Seien X ein komplex analytischer Raum, Y eine analytische Teilmenge von X und A eine analytische Teilmenge von $X \setminus Y$. Sei A rein n-dimensional und $\dim Y \leq n-1$. Dann ist $\bar{A}$ eine analytische Teilmenge von X.

In der isoalgebraischen Geometrie gibt es keine wesentlichen Singularitäten, denn es gilt der ganz einfach zu beweisende Satz

Satz 8.2.1.

Seien X ein isoalgebraischer Raum, Y eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X und A eine isoalgebraische Teilmenge von $X \setminus Y$. Es gelten:

i) Ist Y eine isoalgebraische Teilmenge von X, so ist $\bar{A}$ eine isoalgebraische Teilmenge von X.

ii) Ist A rein n-dimensional und $\dim Y \leq 2n-2$, so ist $\bar{A}$ eine isoalgebraische Teilmenge von X.

Beweis:

OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines Schemas X_o und A irreduzibel. Es sei $n = \dim A$ und A_o der Zariski-Abschluß von A in X_o. Es ist $n = \dim A_o$ und A_o irreduzibel. Indem man X durch $X \cap A_o$ und Y durch $Y \cap A_o$ ersetzt, kann man OE annehmen, daß X rein n-dimensional ist. Seien $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X.

i) Es sei $X_i \not\subseteq Y$ für $i = 1, \ldots, s$ und $X_i \subseteq Y$ für $i=s+1, \ldots, r$. Es sind dann $X_1 \setminus Y, \ldots, X_s \setminus Y$ die irreduziblen Komponenten von $X \setminus Y$. Es ist $A = X_t \setminus Y$ für ein $t \in \{1, \ldots, s\}$. Also $\bar{A} = X_t$.

ii) Es sind $X_1 \setminus Y, \ldots, X_r \setminus Y$ die irreduziblen Komponenten von $X \setminus Y$. Es ist $A = X_t \setminus Y$ für ein $t \in \{1, \ldots, r\}$. Also $\bar{A} = X_t$.

3. Der Remmertsche Projektionssatz

Sei X ein isoalgebraischer Raum und sei $x \in X$. Durch den Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$, $s \mapsto s(x)$ wird $\mathbb{C}$ zu einem $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul. Der $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{C}$-Derivationen $\delta : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$ heißt der Tangentialraum T_xX von X in x. Ist $\delta : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-Derivation, so ist $\delta(m_x^2) = 0$, wobei m_x das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Also hat man einen $\mathbb{C}$-Vektorraumhomomorphismus $T_xX \to (m_x/m_x^2)^*$. Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus. Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, so gibt $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ den $\mathbb{C}$-Vektorraumhomomorphismus $T_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$. Es gilt der Satz von der Umkehrfunktion: Sind X und Y reguläre isoalgebraische Räume und ist T_xf ein Isomorphismus, so ist f ein lokaler Isomorphismus in x. (Denn: Seien $y = f(x)$, g der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ und $e_1,\dots,e_r$ ein reguläres Parametersystem von $\mathcal{O}_{Y,y}$. Da $(m_x/m_x^2)^* \to (m_y/m_y^2)^*$ ein Isomorphismus ist, ist auch $m_y/m_y^2 \to m_x/m_x^2$ ein Isomorphismus und somit ist $g(e_1),\dots,g(e_r)$ ein reguläres Parametersystem von $\mathcal{O}_{X,x}$. Deshalb ist $\hat{g} : (\mathcal{O}_{Y,y})^\wedge \to (\mathcal{O}_{X,x})^\wedge$ ein Isomorphismus. Nach Korollar 1.3.10. existiert OE ein Morphismus $f_o : X_o \to Y_o$ von Schemata, so daß $X = X_o^h$, $Y = Y_o^h$, $f = f_o^h$. Da $\hat{g}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $(\mathcal{O}_{Y_o,y})^\wedge \to (\mathcal{O}_{X_o,x})^\wedge$ ein Isomorphismus. Nach [SGA 1, I, 4.2.] ist f_o etal in x.) Aus dem Satz über die Umkehrfunktion folgt der Rangsatz

<u>Satz 8.3.1.</u>

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen regulären isoalgebraischen Räumen vom Rang r, d.h. T_xf hat Rang r für jedes $x \in X$. Dann gibt es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X, so daß für jedes U_i gilt: Es existieren eine offene Teilmenge V von Y, ein regulärer rein r-dimensionaler isoalgebraischer Teilraum V_o von V und eine offene Einbettung $j: U_i \to V_o \times (\mathbb{A}^m)^h$, so daß $f(U_i) = V_o$ und so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f|U_i"'] & V_o \times (\mathbb{A}^m)^h \arrow[d, "p"] \\ V & V_o \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

wobei p die Projektion ist.

Der Rangsatz 8.3.1. ist in [M, §1] bewiesen.

<u>Korollar 8.3.2.</u>

Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen regulären isoalgebraischen Räumen vom Rang r. f sei abgeschlossen, d.h. $f(A)$ ist eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von Y für jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge A von X. Dann ist $f(X)$ eine rein r-dimensionale isoalgebraische Teilmenge von Y.

Beweis:

Nach dem Rangsatz existieren eine Überdeckung $(U_i \mid i = 1,\dots,n)$ von X und eine Familie $(V_i \mid i = 1,\dots,n)$ von offenen Teilmengen von Y, so daß $f(U_i)$ eine rein r-dimensionale isoalgebraische Teilmenge von V_i ist $(i = 1,\dots,n)$. Für jede nichtleere Teilmenge T von $\{1,\dots,n\}$ setze man $N_T =$ $(\bigcap_{i\in T} V_i) \cap (Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i\in T} U_i))$.

Es gelten

(*) Die endlich vielen offenen semialgebraischen Teilmengen N_T von Y überdecken die abgeschlossene semialgebraische Teilmenge $f(X)$.

Denn: Gegeben sei ein $x \in f(X)$. Setzt man $T = \{i \in \{1,\dots,n\} \mid x \in V_i\}$, so ist $x \in N_T$.

(**) Für jedes T ist $f(X) \cap N_T$ eine rein r-dimensionale isoalgebraische Teilmenge von N_T.

Denn: Es ist $f^{-1}(N_T) \subseteq \bigcup_{i \in T} U_i$. Somit ist $f(X) \cap N_T = f(f^{-1}(N_T)) = f(f^{-1}(N_T) \cap \bigcup_{i \in T} U_i) = f(\bigcup_{i \in T} (f^{-1}(N_T) \cap U_i)) = \bigcup_{i \in T} f(f^{-1}(N_T) \cap U_i) = \bigcup_{i \in T} (N_T \cap f(U_i))$. Für jedes $i \in T$ ist $N_T \subseteq V_i$ und somit ist $N_T \cap f(U_i)$ eine rein r-dimensionale isoalgebraische Teilmenge von N_T.

Ist $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus zwischen komplex analytischen Räumen, so ist $f(X)$ eine analytische Teilmenge von Y. Mit Hilfe des Korollars 8.3.2. läßt sich der entsprechende Satz in der isoalgebraischen Geometrie ähnlich beweisen wie in der komplexen Analysis (siehe [N]). Der Beweis ist jedoch im isoalgebraischen Fall viel einfacher, da hier keine wesentlichen Singularitäten auftreten können.

Satz 8.3.3.

Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen isoalgebraischen Räumen, der abgeschlossen ist. Dann ist $f(X)$ eine isoalgebraische Teilmenge von Y.

Beweis:

Der Satz wird durch vollständige Induktion nach $\dim X$ bewiesen. Der Satz gelte für $\dim X < n$. Sei nun X ein n-dimensionaler isoalgebraischer Raum. OE ist Y ein lokal abgeschlossener isoalgebraischer Teilraum eines $\mathbb{A}^n$, also ist auch OE Y ein offener isoalgebraischer Teilraum eines $\mathbb{A}^n$ und somit regulär. OE ist X irreduzibel und reduziert. Sei S der singuläre Ort von X und $m = \max\{\text{rang } T_x f \mid x \in X \setminus S\}$. $S_o = \{x \in X \setminus S \mid \text{rang } T_x f < m\}$ ist eine isoalgebraische Teilmenge von $X \setminus S$. Nach Satz 8.2.1.i) ist $S \cup S_o = S \cup \overline{S}_o$ eine isoalgebraische Teilmenge von X. Es ist $\dim(S \cup S_o) < n$. Also ist $A = f(S \cup S_o)$ eine isoalgebraische Teilmenge von Y. Nach Korollar 8.3.2. ist $B = f(X \setminus f^{-1}(A))$ eine isoalgebraische Teilmenge von $Y \setminus A$. Wieder nach Satz 8.2.1.i) ist somit $f(X) = A \cup B$ eine isoalgebraische Teilmenge von Y.

§9 - Der Kugelsatz

Der klassische Hartogsche Kugelsatz im $\mathbb{C}^n$ lautet

(*) Seien G eine offene zusammenhängende und K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$, so daß $K \subseteq G$ und $G \setminus K$ zusammenhängend ist. Dann läßt sich jede holomorphe Funktion auf $G \setminus K$ fortsetzen zu einer holomorphen Funktion auf G.

Zum Beweis benutzt man $H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ für die Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ (siehe z.B. [GR, II, §4], [KK, §52]) oder die Bochner-Martinelli Integralformel ([BT, Kap. III]). In [BS, I, §4] und [Ha] wird der Hartogsche Kugelsatz auf normale Steinsche Räume verallgemeinert

(**) Sei X ein zusammenhängender normaler Steinscher Raum der Dimension ≥ 2 und sei K eine kompakte Teilmenge von X, so daß $X \setminus K$ zusammenhängend ist. Dann ist für jede offene Menge U von X mit $K \subseteq U$ $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U \setminus K)$ bijektiv.

Zum Beweis von (**) wird ebenfalls $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ und noch zusätzlich Dualitätstheorie benutzt. Aus (**) folgt insbesondere die rein topologische Aussage

(***) Sei X ein zusammenhängender normaler Steinscher Raum der Dimension ≥ 2 und sei K eine kompakte Teilmenge von X, so daß $X \setminus K$ zusammenhängend ist. Für jede offene zusammenhängende Teilmenge U von X mit $K \subseteq U$ ist $U \setminus K$ zusammenhängend.

Im isoalgebraischen Fall geht man den umgekehrten Weg von der topologischen Aussage zu der funktionentheoretischen Aussage. In 9.1. wird zuerst (***) für affine Schemata gezeigt. Mit diesem Ergebnis wird dann (**) für affine Schemata gezeigt.

Proposition 9.1.

Sei X ein zusammenhängendes affines normales Schema der Dimension ≥ 2. Seien K eine vollständige semialgebraische Teilmenge von $X(C)$, so daß $X(C) \setminus K$ zusammenhängend ist, und U eine zusammenhängende offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ mit $K \subseteq U$. Dann ist $U \setminus K$ zusammenhängend.

Beweis:

Hilfssatz:

Sei $p : S^1 \times R^2 \to S^1$ die Projektion. Sei L eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von $S^1 \times R^2$, so daß $p|L : L \to S^1$ eine Überlagerung ist. Sei $t : X \to S^1 \times R^2$ eine endliche Abbildung, so daß $t|X \setminus t^{-1}(L) : X \setminus t^{-1}(L) \to S^1 \times R^2 \setminus L$ eine Überlagerung ist. Sei K eine vollständige semialgebraische Teilmenge von X, so daß ein $a \in S^1$ existiert mit $t^{-1}(\{a\} \times R^2) \cap K = \emptyset$. Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von X mit $K \subseteq U$. Seien x und y Punkte aus X, die in $U \setminus t^{-1}(L)$ und in $(X \setminus K) \setminus t^{-1}(L)$ durch einen Weg verbindbar sind. Dann sind x und y auch in $(U \setminus K) \setminus t^{-1}(L)$ durch einen Weg verbindbar.

Beweis:

Sei Z die Zusammenhangskomponente von $X \setminus t^{-1}(L)$, die x und y enthält. $q = p|S^1 \times R^2 \setminus L : S^1 \times R^2 \setminus L \to S^1$ ist eine stark lokal triviale Faserung. Die lange exakte Homotopiesequenz zu dieser Faserung liefert die exakte Sequenz

(*) $\quad \pi_1(q^{-1}(a)) \to \pi_1(S^1 \times R^2 \setminus L) \to \pi_1(S^1)$.

Sei P eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von $S^1 \times R^2 \setminus (L \cup t(K))$, so daß $q|P : P \to S^1$ ein Isomorphismus ist. Nach (*) ist $\pi_1(Q) \to \pi_1(S^1 \times R^2 \setminus L)$ surjektiv, wobei $Q = q^{-1}(a) \cup P$. Also ist $t^{-1}(Q) \cap Z$ zusammenhängend und $\pi_1(t^{-1}(Q) \cap Z) \to \pi_1(Z)$ surjektiv. Dann ist $H_1(t^{-1}(Q) \cap Z, \mathbb{Z}) \to H_1(Z,\mathbb{Z})$ surjektiv, also auch $H_1(Z \setminus K, \mathbb{Z}) \to H_1(Z,\mathbb{Z})$ surjektiv, denn $t^{-1}(Q) \cap Z \subseteq Z \setminus K$. Aus der Mayer-Vietoris Sequenz zu der Überdeckung $Z = (Z \setminus K) \cup (Z \cap U)$ von Z folgt

(**) $\quad H_0((Z \setminus K) \cap (Z \cap U), \mathbb{Z}) \to H_0(Z \setminus K, \mathbb{Z}) \oplus H_0(Z \cap U, \mathbb{Z})$ ist injektiv.

Sei Z_1 die Zusammenhangskomponente von $Z \setminus K$, die x und y enthält und sei Z_2 die Zusammenhangskomponente von $Z \cap U$, die x und y enthält. Nach (**) ist $Z_1 \cap Z_2$ zusammenhängend.

Nun zum Beweis von Proposition 9.1.. Sei $t : X \to \mathbb{A}^n$ ein endlicher und surjektiver Morphismus. Sei $p : \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{n-1}$ die Projektion. Es gibt ein reduziertes abgeschlossenes Unterschema L von $\mathbb{A}^n$, so daß $\dim L \leq n-1$ und $t|X \setminus t^{-1}(L) : X \setminus t^{-1}(L) \to \mathbb{A}^n \setminus L$ etal ist. Es gibt eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge Z_o von $\mathbb{A}^{n-1}$, so daß $\dim Z_o \leq n-2$ und $p|L \setminus p^{-1}(Z_o) : L \setminus p^{-1}(Z_o) \to \mathbb{A}^{n-1} \setminus Z_o$ endlich und etal ist.

Man setze $q = p_C \circ t_C : X(C) \to \mathbb{A}^{n-1}(C)$ und $Z = t^{-1}(L(C)) \cup q^{-1}(Z_o(C))$. Es ist $\dim Z < \dim X$. Es genügt zu zeigen, daß $(U \setminus K) \setminus Z$ zusammenhängend ist. Seien x und y Punkte aus $(U \setminus K) \setminus Z$. Nach Korollar 6.7. ist $(X(C) \setminus K) \setminus Z$ zusammenhängend. Man wähle einen Weg $\alpha : [-1,+1] \to (X(C) \setminus K) \setminus Z$, so daß $\alpha(-1) = x$, $\alpha(+1) = y$ und ein Punkt a aus $(q\circ\alpha)([-1,+1]) \setminus q(K)$ existiert (dies ist die einzige Stelle, an der die Voraussetzung $\dim X \geq 2$ eingeht). Auch $U \setminus Z$ ist zusammenhängend. Man wähle einen Weg $\beta : [-1,+1] \to U \setminus Z$ mit $\beta(-1) = x$ und $\beta(+1) = y$. Sei $h : S^1 \to \mathbb{A}^{n-1}(C)$ die semialgebraische Abbildung, definiert durch $h(d,e) = (q\circ\alpha)(d)$ für $(d,e) \in S^1$ mit $e \geq 0$ und $h(d,e) = (q\circ\beta)(d)$ für $(d,e) \in S^1$ mit $e \leq 0$. Indem man das kartesische Diagramm zu

$$\begin{tikzcd} & X(C) \arrow[d, "q"] \\ S^1 \arrow[r, "h"'] & \mathbb{A}^{n-1}(C) \end{tikzcd}$$

betrachtet, folgt aus dem Hilfssatz, daß x und y in $(U \setminus K) \setminus Z$ durch einen Weg verbindbar sind.

<u>Proposition 9.2.</u>

Sei $f : X \to Y$ ein endlicher surjektiver Morphismus zusammenhängender affiner normaler Schemata der Dimension ≥ 2. Sei K eine vollständige semialgebraische Teilmenge von $Y(C)$, so daß $Y(C) \setminus K$ zusammenhängend ist. Dann ist auch $X(C) \setminus f^{-1}(K)$ zusammenhängend.

Beweis:

Es gilt der triviale

Hilfssatz:
Sei $p : [0,1]\times R^2 \to [0,1]$ die Projektion und sei L eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von $[0,1]\times R^2$, so daß $p|L : L \to [0,1]$ eine Überlagerung ist. Sei $t : X \to [0,1]\times R^2 \setminus L$ eine Überlagerung und sei Z eine Zusammenhangskomponente von X. Für jede abgeschlossene semialgebraische Teilmenge H von $[0,1]$ mit $H \neq [0,1]$ und jedes $r > 0$ ist dann $Z \cap t^{-1}([0,1]\times R^2 \setminus H\times\overline{B}_r(0))$ zusammenhängend.

Sei $g : Y \to \mathbb{A}^n$ ein endlicher surjektiver Morphismus. Sei K_o ein Polyzylinder in $\mathbb{A}^n(C)$ mit Mittelpunkt 0, so daß $g(K) \subseteq K_o$. Es existiert eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge B von Y, so daß $\dim B < \dim Y$ und $f|X \setminus f^{-1}(B) : X \setminus f^{-1}(B) \to Y \setminus B$ etal ist. Seien u und v Punkte aus $(X(C) \setminus f^{-1}(K)) \setminus f^{-1}(B)$. Nach Korollar 6.7. ist $(Y(C) \setminus K) \setminus B$ zusammenhängend. Wähle Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to (Y(C) \setminus K) \setminus B$, so daß $\alpha(0) = f(u)$, $\alpha(1) \in (Y(C) \setminus g^{-1}(\overline{K}_o)) \setminus B$ und $\beta(0) = f(v)$, $\beta(1) \in (Y(C) \setminus g^{-1}(\overline{K}_o)) \setminus B$. Seien $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ die Liftungen von α und β bezüglich $f_C|X(C) \setminus f^{-1}(B)$ mit $\hat{\alpha}(0) = u$ und $\hat{\beta}(0) = v$. Es sind dann $\hat{\alpha}(1)$ und $\hat{\beta}(1)$ Punkte aus $X(C) \setminus f^{-1}(g^{-1}(\overline{K}_o))$. Es genügt also zu zeigen, daß $X(C) \setminus t^{-1}(\overline{K}_o)$ zusammenhängend ist, wobei $t = g\circ f$. Es existiert ein reduziertes abgeschlossenes Unterschema L von $\mathbb{A}^n$, so daß $\dim L < n$ und $t|X \setminus t^{-1}(L) : X \setminus t^{-1}(L) \to \mathbb{A}^n \setminus L$ etal ist. Sei $p : \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n-1}\times\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{n-1}$ die Projektion. Es gibt eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge A von $\mathbb{A}^{n-1}$, so daß $\dim A < n-1$ und $p|L \setminus p^{-1}(A) : L \setminus p^{-1}(A) \to \mathbb{A}^{n-1} \setminus A$ endlich und etal ist. Sei $q = p_C\circ t_C$ und $T = t^{-1}(L(C)) \cup q^{-1}(A)$.

Seien x und y Punkte aus $(X(C) \setminus t^{-1}(\bar{K}_o)) \setminus T$. Nach Satz 7.18. und Korollar 6.7. ist $X(C) \setminus T$ zusammenhängend. Sei $\sigma : [0,1] \to X(C) \setminus T$ ein Weg, so daß $(q \circ \sigma)([0,1]) \not\subseteq p(\bar{K}_o)$ und $\sigma(0) = x$ und $\sigma(1) = y$. Betrachtet man das kartesische Diagramm zu

$$\begin{array}{ccc} & & X(C) \\ & & \downarrow q \\ [0,1] & \xrightarrow{q \circ \sigma} & \mathbb{A}^{n-1}(C) \end{array}$$

, so folgt aus dem Hilfssatz, daß x und y in $(X(C) \setminus t^{-1}(\bar{K}_o)) \setminus T$ durch einen Weg verbindbar sind.

Korollar 9.3.

Sei X ein irreduzibles affines Schema der Dimension ≥ 2 und sei K eine vollständige semialgebraische Teilmenge von X(C). Dann gibt es eine vollständige semialgebraische Teilmenge K_o von X(C), so daß $K \subseteq K_o$ und $X(C) \setminus K_o$ irreduzibel (also auch zusammenhängend) ist.

Beweis:

OE ist X reduziert. Sei $g : X \to \mathbb{A}^n$ ein endlicher surjektiver Morphismus und sei $f : Y \to X$ die Normalisierung von X. Sei P ein Polyzylinder in $\mathbb{A}^n(C)$, so daß $g(K) \subseteq P$. Nach Proposition 9.2. ist $Y(C) \setminus (g \circ f)^{-1}(\bar{P})$ zusammenhängend. Also ist $X(C) \setminus g^{-1}(\bar{P})$ irreduzibel.

Satz 9.4.

Sei X ein zusammenhängendes affines normales Schema der Dimension ≥ 2. Sei K eine vollständige semialgebraische Teilmenge von X(C), so daß $X(C) \setminus K$ zusammenhängend ist und sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$, so daß $K \subseteq U$. Dann ist die Restriktion $\mathcal{A}_X(U) \to \mathcal{A}_X(U \setminus K)$ bijektiv.

Beweis:

Seien $U_1,\dots,U_n$ die Zusammenhangskomponenten von U. Es ist dann $U_1 \cap K$ vollständig und $X(C) \setminus (U_1 \cap K)$ zusammenhängend, denn: Da $X(C)$ zusammenhängend ist (Satz 7.18.), ist $U_i \not\subseteq K$, d.h. $(X(C) \setminus K) \cap U_i \neq \emptyset$ (für $i = 1,\dots,n$). Also ist $X(C) \setminus (U_1 \cap K) = (X(C) \setminus K) \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ zusammenhängend. Indem man U durch U_1 und K durch $U_1 \cap K$ ersetzt, kann man OE annehmen, daß U zusammenhängend ist. Nach 9.1. ist dann auch $U \setminus K$ zusammenhängend. Gegeben sei ein $f \in \mathcal{A}_X(U \setminus K)$. Nach Lemma 6.2. existieren ein zusammenhängendes affines normales Schema X_o, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $X_o(C)$, eine Zariski-offene Teilmenge W von X_o mit $V \subseteq W$, ein $f_o \in \mathcal{O}_{X_o}(W)$ und ein endlicher surjektiver Morphismus $p : X_o \to X$, so daß $p^h|V : V \to U \setminus K$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f_o|V$. Seien $V_1,\dots,V_m$ die Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$. Da V zusammenhängend ist, ist $V \subseteq V_t$ für ein $t \in \{1,\dots,m\}$. Es gilt

(*) $V_t \setminus p^{-1}(K)$ ist zusammenhängend.

Denn: Nach 9.2. ist $X_o(C) \setminus p^{-1}(K)$ zusammenhängend. Da nach Korollar 4.9. p_C offen ist, ist $p(V_i) \not\subseteq K$ für jedes $i \in \{1,\dots,m\}$. Deshalb ist $X_o(C) \setminus (V_t \cap p^{-1}(K)) = (X_o(C) \setminus p^{-1}(K)) \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{m} V_i$ zusammenhängend. Nach 9.1. ist $V_t \setminus p^{-1}(K)$

zusammenhängend.

Aus (*) folgt

(**) $V_t \setminus p^{-1}(K) = V$.

Es gibt eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge Z von X, so daß $\dim Z < \dim X$ und $p|X_o \setminus p^{-1}(Z)$ etal ist. Also ist $p_C|V_t \setminus p^{-1}(Z) : V_t \setminus p^{-1}(Z) \to U \setminus Z$ eine semialgebraische Überlagerung. Nach (**) ist $p_C|V_t \setminus p^{-1}(Z)$ ein Isomorphismus. Da p_C eine offene Abbildung ist, ist dann $p_C : V_t \to U$ ein semialgebraischer Isomorphismus. Nach Korollar 5.5. ist $p^h : V_t \to U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Sei W_o der maximale Definitionsbereich der durch f_o gegebenen rationalen Funktion auf X_o. Angenommen, es sei $V_t \not\subseteq W_o$. Es ist dann $(X_o \setminus W_o) \cap V_t$ eine isoalgebraische Teilmenge von V_t der Dimension $\dim X-1$. Nach (**) ist $(X_o \setminus W_o) \cap V_t$ vollständig. Dann ist $(X_o \setminus W_o) \cap V_t$ endlich nach Proposition 7.16.. Widerspruch zu $\dim X \geq 2$. Also ist $V_t \subseteq W_o$ und f läßt sich zu einer isoalgebraischen Funktion auf U fortsetzen.

Ähnlich wie Satz 9.4. beweist man folgende kleine Verschärfung für den Fall $X = \mathbb{A}^n$.

Satz 9.5.

Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(C)$ und K eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von U. Sei p die Einschränkung der Projektion $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{n-1}$ auf U. Es gelte

i) U und $U \setminus K$ sind zusammenhängend

ii) $p|K : K \to p(U)$ ist eigentlich und $p(K) \neq p(U)$.

Dann ist $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}^n}(U) \to \mathfrak{A}_{\mathbb{A}^n}(U \setminus K)$ bijektiv.

Korollar 9.6.

Seien $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$ mit $0 < q_i < 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann läßt sich jede isoalgebraische Funktion auf der Hartogsfigur $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid q_n < |z_n| < 1$ und $|z_i| < 1$ für $i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_n| < 1$ und $|z_i| < q_i$ für $i = 1, \ldots, n-1\}$ fortsetzen zu einer isoalgebraischen Funktion auf dem Polyzylinder $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < 1$ für $i = 1, \ldots, n\}$.

§10 - Einige Eigenschaften isoalgebraischer Funktionen, II

Satz 10.1.

i) Seien X ein zusammenhängender normaler isoalgebraischer Raum und $f : X \to C$ eine semialgebraische Funktion mit $p(f) = 0$, wobei p ein von Null verschiedenes Polynom aus $\mathcal{O}_X(X)[T]$ ist. Dann ist f isoalgebraisch.

ii) Seien X ein integres affines Schema, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und $f \in \mathfrak{a}_X(U)$. Dann gibt es ein von Null verschiedenes Polynom $p \in \mathcal{O}_X(X)[T]$, so daß $(p|U)(f) = 0$.

Beweis:

i) Es sei $p(f) = 0$ mit $p = a_o T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathcal{O}_X(X)[T]$, $a_o \neq 0$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz genügt es zu zeigen, daß f auf $X \setminus \{x \in X | a_o(x) = 0\}$ isoalgebraisch ist. Also OE $a_o = 1$ auf X, d.h. p ist normiert. Sei $p = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ die Zerlegung von p in irreduzible Faktoren gemäß Beispiel 7.17.. Die Diskriminante Δ von $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ ist ungleich Null. Da $q(f) = 0$, ist nach Beispiel 3.4. f isoalgebraisch auf $X \setminus \{x \in X | \Delta(x) = 0\}$. Also ist f isoalgebraisch auf X.

ii) Es gibt eine Überdeckung $(U_i | i = 1,\ldots,n)$ von U, so daß für jedes $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt: Es existieren ein Schema X_i, eine offene semialgebraische Teilmenge V_i von $X_i(C)$, ein $f_i \in \mathcal{O}_{X_i}(X_i)$ und ein etaler Morphismus $g_i : X_i \to X$, so daß $g_i^h | V_i : V_i \to U_i$ ein Isomorphismus ist und $(g_i^h|V_i)*(f|U_i) = f_i|V_i$. Da der Ring $\mathcal{O}_{X_i}(X_i)$ algebraisch über $\mathcal{O}_X(X)$ ist, gibt es ein $p_i \in \mathcal{O}_X(X)[T] \setminus \{0\}$ mit $(p_i|U_i)(f) = 0$. Für $p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ ist dann $(p|U)(f) = 0$.

Satz 10.2.

Seien X ein zusammenhängender normaler isoalgebraischer Raum, A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X und $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus A)$.

i) Ist $\dim A \leq \dim^{sa} X-1$ (d.h. ist $X \setminus A$ dicht in X) und läßt sich f zu einer stetigen Funktion auf X fortsetzen, so ist diese Fortsetzung isoalgebraisch.

ii) Ist $\dim A \leq \dim^{sa} X-2$ und ist f schwach lokal beschränkt auf X, so läßt sich f isoalgebraisch auf X fortsetzen.

iii) Ist $\dim A \leq \dim^{sa} X-3$, so läßt sich f isoalgebraisch auf X fortsetzen.

Beweis:

i) OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines zusammenhängenden affinen normalen Schemas X_o. Nach Satz 10.1.ii) gibt es ein $p \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)[T] \setminus \{0\}$, so daß $(p|X \setminus A)(f) = 0$. Sei f_o eine stetige Fortsetzung von f auf X. Es ist $(p|X)(f_o) = 0$. Nach Satz 10.1.i) ist f_o isoalgebraisch.

ii) und iii) sind der Riemannsche Hebbarkeitssatz 6.8..

Korollar 10.3.

Seien X ein normaler isoalgebraischer Raum und $f : X \to C$ eine semialgebraische Funktion, so daß f isoalgebraisch auf $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ist. Dann ist f isoalgebraisch.

Beweis:

Es ist f isoalgebraisch auf $X \setminus Rd\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ und $X \setminus Rd\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ ist dicht in X.

Der folgende Satz gibt eine Umkehrung von Satz 2.3. und Satz 2.9. und eine Verschärfung von Satz 2.10..

Satz 10.4.

Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^n(C)$ und $f: U \to C$ eine semialgebraische Funktion.

i) Ist f partiell differenzierbar, d.h. existieren zu jedem $u \in U$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(u)$, so ist f isoalgebraisch.

ii) Ist f analytisch, d.h. gibt es zu jedem $u \in U$ eine Umgebung V und eine Potenzreihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha (T-u)^\alpha$, so daß $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha (z-u)^\alpha$ gegen f(z) konvergiert für jedes $z \in V$, so ist f isoalgebraisch.

Beweis:

i) Man betrachte U als offene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^{2n}(R)$. Seien $A, B \subseteq R^{2n} \times R$ die Graphen des Realteils von f und des Imaginärteils von f. Sei Z der Zariski-Abschluß von $A \cup B$ in $\mathbb{A}^{2n}_R \times \mathbb{A}^1_R$. Man versehe Z mit der reduzierten Unterraumstruktur. Da $\dim Z = 2n$, gibt es eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge S von

$\mathbb{A}^{2n}_R$, so daß $\dim S < 2n$ und $p|Z \setminus p^{-1}(S)$ etal ist, wobei $p: Z \to \mathbb{A}^{2n}_R$ die Einschränkung der Projektion $\mathbb{A}^{2n}_R \times \mathbb{A}^1_R \to \mathbb{A}^{2n}_R$ auf Z ist. Es sind $p|A \setminus p^{-1}(S) : A \setminus p^{-1}(S) \to U \setminus S$ und $p|B \setminus p^{-1}(S) : B \setminus p^{-1}(S) \to U \setminus S$ semialgebraische Isomorphismen. Deshalb sind $A \setminus p^{-1}(S)$ und $B \setminus p^{-1}(S)$ offene semialgebraische Teilmengen von $(Z \setminus p^{-1}(S))(R)$ und $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ sind Nashfunktionen auf $U \setminus S$. Nach Satz 2.10. ist f isoalgebraisch auf $U \setminus S$. Nach Satz 10.2.i) ist f isoalgebraisch auf U.

ii) Ist f analytisch, so ist f partiell differenzierbar und somit isoalgebraisch.

Eine Teilmenge A eines isoalgebraischen Raumes X heißt lokal isoalgebraisch, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X gibt, so daß $A \cap U$ eine isoalgebraische Teilmenge von U ist.

Satz 10.5.

Eine semialgebraische und lokal isoalgebraische Teilmenge eines isoalgebraischen Raumes X ist eine isoalgebraische Teilmenge von X.

Beweis:

Ist a ein Punkt einer semialgebraischen und lokal isoalgebraischen Teilmenge A eines isoalgebraischen Raums, so setze man $\dim_a A = \frac{1}{2} \cdot \dim^{sa}_a A$. Es genügt zu zeigen

(*) Seien X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines reduzierten Schemas X_o und A eine semialgebraische und lokal isoalgebraische Teilmenge von X. Dann ist A eine isoalgebraische Teilmenge von X.

Es wird (*) durch vollständige Induktion nach $\dim X_o$ bewiesen. (*) gelte für $\dim X_o < n$. Sei nun X_o ein n-dimensionales Schema.

$A_o = \{a \in A | \dim_a A \geq n\}$ ist eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von X. Sei S der singuläre Ort von X. $A_o \setminus S$ ist offen und abgeschlossen in $X \setminus S$. Also ist $\overline{A_o \setminus S}$ Vereinigung von irreduziblen Komponenten von X. Es ist A_o semialgebraisch rein von der Dimension 2n und somit ist $A_o = \overline{A_o \setminus S}$ eine isoalgebraische Teilmenge von X.

Sei T eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von $A \setminus A_o$, so daß $(A \setminus A_o) \setminus T$ dicht in $A \setminus A_o$ ist und $(A \setminus A_o) \setminus T$ eine semialgebraische Mannigfaltigkeit ist. Seien $Z_1,\ldots,Z_r$ die Zusammenhangskomponenten von $(A \setminus A_o) \setminus T$. $(X \setminus A_o) \setminus T$ ist offen in X und $Z_1,\ldots,Z_r$ sind lokal isoalgebraische Teilmengen von $(X \setminus A_o) \setminus T$. Sei $d_i = \max\{\dim_x Z_i | x \in Z_i\}$ $(i = 1,\ldots,r)$. Es gibt eine offene semialgebraische Teilmenge U_i von Z_i, so daß $\dim \overline{U_i}^{Zar} = d_i$ und $\dim_x Z_i = d_i$ für ein $x \in U_i$. Man betrachte nun die lokal isoalgebraische Teilmenge $Z_i \cap \overline{U_i}^{Zar}$ von $(X \setminus A_o) \setminus T$ und die Menge $T_i = \{x \in Z_i \cap \overline{U_i}^{Zar} | \dim_x(Z_i \cap \overline{U_i}^{Zar}) \geq d_i\}$. T_i ist eine nichtleere abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von Z_i. Es gilt

(**) T_i ist offen in Z_i.

Denn: Sei $x \in T_i$ gegeben. Sei V eine offene semialgebraische Umgebung von x in $(X \setminus A_o) \setminus T$, so daß $Z_i \cap V$ eine isoalgebraische Teilmenge von V und zusammenhängend ist. Nach Proposition 7.10. ist $Z_i \cap V$ irreduzibel. Da $x \in T_i$, gilt nach Korollar 7.11.: $\dim(Z_i \cap V) = d_i$ und $(Z_i \cap V) \cap \overline{U_i}^{Zar} = Z_i \cap V$. Also ist $Z_i \cap V \subseteq T_i$.

Aus (**) folgt $Z_i = T_i$ und somit ist $Z_i \subseteq \overline{U_i}^{Zar}$. Also ist $\overline{A \setminus A_o}^{Zar} = \overline{(A \setminus A_o) \setminus T}^{Zar} = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{Z_i}^{Zar} = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{U_i}^{Zar}$ und damit $\dim \overline{A \setminus A_o}^{Zar} = \max\{d_1,\dots,d_r\} = \max\{\dim_a A \mid a \in A \setminus A_o\} \leq n-1$.
$A \cap \overline{(A \setminus A_o)}^{Zar}$ ist eine semialgebraische und lokal isoalgebraische Teilmenge des offenen isoalgebraischen Teilraums $X \cap \overline{(A \setminus A_o)}^{Zar}$ von $\overline{A \setminus A_o}^{Zar}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $A \cap \overline{(A \setminus A_o)}^{Zar}$ eine isoalgebraische Teilmenge von $X \cap \overline{(A \setminus A_o)}^{Zar}$ und damit auch eine isoalgebraische Teilmenge von X. Deshalb ist $A = A_o \cup (A \cap \overline{(A \setminus A_o)}^{Zar})$ eine isoalgebraische Teilmenge von X.

Der folgende Satz verallgemeinert 2.2. auf reduzierte isoalgebraische Räume.

Satz 10.6.

Sei $f : X \to Y$ eine semialgebraische Abbildung zwischen reduzierten isoalgebraischen Räumen. Zu jedem $x \in X$ gebe es eine offene semialgebraische Umgebung U, so daß $f|U : U \to Y$ isoalgebraisch ist. Dann ist f isoalgebraisch.

1. Beweis:

Der Graph $\Gamma(f)$ von f ist eine semialgebraische und lokal isoalgebraische Teilmenge von $X \times Y$. Nach Satz 10.5. ist

$\Gamma(f)$ eine isoalgebraische Teilmenge von $X \times Y$. Man versehe $\Gamma(f)$ mit der reduzierten Teilraumstruktur. Seien $p : X\times Y \to X$ und $q : X\times Y \to Y$ die Projektionen. Nach Korollar 1.3.11.ii)b) ist $p|\Gamma(f) : \Gamma(f) \to X$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Somit ist $f = q\circ(p|\Gamma(f))^{-1}$ isoalgebraisch.

2. Beweis:

Es genügt zu zeigen

(*) Sei $h : X \to \dot{C}$ eine semialgebraische Funktion, so daß es zu jedem $x \in X$ eine offene semialgebraische Umgebung gibt, auf der h isoalgebraisch ist. Dann ist h isoalgebraisch.

Zu jedem $x \in X$ hat man $h_x \in \mathcal{O}_{X,x}$. Zu zeigen ist, daß ein $g \in \mathcal{O}_X(X)$ existiert mit $g_x = h_x$ für jedes $x \in X$. Sei $(\hat{X}, f)$ eine Normalisierung von X. Nach Satz 2.2. ist $h\circ f$ eine isoalgebraische Funktion auf $\hat{X}$, gibt also ein $s \in \mathcal{O}_{\hat{X}}(\hat{X}) = f_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(X)$. $\mathcal{O}_X$ ist eine Untergarbe von $f_*\mathcal{O}_{\hat{X}}$. Es ist $s_x = h_x$ für jedes $x \in X$. Nach Satz 4.6. ist $f_*\mathcal{O}_{\hat{X}}$ kohärent und somit ist nach Korollar 1.2.9. $s \in \mathcal{O}_X(X)$.

<u>Satz 10.7.</u>

Seien X ein isoalgebraischer Raum, $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $V = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ und F eine kohärente Garbe auf X. Es gelten

i) Sei $s \in F(X)$ mit $s|X \setminus V = 0$. Dann ist $f^n \cdot s = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sei $s \in F(X \setminus V)$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß sich $(f|X \setminus V)^n \cdot s$ zu einem globalen Schnitt von F fortsetzen läßt.

Dies besagt, daß $F(X \setminus V)$ die Lokalisation von $F(X)$ bezüglich f ist.

Beweis von i):

OE existieren ein Schema X_o, ein $f_o \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)$, eine Familie $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ von Elementen aus $\mathcal{O}_{X_o}(X_o)$ und $s_1,\ldots,s_p \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)$, so daß X ein offener isoalgebraischer Teilraum von X_o, $f = f_o|X$, F der Kokern des durch die Matrix $(m_{ij}|X)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ gegebenen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_X^q \to \mathcal{O}_X^p$ und s das Bild von $(s_1|X,\ldots,s_p|X) \in \mathcal{O}_X^p(X)$ unter der Abbildung $\mathcal{O}_X^p(X) \to F(X)$ ist. Ist F_o der Kokern des durch die Matrix $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ gegebenen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_{X_o}{}^q \to \mathcal{O}_{X_o}{}^p$ und $s_o \in F_o(X_o)$ das Bild von $(s_1,\ldots,s_p) \in \mathcal{O}_{X_o}{}^p(X_o)$ unter der Abbildung $\mathcal{O}_{X_o}{}^p(X_o) \to F_o(X_o)$, so ist $F = (\varphi_{X_o})^*(F_o)|X$ und $s = (\varphi_{X_o})^*(s_o)|X$. Da $\mathcal{O}_{X,x}$ treuflach über $\mathcal{O}_{X_o,x}$ ist und somit $(F_o)_x \to ((\varphi_{X_o})^*(F_o))_x = (F_o)_x \otimes_{\mathcal{O}_{X_o,x}} \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv ist, ist $(s_o)_x = 0$ für jedes $x \in X \setminus V_o$, wobei $V_o = \{x \in X_o | f_o(x) = 0\}$. Sei $T = \{x \in X_o | (s_o)_x = 0\}$. T ist eine Zariski-offene Teilmenge von X_o und es ist $(X_o \setminus T) \cap X \subseteq V_o \cap X$. Dann existiert eine Zariski-offene Teilmenge U von X_o, so daß $X \subseteq U$ und $(X_o \setminus T) \cap U \subseteq V_o \cap U$. Also ist $s_o|U \setminus V_o = 0$. Somit ist $(f_o|U)^n \cdot (s_o|U) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und folglich $f^n \cdot s = 0$.

Beweis von ii):

Eine Garbe G auf einem isoalgebraischen Raum Y wird im folgenden als hebbar bezeichnet, wenn G kohärent ist und wenn es zu jeder offenen Teilmenge U von Y, zu jedem $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ und zu jedem $s \in G(U \setminus \{u \in U | f(u) = 0\})$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß sich $(f|U \setminus \{u \in U | f(u) = 0\})^n \cdot s$ zu einem Schnitt von G über U fortsetzen läßt. Es gelten

a) Ist $(U_i | i \in I)$ eine Überdeckung von Y und ist $G|U_i$ hebbar für jedes $i \in I$, so ist auch G hebbar.

b) Eine kohärente Untergarbe einer hebbaren Garbe ist hebbar.

c) Ist $0 \to S \to G \to T \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_Y$-Modulgarben und sind S und T hebbar, so ist auch G hebbar.

d) Die Strukturgarbe eines reduzierten isoalgebraischen Raumes ist hebbar.

Mit Hilfe von i) lassen sich a), b), c) leicht beweisen.

Beweis von d):

Seien Y ein zusammenhängendes normales Schema, U eine offene zusammenhängende semialgebraische Teilmenge von $Y(C)$, $f \in \mathcal{O}_Y(Y) \setminus \{0\}$ und $s \in \mathfrak{A}_Y(\{u \in U | f(u) \neq 0\})$. Es existieren ein zusammenhängendes normales Schema Y_o, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $Y_o(C)$, eine Zariski-offene Teilmenge W von Y_o mit $V \subseteq W$, ein $s_o \in \mathcal{O}_{Y_o}(W)$ und ein endlicher surjektiver Morphismus $p : Y_o \to Y$, so daß $p^h|V : V \to \{u \in U | f(u) \neq 0\}$ ein Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(s) = s_o|V$. Sei V_o der Abschluß von V in $p^{-1}(U)$. Es ist V_o offen in $Y_o(C)$ (denn: Gegeben sei ein $v \in V_o$. Sei T eine offene zusammenhängende semialgebraische Umgebung von v in $p^{-1}(U)$. $T \cap p^{-1}(\{u \in U | f(u) \neq 0\})$ ist zu-

sammenhängend. Also $T \cap p^{-1}(\{u \in U \mid f(u) \neq 0\}) \subseteq V$ und damit $T \subseteq V_o$). Da nach Korollar 4.9. p_C eine offene Abbildung ist, ist $p_C : V_o \to U$ ein semialgebraischer Isomorphismus. Nach Korollar 5.5. ist $p^h : V_o \to U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Sei $Z = \{y \in Y_o \mid p^*(f)(y) = 0\}$. Es ist $(Y_o \setminus W) \cap V_o \subseteq Z \cap V_o$. Es existiert eine Zariski-offene Teilmenge Q von Y_o, so daß $V_o \subseteq Q$ und $(Y_o \setminus W) \cap Q \subseteq Z \cap Q$, d.h. $Q \setminus Z \subseteq W$. Somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß sich $(p^*(f) \mid Q \setminus Z)^n \cdot (s_o \mid Q \setminus Z)$ zu einem Element aus $\mathcal{O}_{Y_o}(Q)$ fortsetzen läßt. Dann läßt sich auch $(f \mid \{u \in U \mid f(u) \neq 0\})^n \cdot s$ zu einem Element aus $\mathcal{A}_Y(U)$ fortsetzen.
Damit ist gezeigt, daß die Strukturgarbe eines normalen isoalgebraischen Raumes hebbar ist. Sei nun Y ein reduzierter isoalgebraischer Raum. Sei $(\hat{Y}, f)$ eine Normalisierung von Y. $\mathcal{O}_Y$ ist als Untergarbe der hebbaren Garbe $f_*\mathcal{O}_{\hat{Y}}$ hebbar.

Nun zum eigentlichen Beweis von ii). Seien X ein isoalgebraischer Raum und F eine kohärente Garbe auf X. Zu zeigen ist, daß F hebbar ist. Wie man im Beweis von i) gesehen hat, existieren eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X, Schemata X_i, offene Einbettungen $g_i : U_i \to X_i^h$ und kohärente Garben F_i auf X_i, so daß $F \mid U_i$ isomorph zu $g_i^*(\varphi_{X_i})^*(F_i)$ ist (für jedes $i \in I$). Also ist OE X der zu einem affinen Schema Y gehörige isoalgebraische Raum und $F = (\varphi_Y)^*(H)$, wobei H eine kohärente Garbe auf Y ist. Man hat eine Filtrierung $(0) = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_t = H$ von H durch kohärente Untergarben von H und integre abgeschlossene Unterschemata $Y_1,\dots,Y_t$ von Y, so daß $H_k/H_{k-1} = (j_k)_*(\mathcal{O}_{Y_k})$, wobei $j_k : Y_k \to Y$ die Inklusion ist $(k = 1,\dots,t)$. Da $(\varphi_Y)^*$ ein exakter Funktor ist, ist $(0) = (\varphi_Y)^*(H_0) \subseteq (\varphi_Y)^*(H_1) \subseteq \dots \subseteq (\varphi_Y)^*(H_t) = F$ eine Filtrierung von F durch kohärente Untergarben von F und $(\varphi_Y)^*(H_k)/(\varphi_Y)^*(H_{k-1}) = (j_k)^h{}_*(\mathcal{O}_{Y_k})$ $(k = 1,\dots,t)$. Nach c) und d) ist F hebbar.

<u>Korollar 10.8.</u>

Sei X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines affinen Schemas X_o. Seien $X_1,\dots,X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Dann gibt es Punkte $a_i \in X_i$, $i = 2,\dots,r$, und ein $f \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $f(x) = 0$ für jedes $x \in X_1$ und $f(a_i) \neq 0$ für $i = 2,\dots,r$. Also sind die Primideale $\underline{p}_i = \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(x) = 0$ für jedes $x \in X_i\}$, $i = 1,\dots,r$, verschieden.

Beweis:

Sei S der singuläre Ort von $(X_o)_{red}$. Es gibt ein $g \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o)$, so daß $V = \{x \in X_o(\mathbb{C}) \mid g(x) = 0\}$ nirgends dicht in $X_o(\mathbb{C})$ ist und $S(\mathbb{C}) \subseteq V$. Seien $Z_1,\dots,Z_r$ die Zusammenhangskomponenten von $X \setminus V$. Sei h die isoalgebraische Funktion auf $X \setminus V$ definiert durch $h|Z_1 = 0$ und $h|Z_i = 1$ für $i = 2,\dots,r$. Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß sich $(g|X \setminus V)^n \cdot h$ zu einem $f \in \mathcal{O}_X(X)$ fortsetzen läßt.

Der nachfolgende Satz verallgemeinert Proposition 7.15. auf kohärente Garben.

Satz 10.9.

Seien X ein isoalgebraischer Raum und F eine kohärente Garbe auf X. Sei $(F_i | i \in I)$ eine filtrierende Familie von kohärenten Untergarben von F (d.h. zu beliebigen $p,q \in I$ existiert ein $r \in I$, so daß $F_p \subseteq F_r$ und $F_q \subseteq F_r$). Dann ist die Familie stationär, d.h. es gibt ein $s \in I$, so daß $F_i \subseteq F_s$ für jedes $i \in I$.

Beweis:

Es gilt das triviale Kriterium

(*) Seien $(F_i | i \in I)$ eine filtrierende Familie von Untergarben einer Garbe F auf einem semialgebraischen Raum X und $0 \to G \to F \xrightarrow{f} H \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben auf X. Sind die Familien $(F_i \cap G | i \in I)$ und $(f(F_i) | i \in I)$ stationär, so ist auch $(F_i | i \in I)$ stationär.

Satz 10.9. wird durch vollständige Induktion nach $\dim X$ bewiesen. Der Induktionsanfang ist $\dim X = -1$ (oder auch $\dim X = 0$). 10.9. gelte für $\dim X < n$.

1. Fall: X ist ein n-dimensionaler reduzierter isoalgebraischer Raum.

Sei zunächst $(F_i | i \in I)$ eine filtrierende Familie von kohärenten Untergarben von $\mathcal{O}_X$. Sei Y_i der durch F_i definierte isoalgebraische Teilraum von X. Nach Proposition 7.15. existiert ein $a \in I$, so daß $|Y_i| = |Y_a|$ für jedes $i \in I$ mit $F_a \subseteq F_i$. Nach Proposition 1.5.6.i) ist dann $F_a \subseteq F_i \subseteq \sqrt{F_a}$ für jedes $i \in I$ mit $F_a \subseteq F_i$. Also ist OE $F_a \subseteq F_i \subseteq \sqrt{F_a}$ für jedes $i \in I$. Seien $X_1, \dots, X_r$ die irreduziblen Komponenten

von X und $J_1,\dots,J_r$ die zugehörigen Idealgarben, d.h. $J_k(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(x) = 0$ für jedes $x \in U \cap X_k\}$ für jede offene Teilmenge U von X und jedes $k \in \{1,\dots,r\}$. Es sei $F_a \not\subseteq J_k$ für $k \in \{1,\dots,b\}$ und $F_a \subseteq J_k$ für $k \in \{b+1,\dots,r\}$.
$(F_i + \bigcap_{k=1}^{b} J_k/F_a + \bigcap_{k=1}^{b} J_k \mid i \in I)$ ist eine filtrierende Familie kohärenter Untergarben von $\mathcal{O}_X/F_a + \bigcap_{k=1}^{b} J_k$ auf dem durch $F_a + \bigcap_{k=1}^{b} J_k$ definierten isoalgebraischen Teilraum Y von X.
Es ist $|Y| \subseteq |X_1| \cup \dots \cup |X_b|$ und $|X_k| \not\subseteq |Y|$ für $k = 1,\dots,b$ (denn $F_a \not\subseteq J_k$ für $k = 1,\dots,b$). Deshalb ist $\dim Y < \dim X$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist die Familie $(F_i + \bigcap_{k=1}^{b} J_k/F_a + \bigcap_{k=1}^{b} J_k \mid i \in I)$ stationär. Somit ist auch $(F_i + \bigcap_{k=1}^{b} J_k \mid i \in I)$ stationär. Es gibt also ein $c \in I$, so daß $F_i + \bigcap_{k=1}^{b} J_k \subseteq F_c + \bigcap_{k=1}^{b} J_k$ für jedes $i \in I$. Es ist dann auch $F_i \subseteq F_c$ für jedes $i \in I$, denn: Gegeben sei ein $i \in I$. Wähle ein $t \in I$, so daß $F_i \subseteq F_t$ und $F_c \subseteq F_t$. Es genügt zu zeigen, daß $F_t \subseteq F_c$. Da $F_a \subseteq J_k$ für $k = b+1,\dots,r$, ist $\sqrt{F_a} \subseteq J_k$ für $k = b+1,\dots,r$ und somit $F_t \subseteq \bigcap_{k=b+1}^{r} J_k$. Aus $F_c \subseteq F_t$, $F_t \subseteq F_c + \bigcap_{k=1}^{b} J_k$, $F_t \subseteq \bigcap_{k=b+1}^{r} J_k$ folgt $F_t \subseteq F_c + \bigcap_{k=1}^{r} J_k$. Da X reduziert ist, ist $\bigcap_{k=1}^{r} J_k = (0)$. Also ist $F_t \subseteq F_c$.

Mit Hilfe von (*) zeigt man durch vollständige Induktion nach m, daß eine filtrierende Familie kohärenter Untergarben von $\mathcal{O}_X^m$ stationär ist. Sei nun $(F_i \mid i \in I)$ eine filtrierende Familie kohärenter Untergarben einer kohärenten Garbe F. Es gibt eine Überdeckung $(U_t \mid t \in T)$ von X, so daß man auf jedem U_t einen surjektiven $\mathcal{O}_{U_t}$-Modulgarbenmorphismus $\mathcal{O}_{U_t}^{m_t} \xrightarrow{f_t} F|U_t$ hat. Wie eben gezeigt, ist $(f_t^{-1}(F_i|U_t) \mid$

$i \in I)$ stationär für jedes $t \in T$. Dann sind alle Familien $(F_i | U_t | i \in I)$ stationär und damit auch $(F_i | i \in I)$.

2. Fall: X ist ein beliebiger isoalgebraischer Raum der Dimension n

Sei $(F_i | i \in I)$ eine filtrierende Familie kohärenter Untergarben einer kohärenten Garbe F auf X. Sei J die Nilradikalgarbe von X. Es ist $J^m = (0)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Man hat die Filtrierung $(0) = J^m F \subseteq J^{m-1} F \subseteq \ldots \subseteq JF \subseteq J^0 F = F$ von F durch kohärente Untergarben. Für jedes $k \in \{1,\ldots,m\}$ ist die filtrierende Familie $(J^k F + (J^{k-1} F \cap F_i)/J^k F | i \in I)$ kohärenter Untergarben von $J^{k-1} F/J^k F$ stationär (denn: Sei $j : X_{red} \to X$ die Inklusion. Da $J \cdot (J^{k-1} F/J^k F) = (0)$, ist $J^{k-1} F/J^k F \to j_* j^* (J^{k-1}/J^k F)$ ein Isomorphismus). Mit Hilfe von (*) folgt durch absteigende Induktion nach k, daß $(J^k F \cap F_i | i \in I)$ stationär ist für $k = m, m-1, \ldots, 0$.

Korollar 10.10.

Sei F eine kohärente Garbe auf einem isoalgebraischen Raum X.

i) Ist $(s_i | i \in I)$ eine Familie globaler Schnitte von F, so ist die von $(s_i | i \in I)$ erzeugte $\mathcal{O}_X$-Untermodulgarbe von F kohärent.

ii) Wird F von seinen globalen Schnitten erzeugt, so wird F von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt.

§11 - Eindimensionale isoalgebraische Räume

Proposition 11.1.

i) Sei X ein zusammenhängender offener isoalgebraischer Teilraum eines 1-dimensionalen affinen regulären Schemas X_o und sei $x \in X$. I sei folgende Kategorie: Die Objekte von I sind alle Tripel (Y,U,p), wobei Y ein 1-dimensionales zusammenhängendes affines reguläres Schema, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $Y(C)$ und $p: Y \to X_o$ ein Morphismus von Schemata ist, so daß $p^h|U: U \to X$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $\# p^{-1}(x) = 1$. Die Morphismen $\mathrm{Mor}((Y,U,p),(Y',U',p'))$ zwischen Objekten von I sind die X_o-Morphismen $g: Y' \to Y$ von Schemata, so daß $g(U') \subseteq U$.

Die Kategorie I ist filtrierend und der Morphismus $\varinjlim_{I} \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_{X_o}(X)$ ist ein Isomorphismus.

ii) Sei X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines 1-dimensionalen affinen Schemas X_o und seien $X_1,\ldots,X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. I sei folgende Kategorie: Die Objekte von I sind alle Tripel (Y,p,s), wobei Y ein affines Schema der Dimension ≤ 1, $p: Y \to X_o$ ein Morphismus von Schemata und $s: X \to Y^h$ ein isoalgebraischer Schnitt von $p^h: Y^h \to X_o{}^h$ ist, so daß die Zariski-Abschlüsse $\overline{s(X_1)}^{Zar},\ldots,$ $\overline{s(X_r)}^{Zar}$ von $s(X_1),\ldots,s(X_r)$ in Y paarweise verschieden und die irreduziblen Komponenten von Y sind.

Die Morphismen $\mathrm{Mor}((Y,p,s),(Y',p',s'))$ zwischen Objekten von I sind die X_o-Morphismen von Schemata $g : Y' \to Y$, so daß $g^h \cdot s' = s$.
Die Kategorie I ist filtrierend und der Morphismus $\varinjlim_{I} \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathfrak{A}_{X_o}(X)$ ist ein Isomorphismus.

Der Beweis von 11.1. sei dem Leser überlassen. Ein 1-dimensionaler isoalgebraischer Raum, der isomorph ist zu einem offenen isoalgebraischen Teilraum eines affinen Schemas, wird im folgenden als affine isoalgebraische Kurve bezeichnet.

Korollar 11.2.

Sei X eine affine isoalgebraische Kurve und seien $X_1,\dots,X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Dann sind die Primideale $p_i = \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(x) = 0$ für jedes $x \in X_i\}$, $i=1,\dots,r$, paarweise verschieden und sie sind die minimalen Primideale von $\mathcal{O}_X(X)$. $x \mapsto \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(x) = 0\}$ ist eine Bijektion von der Menge der Punkte von X auf die Menge der maximalen Ideale von $\mathcal{O}_X(X)$. Die minimalen Primideale und die maximalen Ideale sind die einzigen Primideale von $\mathcal{O}_X(X)$.

Korollar 11.3.

Ist X eine zusammenhängende reguläre affine isoalgebraische Kurve so ist $\mathcal{O}_X(X)$ ein Dedekindring. Ist X ein zusammenhängender offener isoalgebraischer Teilraum von $\mathbb{A}^1$, so ist $\mathcal{O}_X(X)$ ein Hauptidealring.

Beweis:

OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines regulären affinen Schemas X_o der Dimension 1. Gegeben sei ein $x \in X$. Sei $f_1,\dots,f_r$ ein Erzeugendensystem des Ideals $\{f \in \mathcal{O}_{X_o}(X_o) \mid f(x) = 0\}$. Nach Proposition 11.1.i) erzeugen $f_1|X,\dots,f_r|X$ das Ideal $\{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(x) = 0\}$. Also ist jedes Primideal von $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt und damit ist $\mathcal{O}_X(X)$ noethersch. Ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum von $\mathbb{A}^1$, so ist jedes Primideal ein Hauptideal. Nach dem Hilfssatz aus dem Beweis von 7.17. ist $\mathcal{O}_X(X)$ normal.

<u>Proposition 11.4.</u>

Seien X ein isoalgebraischer Raum und Y eine reguläre affine isoalgebraische Kurve. Dann ist $t: \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg.}}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X))$ bijektiv.

Beweis:

OE ist Y ein offener isoalgebraischer Teilraum eines regulären affinen Schemas Y_o der Dimension 1. Sei $i: \mathcal{O}_{Y_o}(Y_o) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ die Einschränkung. Gegeben sei ein $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus $q: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$. Nach Korollar 1.3.7. gibt es genau einen isoalgebraischen Morphismus $f: X \to Y_o^h$, so daß $f^*: \mathcal{O}_{Y_o}(Y_o) \to \mathcal{O}_X(X)$ mit $q \circ i$ übereinstimmt. Für jedes $x \in X$ ist $f(x)$ der Punkt aus $Y_o(\mathbb{C})$, so daß $\{s \in \mathcal{O}_{Y_o}(Y_o) \mid s(f(x)) = 0\}$ der Kern der Zusammensetzung $\mathcal{O}_{Y_o}(Y_o) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{q} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ ist. Nach Korollar

11.2. ist deshalb $f(X) \subseteq Y$. Ordnet man q den isoalgebraischen Morphismen $f : X \to Y$ zu, so erhält man eine Abbildung $r : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg.}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)) \to \mathrm{Hom}(X,Y)$. Nach Konstruktion ist $r \circ t = \mathrm{id}$. Um $t \circ r = \mathrm{id}$ einzusehen, ist zu zeigen

(*) Sind u,v $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismen $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ mit $u \circ i = v \circ i$, so ist $u = v$.

Begründung von (*): Angenommen es sei $u \neq v$. Es gibt dann ein $a \in \mathcal{O}_Y(Y)$ und ein $x \in X$, so daß $(k \circ u)(a) \neq (k \circ v)(a)$ mit $k : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$. Man wähle ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $(k \circ u)(a) - (k \circ v)(a) \notin (m_x)^n$. Die Zusammensetzung $\mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ und $\mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{v} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ haben den gleichen Kern m. Nach Proposition 11.1.i) ist $\mathcal{O}_{Y_o}(Y_o)/(m \cap \mathcal{O}_{Y_o}(Y_o))^n \to \mathcal{O}_Y(Y)/m^n$ ein Isomorphismus. Also stimmen die Zusammensetzungen $\mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/(m_x)^n$ und $\mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{v} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/(m_x)^n$ überein. Widerspruch zu $(k \circ u)(a) - (k \circ v)(a) \notin (m_x)^n$.

Sei X ein isoalgebraischer Raum. Man hat die Abbildung $\varphi = \varphi_X : X \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(X)$, $x \mapsto \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(x) = 0\}$. Nach Proposition 7.15. ist φ eine stetige Abbildung, d.h. ist U eine offene Teilmenge von $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(X)$, so ist $\varphi^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge von X, und ist $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung von U, so ist $(\varphi^{-1}(U_i) \mid i \in I)$ eine Überdeckung von $\varphi^{-1}(U)$. Man hat einen kanonischen Garbenmorphismus $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(X)} \to \varphi_* \mathcal{O}_X$. Also ist $\varphi = \varphi_X$ ein Morphismus $\mathbb{C}$-geringter Räume.

Das Schema $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(X)$ wird im folgenden mit Spec X bezeichnet. Ist M ein $\mathcal{O}_X(X)$-Modul, so bezeichnet $\tilde{M}$ die durch M

gegebene quasikohärente Garbe auf Spec X und $\overline{M}$ die Garbe $\varphi^*(\widetilde{M})$. Nach Satz 10.7. ist $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,X} \to \varphi_*\mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus. Ist F eine kohärente Garbe auf Spec X, so ist $\varphi^*(F)$ eine kohärente Garbe auf X, und ist F eine kohärente Garbe auf X, so ist $\varphi_*(F)$ eine quasikohärente Garbe auf Spec X, $\varphi_*(F) = \Gamma(X,F)^{\sim}$ (nach Satz 10.7.).
Ist X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve, so ist $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,X,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ eine Henselisierung für jedes $x \in X$ (nach Proposition 11.1.i)) und φ^* ein exakter Funktor von der Kategorie der $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,X}$-Modulgarben auf Spec X in die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X.

Proposition 11.5.
Seien X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve und M ein $\mathcal{O}_X(X)$-Modul. Dann ist die kanonische Abbildung $M = \Gamma(\mathrm{Spec}\,X,\widetilde{M}) \to \Gamma(X,\overline{M})$ bijektiv.

Beweis:
OE ist X zusammenhängend. Sei $(M_i \mid i \in I)$ die Familie der endlich erzeugten Untermoduln von M. Es ist dann $\Gamma(\mathrm{Spec}\,X,\widetilde{M}) = \varinjlim \Gamma(\mathrm{Spec}\,X,\widetilde{M}_i)$ und $\Gamma(X,\overline{M}) = \Gamma(X,\varinjlim \overline{M}_i) = \varinjlim \Gamma(X,\overline{M}_i)$. Also ist OE M endlich erzeugt. 11.5. wird nun durch vollständige Induktion nach der minimalen Anzahl der Erzeugenden von M bewiesen. Es werde zunächst M von einem Element erzeugt, also $M = \mathcal{O}_X(X)/J$, wobei J ein Ideal von $\mathcal{O}_X(X)$ ist. Der Fall $J = (0)$ ist trivial. Sei $J \neq (0)$. Es existieren endlich viele Punkte

$x_1,\dots,x_r \in X$, so daß $\widetilde{\mathfrak{J}}|\operatorname{Spec} X \setminus \{\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_r)\} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} X}|\operatorname{Spec} X \setminus \{\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_r)\}$. Also ist $\Gamma(\operatorname{Spec} X,\widetilde{M}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} X,\varphi(x_i)}/\widetilde{\mathfrak{J}}_{\varphi(x_i)}$ und $\Gamma(X,\overline{M}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,x_i}/\widetilde{\mathfrak{J}}_{\varphi(x_i)}\cdot\mathcal{O}_{X,x_i}$. Da $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} X,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ eine Henselisierung ist, ist auch $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} X,\varphi(x)}/\widetilde{\mathfrak{J}}_{\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}/\widetilde{\mathfrak{J}}_{\varphi(x)}\cdot\mathcal{O}_{X,x}$ eine Henselisierung. Da $\widetilde{\mathfrak{J}}_y \neq (0)$ für jedes $y \in \operatorname{Spec} X$, ist $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} X,y}/\widetilde{\mathfrak{J}}_y$ ein endlichdimensionaler C-Vektorraum und damit henselsch. Also ist $\Gamma(\operatorname{Spec} X,\widetilde{M}) \to \Gamma(X,\overline{M})$ ein Isomorphismus. Sei nun $(m_1,\dots,m_{n+1})$ ein minimales Erzeugendensystem von M. Sei N der von $m_1,\dots,m_n$ erzeugte Untermodul von M. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Gamma(\operatorname{Spec} X,\widetilde{N}) & \to & \Gamma(\operatorname{Spec} X,\widetilde{M}) & \to & \Gamma(\operatorname{Spec} X,(M/N)^{\sim}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(X,\overline{N}) & \longrightarrow & \Gamma(X,\overline{M}) & \xrightarrow[v]{} & \Gamma(X,(M/N)^{-}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Die obere Zeile ist exakt. Da u surjektiv ist, ist auch v surjektiv. Also ist auch die untere Zeile exakt. Nach dem Fünfer-Lemma ist $\Gamma(\operatorname{Spec} X,\widetilde{M}) \to \Gamma(X,\overline{M})$ ein Isomorphismus.

<u>Korollar 11.6.</u>

Sei X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve.

i) Für jeden $\mathcal{O}_X(X)$-Modul M und jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe F ist die Abbildung $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\overline{M},F) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(\Gamma(X,\overline{M}),\Gamma(X,F))$ bijektiv.

ii) Für $\mathcal{O}_X(X)$-Moduln M und N ist die Abbildung $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} X}}(\widetilde{M},\widetilde{N}) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\overline{M},\overline{N})$ bijektiv.

Beweis:

Man überlegt sich leicht, daß die Zusammensetzung der Isomorphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\overline{M},F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*(\widetilde{M}),F) \cong$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,X}}(\widetilde{M},\varphi_*F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(\Gamma(\mathrm{Spec}\,X,\widetilde{M}),\Gamma(\mathrm{Spec}\,X,\varphi_*F))$ $\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(\Gamma(X,\overline{M}),\Gamma(X,F))$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,X}}(\widetilde{M},\widetilde{N}) \cong$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(M,\Gamma(\varphi_*\varphi^*\widetilde{N})) \cong$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,X}}(\widetilde{M},\varphi_*\varphi^*\widetilde{N}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*\widetilde{M},\varphi^*\widetilde{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\overline{M},\overline{N})$ die Abbildungen aus i) und ii) sind.

Korollar 11.7.

Sei X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve. Für jede quasikohärente Garbe F auf Spec X ist der Adjunktionsmorphismus $F \to \varphi_*\varphi^*F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Man schreibe F als induktiven Limes kohärenter Garben. φ^* und φ_* vertauschen mit induktivem Limes. Also ist OE F kohärent. Dann ist $\varphi_*\varphi^*F$ quasikohärent. Nach 11.5. ist $\Gamma(\mathrm{Spec}\,X,F) \to \Gamma(\mathrm{Spec}\,X,\varphi_*\varphi^*F)$ ein Isomorphismus.

Proposition 11.8.

Sei F eine kohärente Garbe auf einer regulären affinen isoalgebraischen Kurve X. Dann ist $\Gamma(X,F)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul und somit φ_*F eine kohärente Garbe auf Spec X.

Beweis:

Nach Korollar 10.10. wird OE F von einem endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(X)$-Untermodul M von $\Gamma(X,F)$ erzeugt. Die Inklusion $M \hookrightarrow \Gamma(X,F)$ liefert $\tilde{M} \to \Gamma(X,F)^{\sim} = \varphi_* F$ und somit $\overline{M} = \varphi^*(\tilde{M}) \to \varphi^*\varphi_* F \to F$. $t : \overline{M} \to F$ ist surjektiv, da F von M erzeugt wird. Nach Proposition 11.5. ist $\Gamma(X,\overline{M}) = M$ und somit ist $\Gamma(t) : \Gamma(X,\overline{M}) \to \Gamma(X,F)$ injektiv. Also ist $\Gamma(X,\ker(t)) = (0)$ und aufgrund des nachfolgenden Hilfssatzes ist dann $\ker(t) = (0)$. Deshalb sind t und $\Gamma(t) : M \to \Gamma(X,F)$ Isomorphismen.

Hilfssatz:

Seien X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve, F eine kohärente Garbe auf X, die von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird, und G eine von (0) verschiedene kohärente Untergarbe von F. Dann ist $\Gamma(X,G) \neq (0)$.

Beweis:

OE ist X zusammenhängend. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der minimalen Anzahl von globalen Schnitten von F, die F erzeugen. Sei F von einem Element erzeugt, d.h. man hat einen surjektiven Garbenmorphismus $h : \mathcal{O}_X \to F$. Es genügt zu zeigen, daß $h^{-1}(G)$ von seinen globalen Schnitten erzeugt wird. Es ist $h^{-1}(G)$ eine von (0) verschiedene kohärente Idealgarbe. Es existieren $x_1,\dots,x_r \in X$, so daß $h^{-1}(G)_x = \mathcal{O}_{X,x}$ für jedes $x \in X \setminus \{x_1,\dots,x_r\}$ und $h^{-1}(G)_{x_i} = (m_i)^{k_i}$ für $i = 1,\dots,r$, wobei m_i das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x_i}$ ist und $k_i \in \mathbb{N}_0$.

Sei $M_i = \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(x_i) = 0\}$ $(i = 1,\dots,r)$ und $J = \bigcap_{i=1}^{r} (M_i)^{k_i}$. Da $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, X,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ eine Henselisierung ist für jedes $x \in X$, ist $h^{-1}(G) = \varphi^*(\tilde{J}) = \bar{J}$. Also wird $h^{-1}(G)$ von seinen globalen Schnitten erzeugt. F werde nun von $s_1,\dots,s_{n+1} \in \Gamma(X,F)$ erzeugt. Sei H die von s_{n+1} erzeugte Untergarbe von F. Ist $G \cap H \neq (0)$, so ist wie eben gezeigt $(0) \neq \Gamma(X,G \cap H) \subseteq \Gamma(X,G)$. Ist $G \cap H = (0)$, so ist die Zusammensetzung $G \to F \to F/H$ injektiv. Also ist G eine Untergarbe von F/H und nach Induktionsvoraussetzung ist $\Gamma(X,G) \neq (0)$.

Korollar 11.9.

Seien $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume, Y eine reguläre affine isoalgebraische Kurve und F eine kohärente Garbe auf X. Dann ist $\Gamma(X,F)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul.

Korollar 11.10.

Seien X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve und F eine kohärente Garbe auf X. Genau dann gibt es einen $\mathcal{O}_X(X)$-Modul M, so daß F isomorph zu $\bar{M}$ ist, wenn F von seinen globalen Schnitten erzeugt wird. Es ist dann der Adjunktionsmorphismus $\varphi^*\varphi_*F \to F$ ein Isomorphismus, $F = \Gamma(X,F)^-$.

Beweis:

$\varphi^*\varphi_*F$ ist eine kohärente Garbe auf X mit $\Gamma(X,\varphi^*\varphi_*F) =$

$\Gamma(\mathrm{Spec}\, X, \varphi_* F) = \Gamma(X,F)$. Nach dem Hilfssatz aus dem Beweis von Proposition 11.8. ist $\varphi^*\varphi_* F \to F$ injektiv. Wird F von seinen globalen Schnitten erzeugt, so ist $\varphi^*\varphi_* F \to F$ surjektiv.

Aus den Korollaren 11.7. und 11.10. folgt

Korollar 11.11.

Sei X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve. φ^* und φ_* geben Äquivalenzen zwischen der Kategorie der kohärenten Garben auf Spec X und der Kategorie der kohärenten Garben auf X, die von ihren globalen Schnitten erzeugt werden (betrachtet als volle Unterkategorie der Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X).

Am Ende dieses Paragraphen wird gezeigt, daß eine kohärente Garbe auf einer regulären affinen isoalgebraischen Kurve im allgemeinen nicht von ihren globalen Schnitten erzeugt wird. Es gilt aber

Proposition 11.12.

Seien F eine kohärente Garbe auf einer regulären affinen isoalgebraischen Kurve, die von ihren globalen Schnitten erzeugt wird, und G eine kohärente Untergarbe von F. Dann wird auch G von seinen globalen Schnitten erzeugt.

Beweis:

Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G \arrow[r] & F \arrow[r] & F/G \\ 0 \arrow[r] & \varphi^*\varphi_*G \arrow[r] \arrow[u, "g"] & \varphi^*\varphi_*F \arrow[r] \arrow[u, "f"] & \varphi^*\varphi_*F/G \arrow[u, "e"] \end{tikzcd}$$

Die beiden Zeilen sind exakt, denn φ_* ist linksexakt und φ^* ist exakt. Nach Korollar 11.10. sind f und e Isomorphismen. Also ist auch g ein Isomorphismus.

Proposition 11.13.

Seien X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve, F und G kohärente Garben, die von ihren globalen Schnitten erzeugt werden, und $F \to G$ ein surjektiver $\mathcal{O}_X$-Modulgarbenmorphismus. Dann ist $\Gamma(X,F) \to \Gamma(X,G)$ surjektiv.

Beweis:

Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & G \\ \varphi^*\varphi_*F \arrow[r] \arrow[u] & \varphi^*\varphi_*G \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Nach Korollar 11.10. ist $\varphi^*\varphi_*F \to \varphi^*\varphi_*G$ surjektiv. Da $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, X, \varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ treuflach ist für jedes $x \in X$, ist dann auch $\varphi_*F \to \varphi_*G$ surjektiv. Also ist $\Gamma(X,F) = \Gamma(\mathrm{Spec}\, X, \varphi_*F) \to \Gamma(\mathrm{Spec}\, X, \varphi_*G) = \Gamma(X,G)$ surjektiv.

Proposition 11.14.

i) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen regulären affinen isoalgebraischen Kurven und sei M ein $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul. Es ist $f^*(\overline{M}) = (M \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X))^{-}$.

ii) Sei $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus zwischen regulären affinen isoalgebraischen Kurven und sei M ein $\mathcal{O}_X(X)$-Modul. Es ist $f_*(\overline{M}) = \overline{N}$, wobei $N = M$ und N bezüglich $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ als $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul betrachtet wird.

Beweis:

Man hat das kommutative Diagramm C-geringter Räume

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X=\psi"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Spec}\ X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "\varphi_Y=\varphi"'] & \mathrm{Spec}\ Y \end{tikzcd}$$

wobei g durch den C-Algebrenmorphismus $f^*: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ gegeben ist. Hieraus folgt sofort i). Man hat den kanonischen Morphismus $\overline{N} = (\varphi_Y)^* g_* \tilde{M} \to f_*(\varphi_X)^* \tilde{M} = f_*(\overline{M})$. Da $(\varphi_X)^*$, $(\varphi_Y)^*$, g_*, f_* mit induktivem Limes vertauschen, ist OE M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul. Nach Satz 4.6. und Korollar 11.9. sind $f_*(\overline{M})$ und $\overline{N}$ kohärent. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $\overline{N}_y \to f_*(\overline{M})_y$ ein Isomorphismus ist für jedes $y \in Y$. Es sei $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$.

Nach Lemma 3.1. gilt $\overline{N}_y = ((\varphi_Y)^* g_* \tilde{M})_y =$

$(g_*\tilde{M})_{\varphi(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)}} \mathcal{O}_{Y,y} =$

$(g_*\tilde{M})_{\varphi(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)}} \mathcal{O}^h_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)} =$

$(M \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)}} \mathcal{O}^h_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)} =$

$M \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} (\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)}} \mathcal{O}^h_{\mathrm{Spec}\ Y, \varphi(y)}$

$$= M \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}^h_{\mathrm{Spec}\, X, \psi(x_i)} =$$

$$\prod_{i=1}^{r} (M \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, X, \psi(x_i)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, X, \psi(x_i)}} \mathcal{O}_{X,x_i} =$$

$$(f_*(\varphi_X)^*\tilde{M})_y = f_*(\bar{M})_y.$$

Korollar 11.15.

i) Seien X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve, U eine offene Teilmenge von X und F eine kohärente Garbe auf X, die von ihren globalen Schnitten erzeugt wird. Dann ist $F(U) = F(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U)$.

ii) Seien $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus zwischen regulären affinen isoalgebraischen Kurven, P eine endliche Teilmenge von X und U eine offene Teilmenge von Y. Dann ist $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U) \setminus P) = \mathcal{O}_X(X \setminus P) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_Y(U)$.

Beweis:

i) folgt aus 11.10., 11.14.i) und 11.5.. Nach 11.14. und 11.5. ist $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_Y(U)$.

Es bleibt noch zu zeigen

(*) Für jede offene Teilmenge V von X ist

$$\mathcal{O}_X(V \setminus P) = \mathcal{O}_X(X \setminus P) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(V).$$

Es gibt $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $P = \{x \in X \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\}$. Sei $D_i = \{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}$ und $D_{ij} = D_i \cap D_j = \{x \in X \mid (f_i f_j)(x) \neq 0\}$. Es ist $X \setminus P = D_1 \cup \ldots \cup D_r$. Man hat die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln $0 \to \mathcal{O}_X(X \setminus P) \to \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(D_i) \to \prod_{i,j=1}^{r} \mathcal{O}_X(D_{ij})$ und somit das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X\setminus P)\otimes_{\mathcal{O}_X(X)}\mathcal{O}_X(V) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \prod\limits_{i=1}^{r}\mathcal{O}_X(D_i)\otimes_{\mathcal{O}_X(X)}\mathcal{O}_X(V) \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \prod\limits_{i,j=1}^{r}\mathcal{O}_X(D_{ij})\otimes_{\mathcal{O}_X(X)}\mathcal{O}_X(V) \arrow[d, "w"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(V\setminus P) \arrow[r] & \prod\limits_{i=1}^{r}\mathcal{O}_X(D_i\cap V) \arrow[r] & \prod\limits_{i,j=1}^{r}\mathcal{O}_X(D_{ij}\cap V)
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen (denn $\mathcal{O}_X(V)$ ist ein flacher $\mathcal{O}_X(X)$-Modul). Nach Satz 10.7. sind v und w Isomorphismen. Also ist auch u ein Isomorphismus.

Sei X ein Schema. Et(X) bezeichnet die Kategorie der algebraischen Überlagerungen des Schemas X. $Et^{sa}(X(C))$ bezeichnet die Kategorie der semialgebraischen Überlagerungen des semialgebraischen Raums X(C). Man hat den kanonischen Funktor $\tau : Et(X) \to Et^{sa}(X(C))$. In §12 wird gezeigt, daß dieser Funktor volltreu ist.

<u>Satz 11.16.</u>

Sei U eine Zariski-offene Teilmenge von $\mathbb{A}^1$. Dann ist $\tau : Et(U) \to Et^{sa}(U(C))$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Ribenboim und van den Dries bestimmen in [DR] die absolute Galoisgruppe von C(t). Hierzu entwickeln sie in [DR] eine Terminologie, die es ihnen ermöglicht, eine topologische Fundamentalgruppe für Zariski-offene Teilmengen von $\mathbb{A}^1$ zu definieren. Mit Hilfe des Riemannschen Existenzsatzes und einigen Methoden aus der Modelltheorie beweisen sie dann einen zu Satz 11.16. analogen Satz. In der semialgebraischen Geometrie läßt sich mit Hilfe der Methode der Grundkörpererweiterung Satz 11.16. ganz einfach aus dem Riemannschen Existenzsatz für Zariski-offene Teilmengen von $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ ableiten.

Beweis:
Sei R_o ein reell abgeschlossener Teilkörper von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{C} = R_o(\sqrt{-1})$. Die Anzahl der Isomorphieklassen der Überlagerungen von $U(\mathbb{C})_{R_o}$ vom Grad n stimmt überein mit der Anzahl der Isomorphieklassen der Überlagerungen von $U(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ vom Grad n und diese Zahl ist endlich (denn die Fundamentalgruppen von $U(\mathbb{C})_{R_o}$ und $U(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ sind freie Gruppen von $\#(\mathbb{A}^1 \setminus U)$ Erzeugenden). Da nach dem Riemannschen Existenzsatz $\tau_{\mathbb{R}} : Et(U) \to Et^{sa}(U(\mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ eine Äquivalenz ist und da $\tau_{R_o} : Et(U) \to Et^{sa}(U(\mathbb{C})_{R_o})$ volltreu ist, ist τ_{R_o} eine Äquivalenz. Sei nun C ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper und R ein echter Teilkörper mit $C = R(\sqrt{-1})$. Es gibt einen reell abgeschlossenen Teilkörper K von R, der endlichen Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ hat, und eine Zariski-offene Teilmenge U' von $\mathbb{A}^1_K$, so daß $U = U' \otimes_{\overline{K}} C$, wobei $\overline{K}$ der algebraische Abschluß von K in C ist. Sei $i : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung. Sei L ein reell abgeschlossener Teilkörper von $\mathbb{C}$, so daß $i(K) \subseteq L$ und $\mathbb{C} = L(\sqrt{-1})$. Man hat die "kommutativen" Diagramme, die durch Körpererweiterungen gegeben sind

$$\begin{tikzcd}
Et(U' \otimes_{\overline{K}} \mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_L"] & Et^{sa}((U' \otimes_{\overline{K}} \mathbb{C})(\mathbb{C})_L) \\
Et(U') \arrow[u, "r"] \arrow[r, "\tau_K"'] & Et^{sa}(U'(\overline{K})_K) \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Et(U' \otimes_{\overline{K}} C) \arrow[r, "\tau"] & Et^{sa}((U' \otimes_{\overline{K}} C)(C)_R) \\ Et(U') \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\tau_K"'] & Et^{sa}(U'(\overline{K})_K) \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

r,s,p,q sind Äquivalenzen. Da τ_L eine Äquivalenz ist, ist τ_K und damit auch τ eine Äquivalenz.

Satz 11.16. sichert die Existenz "genügend vieler" algebraischer Überlagerungen von Zariski-offenen Teilmengen des $\mathbb{A}^1$ und damit auch einen gewissen Vorrat an isoalgebraischen Funktionen auf offenen semialgebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}^1(C)$. Mit Hilfe von Satz 11.16. beweist man dann auch

Satz 11.17.

Seien U und V offene und einfach zusammenhängende semialgebraische Teilmengen von $\mathbb{A}^1(C)$, so daß $U \cap V$ zusammenhängend ist, oder sei $U = \{z \in \mathbb{A}^1(C) \mid |z| < r\}$ und $V = \{z \in \mathbb{A}^1(C) \mid |z| > s\}$ mit $s < r$. Gegeben sei ein $c \in \mathfrak{a}_{\mathbb{A}^1}(U \cap V)$. Dann gibt es $f_1,\dots,f_n \in \mathfrak{a}_{\mathbb{A}^1}(U)$ und $g_1,\dots,g_n \in \mathfrak{a}_{\mathbb{A}^1}(V)$, so daß auf $U \cap V$ gilt

$$c = f_1g_1 + \dots + f_ng_n.$$

(Es gibt jedoch im allgemeinen kein $f \in \mathfrak{a}_{\mathbb{A}^1}(U)$ und $g \in \mathfrak{a}_{\mathbb{A}^1}(V)$ mit $c = f+g$ oder $c = f\cdot g$).

Beweis:

Nach Lemma 6.2. existieren ein irreduzibles normales

Schema T, eine offene semialgebraische Teilmenge W von $T(C)$, eine Zariski-offene Teilmenge W_o von T mit $W \subseteq W_o$, ein $c_o \in \mathcal{O}_T(W_o)$ und ein endlicher Morphismus $t : T \to \mathbb{A}^1$, so daß $t^h|W : W \to U \cap V$ ein Isomorphismus ist und $(t^h|W)^*(c) = c_o|W$. Es gibt endlich viele Punkte $p_1,\dots,p_l \in \mathbb{A}^1(C)$, so daß $t|t^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{p_1,\dots,p_l\})$ etal ist. Es sei $p_1,\dots,p_k \in U$ und $p_{k+1},\dots,p_l \notin U$. Da $\pi_1(U \setminus \{p_1,\dots,p_k\}) \to \pi_1(\mathbb{A}^1(C) \setminus \{p_1,\dots,p_k\})$ ein Isomorphismus ist, gibt es eine semialgebraische Überlagerung $g_2 : S_2 \to \mathbb{A}^1(C) \setminus \{p_1,\dots,p_k\}$ und einen semialgebraischen Isomorphismus $\sigma_2 : t^{-1}(U \setminus \{p_1,\dots,p_k\}) \to g_2^{-1}(U \setminus \{p_1,\dots,p_k\})$, so daß $g_2 \circ \sigma_2 = t|t^{-1}(U \setminus \{p_1,\dots,p_k\})$. Nach Satz 11.16. existieren ein Schema S_1, ein endlicher etaler Morphismus $g_1 : S_1 \to \mathbb{A}^1 \setminus \{p_1,\dots,p_k\}$ und ein semialgebraischer Isomorphismus $\sigma_1 : S_2 \to S_1(C)$, so daß $g_1 \circ \sigma_1 = g_2$. Es gibt ein reguläres rein 1-dimensionales Schema S und einen endlichen Morphismus $g : S \to \mathbb{A}^1$, so daß $g^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{p_1,\dots,p_k\}) = S_1$ und $g|g^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{p_1,\dots,p_k\}) = g_1$. Der semialgebraische Isomorphismus $\sigma_1 \circ \sigma_2 : t^{-1}(U \setminus \{p_1,\dots,p_k\}) \to g^{-1}(U \setminus \{p_1,\dots,p_k\})$ ist ein isoalgebraischer Isomorphismus, der sich nach Proposition 7.2. zu einem isoalgebraischen Isomorphismus $t^{-1}(U) \to g^{-1}(U)$ fortsetzt. Also gilt

(*) Es existieren eine reguläre affine isoalgebraische Kurve X (nämlich $X = g^{-1}(U \cup V)$) und ein endlicher Morphismus $h : X \to U \cup V$, so daß $h|h^{-1}((U \cup V) \setminus \{p_1,\dots,p_k\})$ ein lokaler Isomorphismus ist, eine endliche Teilmenge P von $h^{-1}(U)$ und ein isoalgebraischer Schnitt

$s_o : U \cap V \to X$ von h, so daß $s_o(U \cap V) \cap P = \emptyset$, und ein $d \in \mathcal{O}_X(h^{-1}(U) \setminus P)$, so daß $c = d \cdot s_o$.

Der Schnitt s_o setzt sich fort zu einem isoalgebraischen Schnitt $s : V \to X$ von h. Nach Korollar 11.15.ii) gibt es $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}^1}(U)$ und $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n \in \mathcal{O}_X(X \setminus P)$, so daß auf $h^{-1}(U) \setminus P$ gilt $d = h^*(f_1) \cdot \tilde{g}_1 + \ldots + h^*(f_n) \cdot \tilde{g}_n$. Setzt man $g_i = \tilde{g}_i \circ s$ für $i = 1, \ldots, n$, so gilt auf $U \cap V$:
$c = f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n$.

Satz 11.18.

Seien U und V offene semialgebraische Teilmengen von $\mathbb{A}^1(C)$ und $c : U \cap V \to C$ eine Funktion, die auf jeder Zusammenhangskomponente von $U \cap V$ konstant ist. Dann gibt es $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}^1}(U)$ und $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}^1}(V)$, so daß auf $U \cap V$ gilt

$$c = f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n.$$

Beweis:

Es existieren offene semialgebraische Teilmengen U' und V' von $\mathbb{A}^1(C)$, so daß gilt: $U \subseteq U'$, $V \subseteq V'$, $\mathbb{A}^1(C) \setminus (U' \cup V')$ ist endlich und jede Zusammenhangskomponente von $U \cap V$ ist auch eine Zusammenhangskomponente von $U' \cap V'$. (Denn: Seien A der Rand von $U \cap V$ in V und $\bar{A}$ der Abschluß von A in $\mathbb{A}^1(C)$. Man setze $V' = V$ und $U' = U \cup (\mathbb{A}^1(C) \setminus \bar{A})$. Es ist dann $U' \cap V' = V \setminus A$ und $\mathbb{A}^1(C) \setminus (U' \cup V') \subseteq \bar{A} \setminus A$ ist endlich, da $\dim(\bar{A} \setminus A) < \dim A \leq 1$). Indem man U durch U' und V durch V' ersetzt, existiert OE eine Zariski-offene Teilmenge T von $\mathbb{A}^1$, so daß $U \cup V = T(\mathbb{C})$. Seien $Z_1,\dots,Z_m$ die Zusammenhangskomponenten von $U \cap V$. Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung m, $G = \{g_1,\dots,g_m\}$. Die Abbildung $\sigma : U \cap V \to G$, die auf der Zusammenhangskomponente Z_i konstant den Wert g_i annimmt ($i = 1,\dots,m$), definiert einen semialgebraischen G-prinzipalhomogenen Raum X über $U \cup V$. Sei $p : X \to U \cup V$ der Strukturmorphismus. Es gibt eine zugleich offene und abgeschlossene semialgebraische Teilmenge $\tilde{Z}$ von $p^{-1}(V)$ und eine Zerlegung von $p^{-1}(U)$ in zugleich offene und abgeschlossene semialgebraische Teilmengen von $p^{-1}(U)$, $p^{-1}(U) = \tilde{Z}_1 \cup \dots \cup \tilde{Z}_m$, so daß $p|\tilde{Z} \cap \tilde{Z}_i : \tilde{Z} \cap \tilde{Z}_i \to Z_i$ (für $i = 1,\dots,m$) und $p|\tilde{Z} : \tilde{Z} \to V$ Isomorphismen sind. Also existiert eine Funktion $d : p^{-1}(U) \to \mathbb{C}$, so daß d auf jedem $\tilde{Z}_i$ konstant ist und $d \circ (s|U \cap V) = c$ mit $s = (p|\tilde{Z})^{-1} : V \to \tilde{Z}$. Man versehe den semialgebraischen Raum X mit der eindeutig bestimmten isoalgebraischen Struktur, so daß p ein lokaler Isomorphismus ist. Nach Satz 11.16. ist X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve. Deshalb gibt es nach Korollar 11.15.ii) $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$ und $\tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_n \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $d = p^*(f_1)\cdot\tilde{g}_1 + \dots + p^*(f_n)\cdot\tilde{g}_n$. Setzt man $g_i = \tilde{g}_i \circ s$ für $i = 1,\dots,n$, so gilt auf $U \cap V$: $c = f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$.

Bemerkung:
Zum Beweis von Satz 11.18. wird von Satz 11.16. nur benötigt, daß ein semialgebraischer G-prinzipalhomogener Raum über einer Zariski-offenen Teilmenge T von $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ zu

einer endlichen abelschen Gruppe G algebraisch ist. Dies läßt sich aber leicht ohne Verwendung des Riemannschen Existenzsatzes beweisen, z.B. durch vollständige Induktion nach $\#(\mathbb{A}^1 \setminus T)$.

Hubbard zeigt in [Hu], daß $H^1(\mathbb{A}^1(\mathbb{R}), \mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}) \neq (0)$. Er führt den Beweis, indem er einen 1-Cozyklus konstruiert, der nicht zerfällt. Ähnlich zeigt man

<u>Satz 11.19.</u>

Sei X ein 1-dimensionaler isoalgebraischer Raum. Es gelten

i) Es gibt eine kohärente Garbe auf X, die nicht von ihren globalen Schnitten erzeugt wird, und es ist $H^1(X,\mathcal{O}_X) \neq (0)$.

ii) Ist X reduziert und irreduzibel, so gibt es ein isoalgebraisches Geradenbündel L auf X, so daß L und das duale Bündel $L^\vee$ außer dem Nullschnitt keinen globalen Schnitt besitzen.

iii) Es ist $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ ein unendlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ist X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve, so ist $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ ein nicht endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul.

Beweis:

Man wähle eine offene Teilmenge G von X und ein $h_o \in \mathcal{O}_X(G)$, so daß gilt: G ist eine affine isoalgebraische Kurve und der durch $(h_o)_{red} \in \mathcal{O}_{X_{red}}(G)$ gegebene Morphismus

$H: G_{red} \to (\mathbb{A}^1)^h$ ist ein Isomorphismus von G_{red} nach $H(G_{red}) = B_6(0)$. Man setze $U = H^{-1}(B_4(0))$ und $V = G \setminus H^{-1}(\overline{B}_2(0))$. Seien e_1, e_2, e_3, e die Punkte aus G, so daß $H(e_1) = -1$, $H(e_2) = 1$, $H(e_3) = 5$, $H(e) = 3$. Seien Y der durch $T^2 - (h_o - h_o(e_1))(h_o - h_o(e_2))(h_o - h_o(e_3)) \in \mathcal{O}_X(G)[T]$ definierte isoalgebraische Teilraum von $G \times (\mathbb{A}^1)^h$ und $p: Y \to G$ die Einschränkung der Projektion $G \times (\mathbb{A}^1)^h \to G$ auf Y. $p^{-1}(U \cap V)$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten Z_1, Z_2 und $p|Z_i : Z_i \to U \cap V$ ist ein isoalgebraischer Isomorphismus $(i = 1,2)$. Seien $s = (p|Z_1)^{-1}$, q die Einschränkung der Projektion $G \times (\mathbb{A}^1)^h \to (\mathbb{A}^1)^h$ auf Y und f das durch $q \circ s : U \cap V \to (\mathbb{A}^1)^h$ gegebene Element aus $\mathcal{O}_X(U \cap V)$. Seien $\alpha : [0,1] \to p^{-1}(U \setminus \{e_1, e_2\})$ und $\beta : [0,1] \to p^{-1}(V \setminus \{e_3\})$ semialgebraische Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = p^{-1}(e) \cap Z_1$ und $\alpha(1) = \beta(1) = p^{-1}(e) \cap Z_2$. Es gilt

(1) Gegeben sei ein $g \in \mathcal{O}_X(G)$, das nicht im Nilradikal von $\mathcal{O}_X(G)$ liegt. Dann gibt es kein $u \in \mathcal{O}_X(U)$ und $v \in \mathcal{O}_X(V)$, so daß auf $U \cap V$ gilt $g \cdot f = v - u$.

Denn: Angenommen, es gibt ein $u \in \mathcal{O}_X(U)$ und $v \in \mathcal{O}_X(V)$, so daß $g \cdot f = v - u$ auf $U \cap V$. Nach Satz 10.1. gibt es ein von Null verschiedenes Polynom $t \in \mathcal{O}_{X_{red}}(G)[T]$ mit $(t|V)(v_{red}) = 0$. Durch vollständige Induktion nach n wird gezeigt, daß gilt

(*) $(t|U \cap V)(v_{red} - 2n \cdot g_{red} \cdot f_{red}) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_o$.

Es sei $(t|U \cap V)(v_{red} - 2n_o \cdot g_{red} \cdot f_{red}) = 0$ für ein $n_o \in \mathbb{N}_o$. Der isoalgebraische Funktionskeim $(v_{red} - 2n_o \cdot g_{red} \cdot f_{red})_e$ läßt sich längs des Weges $p \circ \beta$ isoalgebraisch fortsetzen und als Fortsetzung erhält man $(v_{red} + 2n_o \cdot g_{red} \cdot f_{red})_e$.

Also ist auch $(t|U\cap V)(v_{red}+2n_o\cdot g_{red}\cdot f_{red}) = 0$. Ebenso läßt sich $(u_{red}+(2n_o+1)\cdot g_{red}\cdot f_{red})_e = (v_{red}+2n_o\cdot g_{red}\cdot f_{red})_e$ längs des Weges $p\circ\alpha$ fortsetzen und man erhält den Funktionskeim $(u_{red}-(2n_o+1)\cdot g_{red}\cdot f_{red})_e = (v_{red}-2(n_o+1)\cdot g_{red}\cdot f_{red})_e$. Somit ist $(t|U\cap V)(v_{red}-2(n_o+1)\cdot g_{red}\cdot f_{red}) = 0$ und (*) ist bewiesen. Aus (*) folgt $g_{red}|K = 0$ für eine nichtleere offene Teilmenge K von G. Dann ist aber g im Nilradikal von $\mathcal{O}_X(G)$. Widerspruch.

Die Menge $\{f(x)\,|\,x\in U\cap V\}\subseteq\mathbb{C}$ ist beschränkt. Deshalb gibt es ein $a\in\mathbb{C}$, so daß $f(x)+a\neq 0$ und $-f(x)+a\neq 0$ für jedes $x\in U\cap V$ und $\left|\frac{-f(x_o)+a}{f(x_o)+a}\right|\neq 1$ für ein $x_o\in U\cap V$. Es gilt

(2) Gegeben seien $u\in\mathcal{O}_X(U)$ und $v\in\mathcal{O}_X(V)$, so daß $v=(f+a)u$ oder $v=\frac{1}{f+a}u$ auf $U\cap V$. Dann ist $u_{red}=0$ und $v_{red}=0$.

Denn: Es gibt ein von Null verschiedenes Polynom $t\in\mathcal{O}_{X_{red}}(G)[T]$, so daß $(t|V)(v_{red}) = 0$. Durch isoalgebraische Fortsetzung längs der Wege $p\circ\beta$ und $p\circ\alpha$ beweist man entsprechend zu (*)

(**) Ist $v=(f+a)u$ auf $U\cap V$, so ist
$(t|U\cap V)\left(\left(\frac{-f_{red}+a}{f_{red}+a}\right)^n v_{red}\right) = 0$ für jedes $n\in\mathbb{N}_o$
Ist $v=\frac{1}{f+a}u$ auf $U\cap V$, so ist $(t|U\cap V)\left(\left(\frac{f_{red}+a}{-f_{red}+a}\right)^n v_{red}\right)=0$ für jedes $n\in\mathbb{N}_o$.

Aus (**) folgt $v_{red}|K = 0$ für eine nichtleere offene Teilmenge K von V. Dann ist $v_{red} = 0$ und somit auch $u_{red} = 0$.

$H^{-1}(\bar{B}_2(0))$ ist vollständig. Somit ist $W = X\setminus H^{-1}(\bar{B}_2(0))$

offen in X.

Beweis von ii):

Gegeben seien $u \in \mathcal{O}_X(U)$ und $w \in \mathcal{O}_X(W)$, so daß $w = (f+a)u$ oder $w = \frac{1}{f+a}u$ auf $U \cap W = U \cap V$. Aus (2) folgt $u_{red} = 0$ und $w_{red}|V = 0$. Ist X irreduzibel, so ist auch der isoalgebraische Raum W irreduzibel. Nach Proposition 7.16.ii) ist dann $w_{red} = 0$. Ist zusätzlich X noch reduziert, so ist also $u = 0$ und $w = 0$. Ist L das durch $(f+a)^{\cdot} \in \mathcal{O}_X(U \cap W)^*$ gegebene Geradenbündel auf X, so ist ii) erfüllt.

Beweis von iii):

Ist $(U_i | i \in I)$ eine Überdeckung eines semialgebraischen Raums Q und F eine Garbe auf Q, so bezeichnet $\check{H}^1(Q;(U_i | i \in I);F)$ die erste Cechkohomologiegruppe von Q zu der Überdeckung $(U_i | i \in I)$ mit Werten in F. Angenommen, es sei $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ ein endlichdimensionaler C-Vektorraum. Da die kanonische Abbildung $\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X)$ injektiv ist, ist auch $\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)$ ein endlichdimensionaler C-Vektorraum. Die kanonische Abbildung $\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X) \to \check{H}^1(G;U,V;\mathcal{O}_G)$ ist surjektiv. Also ist der $\mathcal{O}_G(G)$-Modul $\check{H}^1(G;U,V;\mathcal{O}_G)$ ein endlichdimensionaler C-Vektorraum. Dann existiert ein $g \in \mathcal{O}_G(G)$, so daß $g \cdot m = 0$ für jedes $m \in \check{H}^1(G;U,V;\mathcal{O}_G)$ und g nicht im Nilradikal von $\mathcal{O}_G(G)$ liegt. Dies steht im Widerspruch zu (1).

Sei nun X eine reguläre affine isoalgebraische Kurve. Es gilt

(***) Für jedes maximale Ideal m von $\mathcal{O}_X(X)$ ist

$$\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)/m = (0).$$

Denn: Nach der Definition von $\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)$ hat man die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X(X)$-Moduln

$$\mathcal{O}_X(U)\times\mathcal{O}_X(W)\to\mathcal{O}_X(U\cap W)\to\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)\to 0$$

und somit auch die exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_X(U)/m\mathcal{O}_X(U)\times\mathcal{O}_X(W)/m\mathcal{O}_X(W)\xrightarrow{r}\mathcal{O}_X(U\cap W)/m\mathcal{O}_X(U\cap W)\to$$
$$\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)/m\,\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)\to 0.$$

Es gibt ein $x\in X$, so daß $m=\{f\in\mathcal{O}_X(X)\mid f(x)=0\}$. Ist $x\notin U\cap W$, so ist $\mathcal{O}_X(U\cap W)/m\mathcal{O}_X(U\cap W)=(0)$. Ist $x\in U\cap W$, so sind $\mathcal{O}_X(U)/m\mathcal{O}_X(U)$, $\mathcal{O}_X(W)/m\mathcal{O}_X(W)$, $\mathcal{O}_X(U\cap W)/m\mathcal{O}_X(U\cap W)$ isomorph zu $\mathbb{C}$ und r entspricht dabei der Abbildung $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $(a,b)\mapsto b-a$, ist also surjektiv.

Nach (1) ist $\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)\neq(0)$. Nach dem Lemma von Nakayama und (***) ist $\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)$ ein nicht endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul. Da $\check{H}^1(X;U,W;\mathcal{O}_X)$ ein Untermodul von $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ und $\mathcal{O}_X(X)$ noethersch ist, ist auch $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ nicht endlich erzeugt.

Beweis von i):

Sei X_o eine 1-dimensionale irreduzible Komponente von X. Man versehe X_o mit der reduzierten Teilraumstruktur. Sei $j: X_o\to X$ die Inklusion. Sei L ein Geradenbündel auf X_o, das außer dem Nullschnitt keinen globalen Schnitt hat. Dann wird $j_*(L)$ nicht von seinen globalen Schnitten erzeugt.

§12 - Einige Vergleichssätze

Vorbild für diesen Paragraphen sind die GAGA-Vergleichssätze, wie etwa

(*) Ist X eine analytische Teilmenge von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, so ist X eine algebraische Untervarietät von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

oder allgemeiner

(**) Ist X ein projektives Schema über $\mathbb{C}$ und $\psi_X : X^{an} \to X$ der zu X assoziierte komplex analytische Raum, so gilt

(1) $(\psi_X)^*$ gibt eine Äquivalenz von der Kategorie der kohärenten Garben auf X mit der Kategorie der kohärenten Garben auf X^{an}.

(2) $H^i(X,F) \to H^i(X^{an},(\psi_X)^*F)$ ist ein Isomorphismus für jede kohärente Garbe F auf X und jedes $i \geq 0$.

Ersetzt man ψ_X durch φ_X, so zeigt Satz 11.19., daß (1) und (2) schon für $\varphi_{\mathbb{P}^1}$ nicht mehr gelten. Das erste Ziel dieses Paragraphen ist es

(1)' zu zeigen, daß die Kategorie der kohärenten Garben auf X durch $(\varphi_X)^*$ zu einer vollen Unterkategorie der kohärenten Garben auf X^h wird, und diese Unterkategorie zu charakterisieren

(2)' zu zeigen, daß $H^0(X,F) \to H^0(X,(\varphi_X)^*F)$ noch ein Isomorphismus ist.

Sei X ein Schema. Ist F eine kohärente Garbe auf X, so ist $(\varphi_X)^*F$ eine kohärente Garbe auf X^h und ist F eine kohärente Garbe auf X^h, so ist $(\varphi_X)_*F$ eine quasikohärente

Garbe auf X (nach Satz 10.7.). Für eine kohärente Garbe F auf X wird $(\varphi_X)^*F$ häufig auch einfach mit F^h bezeichnet.

Satz 12.1.

Seien X ein Schema und A eine isoalgebraische Teilmenge von X^h. Dann gibt es eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge T von X mit $A = T(\mathbb{C})$.

Beweis:

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach $\dim X$ geführt. Seien $X_1,\ldots,X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Es genügt die Behauptung für X_i und $A \cap X_i$ anstelle von X und A zu beweisen $(i = 1,\ldots,r)$. Also ist OE X irreduzibel.

1. Fall: $\dim A = \dim X$

Nach Satz 7.18. und Korollar 7.11. ist $A = X(\mathbb{C})$.

2. Fall: $\dim A < \dim X$

Es ist $\dim \bar{A}^{Zar} = \dim A$. Man wende die Induktionsvoraussetzung an auf $\bar{A}^{Zar}$ und A.

Satz 12.2.

Seien X ein Schema und F eine kohärente Garbe auf X. Dann gibt $T \mapsto T^h$ eine Bijektion von der Menge der kohärenten Untergarben von F auf die Menge der kohärenten Untergarben von F^h.

Beweis:

Es ist klar, daß die Abbildung injektiv ist. Um die Surjektivität zu zeigen, kann man deshalb OE annehmen, daß X affin ist. Man hat dann einen surjektiven Garbenmorphismus $f : \mathcal{O}_X^n \to F$ und somit auch einen surjektiven Garbenmorphismus $f^h : (\mathcal{O}_X^n)^h \to F^h$. Sei K eine kohärente Untergarbe von F^h und $L = (f^h)^{-1}(K)$. Ist T_o eine kohärente Untergarbe von $\mathcal{O}_X^n$ mit $T_o^h = L$, so ist $K = f(T_o)^h$. Es genügt also die Existenz von T_o zu beweisen.

Es gibt eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X(C), so daß $L|U_i$ von endlich vielen globalen Schnitten von L über U_i erzeugt wird (für jedes $i \in I$). Somit existieren eine Überdeckung $(V_j \mid j = 1,\dots,m)$ von X(C), Schemata X_j, offene semialgebraische Teilmengen $\tilde{V}_j$ von $X_j(C)$, kohärente Untergarben L_j von $\mathcal{O}_{X_j}^n$ und etale Morphismen $f_j : X_j \to X$, so daß $f_j^h|\tilde{V}_j : \tilde{V}_j \to V_j$ ein Isomorphismus ist und $(f_j^h)^*(L)|\tilde{V}_j = L_j^h|\tilde{V}_j$ für jedes $j \in \{1,\dots,m\}$. $(f_j^h)^*(L)$ und L_j^h sind kohärente Untergarben von $(\mathcal{O}_{X_j}^n)^h$. Nach Satz 12.1. gibt es eine Zariski-offene Teilmenge W_j von X_j, so daß $\tilde{V}_j \subseteq W_j$ und $(f_j^h)^*(L)|W_j(C) = L_j^h|W_j(C)$. Somit gilt: Es existieren ein Schema W (nämlich $W = \coprod_{j=1}^{m} W_j$), eine kohärente Untergarbe $\tilde{L}$ von $\mathcal{O}_W^n$ und ein surjektiver etaler Morphismus $g : W \to X$, so daß $(g^h)^*(L) = \tilde{L}^h$. Man hat das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} W\times_X W \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, "p"] & W \arrow[d, "g"] \\ W \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd} .$$

$p_1{}^*(\widetilde{L})$ und $p_2{}^*(\widetilde{L})$ sind kohärente Untergarben von $(\mathcal{O}_{W\times_X W})^n$. Es ist $p_1{}^*(\widetilde{L}) = p_2{}^*(\widetilde{L})$, denn $(p_1{}^*(\widetilde{L}))^h = (p_1{}^h)^*(\widetilde{L}^h) = (p^h)^*(L) = (p_2{}^h)^*(\widetilde{L}^h) = (p_2{}^*(\widetilde{L}))^h$. Da g als treuflacher quasikompakter Morphismus ein effektiver Abstiegsmorphismus ist, existiert eine kohärente Untergarbe T_o von $\mathcal{O}_X{}^n$ mit $g^*(T_o) = \widetilde{L}$. Es ist $T_o{}^h = L$.

Korollar 12.3.

Seien F und G kohärente Garben auf einem Schema X. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F,G) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_X}(F^h,G^h)$ bijektiv.

Beweis:

Gegeben sei ein $\mathfrak{A}_X$-Modulgarbenmorphismus $t : F^h \to G^h$. Der Graph H von t ist eine $\mathfrak{A}_X$-Untermodulgarbe von $F^h \times G^h$, so daß $p : H \to F^h$ ein Isomorphismus ist, wobei p die Einschränkung der Projektion $F^h \times G^h \to F^h$ auf H ist. Also ist H kohärent. Nach Satz 12.2. entspricht der Garbe H eine kohärente Untergarbe T von $F\times G$. Da p ein Isomorphismus ist, ist auch $q : T \to F$ ein Isomorphismus, wobei q die Einschränkung der Projektion $F\times G \to F$ auf T ist. Bezeichnet r die Projektion $F\times G \to G$, so ist $t = (r\circ q^{-1})^h$.

Korollar 12.4.

Seien X ein Schema und F eine kohärente Garbe auf X. Dann ist $\Gamma(X,F) \to \Gamma(X^h,F^h)$ bijektiv. Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{Q}_X(X(C))$ bijektiv.

Beweis:

Es ist $\Gamma(X,F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,F)$ und $\Gamma(X^h,F^h) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}_X}(\mathcal{Q}_X,F^h)$.

Indem man 12.4. auf jede Zariski-offene Teilmenge von X anwendet, erhält man

Korollar 12.5.

Sei F eine kohärente Garbe auf einem Schema X. Dann ist der Adjunktionsmorphismus $F \to (\varphi_X)_*(\varphi_X)^*F$ ein Isomorphismus.

Satz 12.6.

Seien X ein Schema und F eine kohärente Garbe auf X^h. Dann gelten

i) $(\varphi_X)_*F$ ist eine kohärente Garbe auf X.

ii) F ist genau dann isomorph zu einer Garbe der Form G^h, wobei G eine kohärente Garbe auf X ist, wenn es eine Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X durch Zariski-offene Teilmengen gibt, so daß $F|U_i(C)$ durch die Schnitte von F über $U_i(C)$ erzeugt wird. Es ist dann der Adjunktionsmorphismus $(\varphi_X)^*(\varphi_X)_*F \to F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

i) OE ist X affin. $(\varphi_X)_*F$ ist eine quasikohärente Garbe. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $\Gamma(X^h,F)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul ist. Sei G die von $\Gamma(X^h,F)$ erzeugte $\mathcal{O}_X$-Untermodulgarbe von F. Nach Korollar 10.10.i) ist G kohärent. Nach 10.10.ii) gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(X)$-Untermodul M von $\Gamma(X^h,G)$, der G erzeugt. Die Inklusion $M \hookrightarrow \Gamma(X^h,G)$ liefert $\widetilde{M} \to \Gamma(X^h,G)^{\sim} = (\varphi_X)_*G$ und somit $t : (\varphi_X)^*\widetilde{M} \to (\varphi_X)^*(\varphi_X)_*G \to G$. Da G von M erzeugt wird, ist $t : (\varphi_X)^*\widetilde{M} \to G$ surjektiv. Nach Korollar 12.4. ist $\Gamma(X^h,(\varphi_X)^*\widetilde{M}) = M$ und somit ist $\Gamma(X^h,(\varphi_X)^*(\widetilde{M})) \to \Gamma(X^h,G)$ injektiv. Also ist $\Gamma(X^h,\ker(t)) = (0)$. Nach Satz 12.2. folgt hieraus $\ker(t) = (0)$. Deshalb ist t ein Garbenisomorphismus und man erhält $M = \Gamma(X^h,(\varphi_X)^*\widetilde{M}) = \Gamma(X^h,G) = \Gamma(X^h,F)$.

ii) Sei t der Adjunktionsmorphismus $(\varphi_X)^*(\varphi_X)_*F \to F$. Nach i) und Korollar 12.4. ist $(\varphi_X)^*(\varphi_X)_*F(U(C)) \to F(U(C))$ ein Isomorphismus für jede Zariski-offene Teilmenge U von X. Nach i) und Satz 12.2. ist deshalb $\ker(t) = (0)$. Also ist t injektiv.

Aus Korollar 12.5. und Satz 12.6. ergibt sich

<u>Korollar 12.7.</u>

Sei X ein Schema. Dann geben $(\varphi_X)_*$ und $(\varphi_X)^*$ Äquivalenzen zwischen der Kategorie der kohärenten Garben auf X und der Kategorie der kohärenten Garben F auf X^h, für die gilt:

Es gibt eine Überdeckung $(U_i|i\in I)$ von X durch Zariski-offene Teilmengen von X, so daß $F|U_i(C)$ durch die globalen Schnitte von F über $U_i(C)$ erzeugt wird. Ist X affin, so geben $(\varphi_X)_*$ und $(\varphi_X)^*$ Äquivalenzen zwischen der Kategorie der kohärenten Garben auf X und der Kategorie der kohärenten Garben auf X^h, die von ihren globalen Schnitten erzeugt werden.

Aus 12.6.i) folgt

Korollar 12.8.

Seien X ein Schema und F eine kohärente Garbe auf X^h. Ist X affin, so ist $\Gamma(X^h,F)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X(C))$-Modul. Ist X vollständig, so ist $\Gamma(X^h,F)$ ein endlichdimensionaler C-Vektorraum.

Entsprechend wie Proposition 11.14.ii) beweist man

Proposition 12.9.

Seien $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus zwischen Schemata und F eine kohärente Garbe auf X. Dann ist der kanonische Morphismus $(\varphi_Y)^*f_*F \to (f^h)_*(\varphi_X)^*F$ ein Isomorphismus.

Auf keinem affinen Schema der Dimension ≥ 1 gilt das isoalgebraische Theorem A oder B, denn es gilt

Satz 12.10.

Sei X ein affines Schema der Dimension ≥ 1. Es gibt eine kohärente Garbe auf X^h, die nicht von ihren globalen Schnitten erzeugt wird, und $H^1(X^h, \mathcal{O}_X)$ ist ein nicht endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X(C))$-Modul.

Beweis:

Sei $f: X \to \mathbb{A}^n$ ein endlicher Morphismus, so daß $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}_X(X)$ injektiv ist. Man hat dann eine exakte Sequenz $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n} \to f_*\mathcal{O}_X \to T \to 0$ und somit auch die exakte Sequenz $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n} \to \varphi^* f_*\mathcal{O}_X \to \varphi^* T \to 0$ mit $\varphi = \varphi_{\mathbb{A}^n}$. Hieraus folgt die exakte Sequenz $H^0(\mathbb{A}^n(C), \varphi^* f_*\mathcal{O}_X) \xrightarrow{r} H^0(\mathbb{A}^n(C), \varphi^* T) \to H^1(\mathbb{A}^n(C), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}) \xrightarrow{s} H^1(\mathbb{A}^n(C), \varphi^* f_*\mathcal{O}_X)$. Nach Proposition 12.9. ist $\varphi^* f_*\mathcal{O}_X = (f^h)_*\mathcal{O}_X$. Da nach Proposition 4.2. $(f^h)_*$ exakt ist, ist die kanonische Abbildung $H^1(\mathbb{A}^n(C), (f^h)_*\mathcal{O}_X) \to H^1(X^h, \mathcal{O}_X)$ ein Isomorphismus. Angenommen, es ist $H^1(X^h, \mathcal{O}_X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X(C))$-Modul. Dann ist $H^1(\mathbb{A}^n(C), \varphi^* f_*\mathcal{O}_X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)$-Modul. Nach Korollar 12.4. ist die Abbildung r in der obigen exakten Sequenz surjektiv. Also ist s injektiv und $H^1(\mathbb{A}^n(C), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n)$-Modul. Seien $p: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ eine Projektion und $s: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$ ein Schnitt von p. Die durch s^h gegebene Abbildung $H^1(\mathbb{A}^n(C), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}) \to H^1(\mathbb{A}^1(C), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1})$ ist surjektiv. Also ist $H^1(\mathbb{A}^1(C), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1})$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^1)$-Modul, im Widerspruch zu Satz 11.19.iii).

Sei Y ein 1-dimensionales integres abgeschlossenes Unterschema von X. Nach Satz 7.18. ist Y^h irreduzibel. Sei L ein isoalgebraisches Geradenbündel auf Y^h, das außer dem Nullschnitt keinen globalen Schnitt besitzt (Satz 11.19.ii)). Ist $j : Y^h \to X^h$ die Einbettung, so ist j_*L eine kohärente Garbe auf X^h, die nicht von ihren globalen Schnitten erzeugt wird.

Sei X ein Schema. Eine kohärente Garbe auf X^h heißt algebraisch, wenn sie isomorph ist zu einer Garbe F^h, wobei F eine kohärente Garbe auf X ist. Ist X ein affines Schema der Dimension ≥ 1, so gibt es nach 12.10. eine kohärente Garbe auf X^h, die nicht algebraisch ist. Dies gilt sogar für jedes Schema der Dimension ≥ 1.

<u>Satz 12.11.</u>
Seien X und Y Schemata. Dann ist $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X^h,Y^h)$ bijektiv.

Beweis:
Sei $g \in \mathrm{Hom}(X^h,Y^h)$ gegeben. Der Graph Z von g ist ein isoalgebraischer Teilraum von $X^h \times Y^h = (X \times Y)^h$. Sei T das nach Satz 12.2. dem isoalgebraischen Teilraum Z entsprechende abgeschlossene Unterschema von $X \times Y$. Seien $p : T \to X$ und $q : T \to Y$ die Einschränkungen der Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ auf T. Es ist p^h ein isoalgebraischer Isomorphismus. Also ist p etal. Benutzt man, daß p lokal standard-etale Form hat und daß $p_C : T(C) \to X(C)$ bijektiv ist, so folgt, daß p ein lokaler Isomorphismus ist in der Zariski-

Topologie. Da p_C bijektiv ist, ist p ein Isomorphismus. Es ist $g = (q \circ p^{-1})^h$.

Sei X ein Schema. Nach Satz 12.11. ist der Funktor $\tau : Et(X) \to Et^{sa}(X(C))$ volltreu. Der Riemannsche Existenzsatz besagt, daß τ eine Äquivalenz ist für $(C,R) = (\mathbb{C},\mathbb{R})$. Im Anhang wird bewiesen, daß dies für beliebige (C,R) richtig ist.

<u>Satz 12.12.</u>
Sei X ein Schema. Dann ist $\tau : Et(X) \to Et^{sa}(X(C))$ eine Äquivalenz von Kategorien.

<u>Korollar 12.13.</u>
Seien X ein Schema, Y ein reduzierter isoalgebraischer Raum und $f : Y \to X^h$ ein endlicher Morphismus isoalgebraischer Räume. Dann existieren ein Schema Z, ein endlicher Morphismus $g : Z \to X$ und ein isoalgebraischer Isomorphismus $e : Y \to Z^h$, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & Z^h \arrow[dl, "g^h"] \\ & X^h & \end{tikzcd}$$

Nach Satz 12.11. kann man auch sagen: Die Kategorie der isoalgebraischen X^h-Räume, die reduziert und endlich über X^h sind, ist äquivalent zu der Kategorie der X-Schemata, die reduziert und endlich über X sind.

Beweis:

1. Fall: Y ist ein irreduzibler normaler isoalgebraischer Raum.

Nach Korollar 4.8. und Satz 12.1. gibt es eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge T von X mit $f(Y) = T(\mathbb{C})$. Man versehe T mit der reduzierten Unterraumstruktur. Es ist dann T ein integres Schema. f faktorisiert über $f_o : Y \to T^h$. $S = \{y \in Y | f_o$ ist bei y kein lokaler Isomorphismus$\}$ ist eine isoalgebraische Teilmenge von Y mit $\dim S < \dim Y$. Es existiert eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge T_o von T mit $f_o(S) = T_o(\mathbb{C})$. Nach Satz 12.12. existieren ein Schema Z_o, ein endlicher etaler Morphismus $g_o : Z_o \to T \smallsetminus T_o$ und ein isoalgebraischer Isomorphismus $e_o : Y \smallsetminus f_o^{-1}(T_o) \to Z_o^h$, so daß $g_o^h \circ e_o = f_o$. Z_o ist irreduzibel und normal. Es existieren ein irreduzibles und normales Schema Z und ein endlicher Morphismus $g : Z \to T$, so daß $Z_o = g^{-1}(T \smallsetminus T_o)$ und $g_o = g | g^{-1}(T \smallsetminus T_o)$. Nach Proposition 7.2. setzt sich e_o fort zu einem isoalgebraischen Isomorphismus $e : Y \to Z^h$.

2. Fall: Y ist ein reduzierter isoalgebraischer Raum.

Sei $p : \hat{Y} \to Y$ eine Normalisierung von Y. Indem man Fall 1 auf jede Zusammenhangskomponente von $\hat{Y}$ anwendet, erhält man ein Schema Q und einen endlichen Morphismus $q : Q \to X$, so daß $\hat{Y}$ und Q^h X^h-isomorph sind. Deshalb sind nach Proposition 12.9. die $\mathcal{O}_X$-Algebrengarben $(f \circ p)_* \mathcal{O}_{\hat{Y}}$ und $(q_* \mathcal{O}_Q)^h$ isomorph. $\mathcal{O}_Y \to p_* \mathcal{O}_{\hat{Y}}$ ist injektiv und somit ist $f_* \mathcal{O}_Y$ eine kohärente Untergarbe von $(f \circ p)_* \mathcal{O}_{\hat{Y}}$. Nach Satz 12.2. ist $f_* \mathcal{O}_Y$ algebraisch, $1 : f_* \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} F^h$, wobei F eine kohärente

Garbe auf X ist. Mit Hilfe von 1 übertrage man die $\mathcal{A}_X$-Algebrenstruktur von $f_*\mathcal{O}_Y$ auf F^h, $(F\otimes_{\mathcal{O}_X} F)^h = F^h \otimes_{\mathcal{A}_X} F^h \to F^h$ (die Multiplikation) und $\mathcal{A}_X \to F^h$ (der Einschnitt). Nach Korollar 12.3. gibt dies $\mathcal{O}_X$-Modulgarbenmorphismen $F\otimes_{\mathcal{O}_X} F \to F$ und $\mathcal{O}_X \to F$. Dadurch wird F zu einer $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe. Seien nun $Z = \operatorname{Spec} F$ und $g : \operatorname{Spec} F \to X$ der Strukturmorphismus. Es sind $f_*\mathcal{O}_Y$ und $(g^h)_*\mathcal{A}_Z$ als $\mathcal{A}_X$-Algebrengarben isomorph. Also sind $Y = \operatorname{Spech}(f_*\mathcal{O}_Y)$ und $Z^h = \operatorname{Spech}((g^h)_*\mathcal{A}_Z)$ X^h-isomorph.

Korollar 12.13. ist im allgemeinen für nicht reduzierte isoalgebraische Räume Y nicht richtig, denn es gilt:
Sei X ein Schema der Dimension ≥ 1. Dann gibt es einen isoalgebraischen Raum Y und einen Morphismus $f : Y \to X^h$, so daß $f_{red} : Y_{red} \to (X^h)_{red} = (X_{red})^h$ ein Isomorphismus ist, Y aber nicht algebraisch ist, d.h. es gibt kein Schema Z, so daß Y isomorph zu Z^h ist. (Insbesondere gibt es isoalgebraische Räume, die nicht algebraisch sind, deren Reduktion jedoch algebraisch ist).

Beweis:

Sei F eine kohärente Garbe auf X^h, die nicht algebraisch ist. $\mathcal{A}_X \oplus F$ wird zu einer $\mathcal{A}_X$-Algebrengarbe durch $(a_1+f_1)\cdot(a_2+f_2) := a_1a_2 + (a_2f_1+a_1f_2)$ für $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_X(U)$, $f_1, f_2 \in F(U)$ und U eine offene semialgebraische Teilmenge von X(C). Man setze $Y = \operatorname{Spech}(\mathcal{A}_X \oplus F)$. Sei $f : Y \to X^h$ der Strukturmorphismus. Offensichtlich ist f_{red} ein Isomorphismus. Angenommen, es existieren ein Schema Z und ein isoalgebraischer Isomorphismus $e: Y \to Z^h$. Nach Satz 12.11. gibt es einen Morphismus $g: Z \to X$ von Schemata, so daß $g^h \circ e = f$. g ist ein endlicher Morphismus. Nach Proposition 12.9. sind die Garben $f_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \oplus F$ und $(g_* \mathcal{O}_Z)^h$ isomorph. Nach Satz 12.2. ist F algebraisch. Widerspruch.

Sei X ein Schema. X_{sa} bezeichnet folgenden Situs: Die zugrundeliegende Kategorie ist die Kategorie der semialgebraischen Räume über $X(C)$, deren Strukturmorphismus ein lokaler Isomorphismus ist. Eine Familie $(f_i: V_i \to U \mid i \in I)$ von Morphismen dieser Kategorie heißt überdeckend, wenn $(f_i(V_i) \mid i \in I)$ eine Überdeckung von U ist. Der semialgebraische Situs von $X(C)$ wird einfachheitshalber ebenfalls mit $X(C)$ bezeichnet, der eingeschränkte etale Situs von X wird mit X_{et} bezeichnet. Man hat die kanonischen Morphismen von Siten

$$\delta: X_{sa} \to X(C), \quad \varepsilon: X_{sa} \to X_{et}.$$

Nach dem Vergleichslemma ([SGA 4, III, 4.1.]) sind δ_* und δ^* zueinander quasiinverse Äquivalenzen zwischen der Kategorie der abelschen Garben (bzw. Mengengarben) auf X_{sa} und der Kategorie der abelschen Garben (bzw. Mengengarben) auf $X(C)$. Im Anhang ist bewiesen

<u>Satz 12.14.</u>

Seien X ein Schema und G eine abelsche Torsionsgruppe. Der durch ε gegebene Homomorphismus $H^q(X_{et}, G) \to H^q(X_{sa}, G)$ ist ein Isomorphismus für jedes $q \geq 0$.

Korollar 12.15.

Sei X ein Schema. Für jede abelsche Gruppe G sind die semialgebraischen Homologiegruppen $H_q(X(C),G)$ und semialgebraischen Kohomologiegruppen $H^q(X(C),G)$ unabhängig von der Auswahl des reell abgeschlossenen Teilkörpers von C (d.h. sind K und L reell abgeschlossene Teilkörper von C mit $C = K(\sqrt{-1})$ und $C = L(\sqrt{-1})$, so sind $H_q(X(C)_K,G)$ (bzw. $H^q(X(C)_K,G)$) und $H_q(X(C)_L,G)$ (bzw. $H^q(X(C)_L,G)$) als Gruppen abstrakt isomorph).

Beweis:

Der entscheidende Punkt ist

(*) Für jede natürliche Zahl l ist der kanonische Morphismus $H^q(X(C), \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}) \to \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} H^q(X(C),\mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus.

Begründung von (*):

Sei $(U_j \mid j = 1,\dots,p)$ eine Überdeckung von X(C), so daß $\bigcap_{j\in I} U_j$ kontrahierbar ist für jede Teilmenge I von $\{1,\dots,p\}$. Arbeitet man mit der Cechkohomologie zu dieser Überdeckung, so genügt es zu zeigen:

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ habe man einen Komplex K_i:
$\dots \to K_i^n \xrightarrow{a_i^n} K_i^{n+1} \to \dots$ endlicher abelscher Gruppen.

Weiter sei $0 \leftarrow K_1 \leftarrow K_2 \leftarrow \dots \leftarrow K_{n-1} \xleftarrow{b_n} K_n \leftarrow \dots$ ein projektives System von Komplexen, so daß jedes $b_n = (\dots,b_n^k,b_n^{k+1},\dots)$ surjektiv ist (d.h. jedes b_n^k ist surjektiv). Dann ist die kanonische Abbildung $g : H^q(\varprojlim_i K_i) \to \varprojlim_i H^q(K_i)$ ein Isomorphismus.

Seien $a^n : (\varprojlim K_i)^n \to (\varprojlim K_i)^{n+1}$ die Differentiale des Komplexes $\varprojlim K_i$.

Injektivität von g:

Gegeben sei ein $x = (x_1, x_2, \ldots) \in (\varprojlim K_i)^q$ mit $a^q(x) = 0$, d.h. $a_i^q(x_i) = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Es sei $g(\bar{x}) = 0$, wobei $\bar{x}$ das durch x gegebene Element aus $H^q(\varprojlim K_i)$ ist. Es gibt also zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $y_i \in K_i^{q-1}$ mit $a_i^{q-1}(y_i) = \dot{x}_i$. Also ist $0 \leftarrow (a_1^{q-1})^{-1}(x_1) \leftarrow (a_2^{q-1})^{-1}(x_2) \leftarrow \ldots$ ein projektives System nichtleerer endlicher Mengen. Es ist dann $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} (a_i^{q-1})^{-1}(x_i)$ nicht leer. Man wähle ein $y \in \varprojlim (a_i^{q-1})^{-1}(x_i)$. Es ist dann $y \in (\varprojlim K_i)^{q-1}$ und $a^{q-1}(y) = x$. Also ist $\bar{x} = 0$.

Surjektivität von g:

Gegeben sei ein $x \in \varprojlim H^q(K_i)$, definiert durch eine Folge $(x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_i \in K_i^q$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, so daß $a_i^q(x_i) = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und $(b_i^q(x_i) - x_{i-1}) \in a_{i-1}^{q-1}(K_{i-1}^{q-1})$ für jedes $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Man definiere eine Folge $(y_1, y_2, \ldots)$ induktiv: Sei $y_1 = x_1$. Seien $y_1, \ldots, y_k$ schon definiert, so daß $y_i \in K_i^q$ für $i = 1, \ldots, k$, $b_i^q(y_i) = y_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, k$ und $(y_i - x_i) \in a_i^{q-1}(K_i^{q-1})$ für $i = 1, \ldots, k$. Es ist $(b_{k+1}^q(x_{k+1}) - y_k) \in a_k^{q-1}(K_k^{q-1})$. Da $b_{k+1}^{q-1} : K_{k+1}^{q-1} \to K_k^{q-1}$ surjektiv ist, existiert ein $z \in K_{k+1}^{q-1}$ mit $b_{k+1}^q(x_{k+1}) - y_k = a_k^{q-1}(b_{k+1}^{q-1}(z))$. Man setze $y_{k+1} = x_{k+1} - a_{k+1}^{q-1}(z)$. Es ist dann $y_{k+1} \in K_{k+1}^q$, $b_{k+1}^q(y_{k+1}) = y_k$ und $(y_{k+1} - x_{k+1}) \in a_{k+1}^{q-1}(K_{k+1}^{q-1})$. Es ist $y = (y_1, y_2, \ldots) \in (\varprojlim K_i)^q$ und $a^q(y) = 0$. Ist $\bar{y}$ das durch y gegebene Element aus $H^q(\varprojlim K_i)$, so ist $g(\bar{y}) = x$.

Nach Satz 12.14. hat man einen Isomorphismus projektiver Systeme

$$\begin{array}{l} 0 \leftarrow H^q(X_{et}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \leftarrow H^q(X_{et}, \mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z}) \leftarrow \dots \\ \qquad\quad \wr\downarrow \qquad\qquad\qquad\quad \wr\downarrow \\ 0 \leftarrow H^q(X(C), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \leftarrow H^q(X(C), \mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z}) \leftarrow \dots \end{array}$$

Also hat man nach (*) einen kanonischen Isomorphismus

(**) $\varprojlim H^q(X_{et}, \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^q(X(C), \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z})$.

Da $\varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$ flach über $\mathbb{Z}$ ist, gilt

(***) Der kanonische Morphismus

$H^q(X(C),\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z} \to H^q(X(C), \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z})$ ist ein Isomorphismus.

Seien K und L reell abgeschlossene Teilkörper von C mit $C = K(\sqrt{-1})$ und $C = L(\sqrt{-1})$. Aus (**) und (***) folgt, daß die $\varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$-Moduln $H^q(X(C)_K, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$ und $H^q(X(C)_L, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$ isomorph sind für jedes $l \in \mathbb{N}$. Ist l eine Primzahl, so ist der Rang des $\mathbb{Z}$-Moduls $H^q(X(C),\mathbb{Z})$ gleich dem Rang des $\varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$-Moduls $H^q(X(C),\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$ und der l-Torsionsanteil von $H^q(X(C),\mathbb{Z})$ ist isomorph zum Torsionsmodul von $H^q(X(C),\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$ ($H^q(X(C),\mathbb{Z})$ ist eine endlich erzeugte Gruppe). Also ist $H^q(X(C),\mathbb{Z})$ unabhängig von der Auswahl des reell abgeschlossenen Teilkörpers von C. Aus den universellen Koeffizientenformeln $H^q(X(C),G) = H^q(X(C),\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^{q+1}(X(C),\mathbb{Z}),G)$ und $H_q(X(C),G) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^q(X(C),\mathbb{Z}),G) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{q+1}(X(C),\mathbb{Z}),G)$ folgt nun Korollar 12.15..

Sei X ein Schema und seien K,L reell abgeschlossene Teilkörper von C mit $C = K(\sqrt{-1})$ und $C = L(\sqrt{-1})$. Nach geeigneter Wahl von $l \in \mathbb{N}$ hat man das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
H^q(X(C)_K, \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}) & & H^q(X(C)_K, \mathbb{Z}) \arrow[ll, "u"'] \\
\varprojlim H^q(X_{et}, \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}) \arrow[u, "r"', "\wr"] \arrow[d, "s", "\wr"'] & & \\
H^q(X(C)_L, \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}) & & H^q(X(C)_L, \mathbb{Z}) \arrow[ll, "v"]
\end{tikzcd}
$$

wobei u und v gegeben sind durch den Garbenmorphismus $\mathbb{Z} \to \varprojlim \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}$. Es bleibt die Frage, ob unter dem (kanonischen) Isomorphismus $s \circ r^{-1}$ die Untergruppe $H^q(X(C)_K, \mathbb{Z})$ auf die Untergruppe $H^q(X(C)_L, \mathbb{Z})$ abgebildet wird.

Aus Satz 12.12. erhält man Korollar 12.16.

<u>Korollar 12.16.</u>

Sei X ein zusammenhängendes Schema. Die algebraische Fundamentalgruppe von X ist isomorph zu der proendlichen Komplettierung der semialgebraischen Fundamentalgruppe von X(C).

Seien K und L reell abgeschlossene Teilkörper von C mit $C = K(\sqrt{-1})$ und $C = L(\sqrt{-1})$ und X ein Schema. Die proendlichen Komplettierungen $\pi_1(X(C)_K, x)^\wedge$ und $\pi_1(X(C)_L, x)^\wedge$ sind isomorph. Serre zeigt in [S] an einem Beispiel, daß jedoch $\pi_1(X(C)_K, x)$ und $\pi_1(X(C)_L, x)$ im allgemeinen nicht isomorph sind. Auch ist der Topos von $X(C)_K$ im allgemeinen nicht äquivalent zum Topos von $X(C)_L$.

Anhang

Der Anhang dient dem Beweis der Sätze 12.12. und 12.14..
Satz 12.12. folgt auf β) und Satz 12.14. folgt aus γ)
des nachfolgenden allgemeinen Vergleichssatzes.

Satz

Sei $f: X \to S$ ein Morphismus von Schemata. Man hat das kommutative Diagramm von Siten

$$\begin{tikzcd} X_{sa} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_{sa}"'] & X_{et} \arrow[d, "f_{et}"] \\ S_{sa} \arrow[r, "\varepsilon"'] & S_{et} \end{tikzcd}$$

α) Für eine Garbe F von Mengen auf X_{et} ist

$$\varepsilon^* f_{et*} F \to f_{sa*} \varepsilon^* F$$

ein Isomorphismus.

β) Für eine Garbe F indfiniter Gruppen auf X_{et} und $q \in \{0,1\}$ ist

$$\varepsilon^* R^q f_{et*} F \to R^q f_{sa*} \varepsilon^* F$$

ein Isomorphismus.

γ) Für eine abelsche Torsionsgarbe F auf X_{et} und $q \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\varepsilon^* R^q f_{et*} F \to R^q f_{sa*} \varepsilon^* F$$

ein Isomorphismus.

Dieser Satz ist Théorème 4.1. aus SGA 4, XVI. Auch der Beweis wird entsprechend geführt wie dort. Der Beweis ist hier sehr ausführlich dargestellt und daher sehr lang geraten. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß zum Beweis von α) und γ) keine Ergebnisse für den Fall $(C,R) = (\mathbb{C},\mathbb{R})$ herangezogen werden. Um β) zu beweisen, wird jedoch der Riemannsche Existenzsatz für Zariski-offene Teilmengen von $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ benötigt (denn es wird Satz 11.16. verwendet).

Eine Garbe F auf einem semialgebraischen Raum X heißt konstruierbar, wenn es semialgebraische Teilmengen $X_1,\ldots,X_r$ von X gibt, so daß $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ und $F|X_i$ isomorph zu einer konstanten Garbe auf X_i ist $(i = 1,\ldots,r)$.

Lemma 1.

Sei $f: F \to G$ ein Garbenmorphismus zwischen konstruierbaren Garben auf einem semialgebraischen Raum X, so daß $F_x \to G_x$ ein Isomorphismus ist für jedes $x \in X$. Dann ist f ein Isomorphismus.

Lemma 2.

Sei
$$\begin{tikzcd} Z\times_Y X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$
ein kartesisches Diagramm affiner semialgebraischer Räume, wobei f eigentlich ist, und sei F eine konstante Garbe von Mengen (bzw. von endlichen Gruppen, bzw. von abelschen Gruppen) auf X. Dann

ist der Basiswechselmorphismus

$$g^*R^qf_*F \to R^qu_*v^*F$$

ein Isomorphismus für $q = 0$ (bzw. $q \in \{0,1\}$, bzw. $q \in \mathbb{N}_0$).

Lemma 3.

Sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung zwischen affinen semialgebraischen Räumen und sei F eine konstante Garbe von Mengen (bzw. von endlichen Gruppen, bzw. von abelschen Gruppen) auf X. Dann ist R^qf_*F eine konstruierbare Garbe auf Y für $q = 0$ (bzw. $q \in \{0,1\}$, bzw. $q \in \mathbb{N}_0$).

Der Beweis von Lemma 1 ist trivial. Lemma 2 ist im Falle, daß F eine abelsche Garbe ist, in [D_1] bewiesen. Mit Hilfe des Satzes von Hardt erhält man Lemma 3 aus Lemma 2.

Beweis von α):

Seien $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Morphismen von Schemata und F eine Garbe von Mengen auf Z_{et}.

(1) Sind $\varepsilon^* g_{et*}F \to g_{sa*}\varepsilon^* F$ und $\varepsilon^* f_{et*}(g_{et*}F) \to f_{sa*}\varepsilon^*(g_{et*}F)$ injektiv, so ist auch $\varepsilon^*(f\cdot g)_{et*}F \to (f\cdot g)_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv.

(2) Ist $\varepsilon^*(f\cdot g)_{et*}F \to (f\cdot g)_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv, so ist auch $\varepsilon^* f_{et*}(g_{et*}F) \to f_{sa*}\varepsilon^*(g_{et*}F)$ injektiv.

(3) Sei $F \to G$ ein injektiver Garbenmorphismus auf Z_{et}. Ist $\varepsilon^* g_{et*}G \to g_{sa*}\varepsilon^* G$ injektiv, so ist auch $\varepsilon^* g_{et*}F \to g_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv.

(4) Sei g surjektiv und sei G eine Mengengarbe auf X_{et}. Ist $\varepsilon^*(f\cdot g)_{et*}F \to (f\cdot g)_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv für $F = g_{et}{}^*G$, so ist auch $\varepsilon^* f_{et*}G \to f_{sa*}\varepsilon^* G$ injektiv.

(1)' Sind $\varepsilon^* g_{et*}F \to g_{sa*}\varepsilon^* F$ und $\varepsilon^* f_{et*}(g_{et*}F) \to f_{sa*}\varepsilon^*(g_{et*}F)$ bijektiv, so ist auch $\varepsilon^*(f\cdot g)_{et*}F \to (f\cdot g)_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv.

(2)' Sind $\varepsilon^*(f\cdot g)_{et*}F \to (f\cdot g)_{sa*}\varepsilon^* F$ und $\varepsilon^* g_{et*}F \to g_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv, so ist auch $\varepsilon^* f_{et*}(g_{et*}F) \to f_{sa*}\varepsilon^*(g_{et*}F)$ bijektiv.

(3)' Sei $F \to G$ ein injektiver Garbenmorphismus auf Z_{et}. Ist $\varepsilon^* g_{et*}G \to g_{sa*}\varepsilon^* G$ bijektiv und ist $\varepsilon^* g_{et*}H \to g_{sa*}\varepsilon^* H$ injektiv für jede Mengengarbe H auf Z_{et}, so ist $\varepsilon^* g_{et*}F \to g_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv.

(4)' Sei g surjektiv und sei G eine Mengengarbe auf X_{et}. Sind $\varepsilon^*(f\cdot g)_{et*}F \to (f\cdot g)_{sa*}\varepsilon^* F$ und $\varepsilon^* g_{et*}F \to g_{sa*}\varepsilon^* F$

bijektiv für $F = g_{et}{}^*G$ und ist $\varepsilon^* f_{et*}H \to f_{sa*}\varepsilon^* H$ injektiv für jede Mengengarbe H auf X_{et}, so ist $\varepsilon^* f_{et*}G \to f_{sa*}\varepsilon^* G$ bijektiv.

Trivial zu beweisen sind (1), (2), (3), (1)', (2)'. (4) folgt aus (2) und (3) ((3) wird angewendet auf $G \to g_{et*}g_{et}{}^*G$). Ebenso folgt (4)' aus (2)' und (3)'.

Beweis von (3)': Den Garbenmorphismus $F \to G$ kann man zu einer exakten Sequenz $F \to G \rightrightarrows H$ ergänzen. Man hat dann das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon^* g_{et*}F \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \varepsilon^* g_{et*}G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "s"'] & \varepsilon^* g_{et*}H \arrow[d, "t"'] \\
g_{sa*}\varepsilon^* F \arrow[r] & g_{sa*}\varepsilon^* G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & g_{sa*}\varepsilon^* H
\end{tikzcd}$$

Ist s bijektiv und t injektiv, so ist r bijektiv.

(I) Seien $f: X \to S$ ein eigentlicher Morphismus und F eine Mengengarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv.

Beweis:

Sei zunächst F eine endliche konstante Mengengarbe auf X_{et}. Nach SGA 4, XIV, 1.1. ist $f_{et*}F$ eine konstruierbare Garbe auf S_{et}. Ebenso ist $f_{sa*}\varepsilon^* F$ eine konstruierbare Garbe auf $S(C)$. Also genügt es zu zeigen, daß $(\varepsilon^* f_{et*}F)_x \to (f_{sa*}\varepsilon^* F)_x$ ein Isomorphismus ist für jedes $x \in S(C)$. Es ist $(\varepsilon^* f_{et*}F)_x = (f_{et*}F)_x = H^0(f^{-1}(x)_{et}, F|f^{-1}(x)_{et})$ (SGA 4, XII, 5.2.) und $(f_{sa*}\varepsilon^* F)_x = H^0(f^{-1}(x)_{sa}, \varepsilon^* F|f^{-1}(x)_{sa})$

(Lemma 2). Da nach Satz 7.18. die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(x)$ den semialgebraischen Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(x)(C)$ entsprechen, ist $(\varepsilon^* f_{et*}F)_x \to (f_{sa*}\varepsilon^* F)_x$ ein Isomorphismus.

Nun wird gezeigt, daß $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv ist für jede Mengengarbe F auf X_{et}. Nach SGA 4, IX, 2.7.2. ist $F = \varinjlim F_i$, wobei F_i konstruierbar ist. Also ist OE F konstruierbar. Nach SGA 4, IX, 2.14. hat man einen Monomorphismus $F \to \prod_{i=1}^{n} (p_i)_{et*}(C_i)$, wobei $p_i : X_i \to X$ ein endlicher Morphismus von Schemata und C_i eine endliche konstante Mengengarbe auf $(X_i)_{et}$ ist. Somit ist nach (3) OE $F = p_{et*}C$, wobei $p : Y \to X$ ein endlicher Morphismus und C eine endliche konstante Mengengarbe auf Y_{et} ist. Nach (2) ist $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv.

Ersetzt man (3) und (2) durch (3)' und (2)', so erhält man wie eben, daß $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv ist.

(II) Seien $f : X \to S$ ein affiner Morphismus und F eine Mengengarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv.

Beweis:

Zunächst wird gezeigt, daß $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv ist. OE sind X und S affin und reduziert. Wie unter (I) ist OE F eine konstante endliche Garbe. Man hat eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & S_o \arrow[dl, "f'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

wobei i eine offene Immersion und f' projektiv ist. Nach (1) und (I) genügt es zu zeigen, daß $\varepsilon^* i_{et*}F \to i_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv ist. Sei $t : T \to S_o$ eine Singularitätenauflösung von S_o.

$$\begin{tikzcd} t^{-1}(X) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "s"'] & T \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, hook, "i"'] & S_o \end{tikzcd}$$

Es ist $\varepsilon^* j_{et*}(s_{et}{}^* F) \to j_{sa*}\varepsilon^*(s_{et}{}^* F)$ bijektiv. Nach (1)' und (I) ist dann $\varepsilon^*(t\circ j)_{et*}(s_{et}{}^*F) \to (t\circ j)_{sa*}\varepsilon^*(s_{et}{}^*F)$ bijektiv, also ist auch $\varepsilon^*(i\circ s)_{et*}(s_{et}{}^*F) \to (i\circ s)_{sa*}\varepsilon^*(s_{et}{}^*F)$ bijektiv. Nach (4) ist $\varepsilon^* i_{et*}F \to i_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv.

Ersetzt man (1), (2), (3), (4) durch (1)', (2)', (3)', (4)', so erhält man mit denselben Überlegungen wie eben, daß $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv ist.

(III) Seien $f : X \to S$ ein beliebiger Morphismus und F eine Mengengarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv.

Beweis:

Seien $X_1, \dots, X_r$ affine Zariski-offene Teilmengen von X, die X überdecken. Man hat den Morphismus $\coprod_{i=1}^{r} X_i \to X$. Nach (4) und (II) ist $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ injektiv. Nach (4)' und (II) ist $\varepsilon^* f_{et*}F \to f_{sa*}\varepsilon^* F$ bijektiv.

<u>Beweis von β):</u>

a) Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Ist F eine Garbe indfiniter Gruppen auf Y_{et}, so ist $f_{et}{}^*F$ eine Garbe indfiniter Gruppen auf X_{et}. Ist G eine Garbe indfiniter Gruppen auf X_{et}, so ist $f_{et*}G$ eine Garbe indfiniter Gruppen auf Y_{et}.

b) Seien $f: E' \to E$ ein Morphismus von Siten und $u: F \to G$ ein Monomorphismus von Gruppengarben auf E'. Man hat dann eine exakte Sequenz punktierter Garben auf E

$$1 \to f_*F \to f_*G \to f_*(G/F) \xrightarrow{r} R^1f_*F \xrightarrow{s} R^1f_*G.$$

f_*G operiert von links auf $f_*(G/F)$ und r induziert einen Monomorphismus $f_*G\backslash f_*(G/F) \xrightarrow{t} R^1f_*F$. Das Bild von t ist der Kern von s. ([G, III, 3.2.2., 3.2.3.]).

c) Seien $E'' \xrightarrow{g} E' \xrightarrow{f} E$ Morphismen von Siten und F eine Gruppengarbe auf E''. Man hat eine exakte Sequenz punktierter Mengengarben auf E

$$1 \to R^1f_*(g_*F) \xrightarrow{r} R^1(f\circ g)_*F \to R^0f_*(R^1g_*F).$$

r ist ein injektiver Garbenmorphismus ([G, V, 3.1.3.]).

In den folgenden Bemerkungen (1) bis (4) ist $f: X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und F eine Gruppengarbe auf X_{et}. F heißt effacable für f, wenn es eine Gruppengarbe G auf X_{et} und einen injektiven Garbenmorphismus $F \to G$ gibt, so daß $R^1f_{sa*}\varepsilon^*F \to R^1f_{sa*}\varepsilon^*G$ der Nullmorphismus ist.

(1) Es ist $\varepsilon^*R^1f_{et*}F \to R^1f_{sa*}\varepsilon^*F$ injektiv. Insbesondere ist $H^1(X_{et},F) \to H^1(X_{sa},\varepsilon^*F)$ injektiv.

Beweis:

Sei $G = \prod_{x\in X}(i_x)_*(i_x)^*F$, wobei $i_x : \overline{x} \to X$ ein geometrischer Punkt von X ist, der in x lokalisiert ist. Es ist $R^1f_{et*}G=0$. Der kanonische Morphismus $F \to G$ ist injektiv. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\varepsilon^*f_{et*}G & \to & \varepsilon^*f_{et*}(G/F) & \to & \varepsilon^*R^1f_{et*}F & \to & 0 \\
\downarrow r & & \downarrow s & & \downarrow t & & \downarrow \\
f_{sa*}\varepsilon^*G & \to & f_{sa*}\varepsilon^*(G/F) & \to & R^1f_{sa*}\varepsilon^*F & \to & R^1f_{sa*}\varepsilon^*G
\end{array}$$

Nach α) sind r und s bijektiv. Deshalb ist nach b) die Abbildung t injektiv.

(2) Ist $\varepsilon^*R^1f_{et*}F \to R^1f_{sa*}\varepsilon^*F$ ein Isomorphismus, so ist F effacable.

Beweis:

Man wähle G wie im Beweis von (1). Es ist dann $R^1f_{sa*}\varepsilon^*F \to R^1f_{sa*}\varepsilon^*G$ der Nullmorphismus.

(3) Ist F effacable, so ist $\varepsilon^*R^1f_{et*}F \to R^1f_{sa*}\varepsilon^*F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Seien G eine Gruppengarbe auf X_{et} und $F \to G$ ein injektiver Garbenmorphismus, so daß $R^1f_{sa*}\varepsilon^*F \to R^1f_{sa*}\varepsilon^*G$ der Nullmorphismus ist. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\varepsilon^* f_{et*}(G/F) & \longrightarrow & \varepsilon^* R^1 f_{et*} F & & \\
\Big\downarrow r & & \Big\downarrow t & & \\
f_{sa*}\varepsilon^*(G/F) & \xrightarrow[s]{} & R^1 f_{sa*}\varepsilon^* F & \longrightarrow & R^1 f_{sa*}\varepsilon^* G
\end{array}$$

r und s sind surjektiv. Also ist auch t surjektiv. Nach (1) ist t injektiv.

(4) Seien G eine Gruppengarbe auf X_{et} und $F \to G$ ein injektiver Garbenmorphismus. Ist $\varepsilon^* R^1 f_{et*} G \to R^1 f_{sa*}\varepsilon^* G$ ein Isomorphismus, so ist auch $\varepsilon^* R^1 f_{et*} F \to R^1 f_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Nach (2) ist G effacable. Damit ist auch F effacable. Die Behauptung folgt nun aus (3).

(5) Seien $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Morphismen von Schemata und F eine Gruppengarbe auf Z_{et}. Ist $\varepsilon^* R^1 (f\circ g)_{et*} F \to R^1 (f\circ g)_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus, so ist auch $\varepsilon^* R^1 f_{et*}(g_{et*}F) \to R^1 f_{sa*}\varepsilon^*(g_{et*}F)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Nach c) hat man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
1 \to \varepsilon^* R^1 f_{et*}(g_{et*}F) & \longrightarrow & \varepsilon^* R^1 (f\circ g)_{et*} F & \longrightarrow & \varepsilon^* R^0 f_{et*}(R^1 g_{et*} F) \\
\Big\downarrow r & & & & \Big\downarrow w \\
R^1 f_{sa*}\varepsilon^*(g_{et*}F) & & \Big\downarrow u & & R^0 f_{sa*}\varepsilon^*(R^1 g_{et*}F) \\
\Big\downarrow s & & & & \Big\downarrow p \\
1 \to R^1 f_{sa*}(g_{sa*}\varepsilon^* F) & \xrightarrow[t]{} & R^1 (f\circ g)_{sa*}\varepsilon^* F & \xrightarrow[v]{} & R^0 f_{sa*}(R^1 g_{sa*}\varepsilon^* F)
\end{array}$$

Nach α) ist w injektiv, nach (1) ist p injektiv. Nach c) ist t injektiv. Ist also u surjektiv, so ist auch $s \circ r$ surjektiv. Nach α) ist s ein Isomorphismus. Somit ist r surjektiv. Nach (1) ist r injektiv.

(6) Seien $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Morphismen von Schemata, wobei g surjektiv ist, und F eine Gruppengarbe auf X_{et}. Ist $\varepsilon^* R^1 (f \circ g)_{et*}(g_{et}{}^*F) \to R^1 (f \circ g)_{sa*}\varepsilon^*(g_{et}{}^*F)$ ein Isomorphismus, so ist auch $\varepsilon^* R^1 f_{et*}F \to R^1 f_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Man hat den injektiven Garbenmorphismus $F \to g_{et*}g_{et}{}^*F$. Die Behauptung folgt aus (4) und (5).

(7) Seien $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Morphismen von Schemata. Für jede Garbe G indfiniter Gruppen auf X_{et} sei $\varepsilon^* R^1 f_{et*}G \to R^1 f_{sa*}\varepsilon^* G$ ein Isomorphismus. Sei F eine konstruierbare Garbe indfiniter Gruppen auf Z_{et}, so daß $\varepsilon^* R^1 g_{et*}F \to R^1 g_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus ist. Dann ist auch $\varepsilon^* R^1 (f \circ g)_{et*}F \to R^1 (f \circ g)_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Es gibt endlich viele geometrische Punkte $i_k : z_k \to Z$ $(k = 1,\ldots,n)$ von Z, so daß $F \to G := \prod_{k=1}^{n} (i_k)_*(i_k)^*F$ injektiv ist. G ist eine Garbe indfiniter Gruppen auf Z_{et}. Es ist $R^1 g_{et*}G = 0$ und $R^1 (f \circ g)_{et*}G = 0$. Nach c) ist auch $R^1 f_{et*}(g_{et*}G) = 0$. Somit ist $0 = \varepsilon^* R^1 f_{et*}(g_{et*}G) \xrightarrow{\sim} R^1 f_{sa*}\varepsilon^*(g_{et*}G) \xrightarrow{\sim} R^1 f_{sa*}(g_{sa*}\varepsilon^* G)$ (die erste Isomorphie gilt nach Voraussetzung, die zweite nach α)). Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon^*R^1g_{et*}F & \longrightarrow & \varepsilon^*R^1g_{et*}G = 0 \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow \\ R^1g_{sa*}\varepsilon^*F & \xrightarrow[s]{} & R^1g_{sa*}\varepsilon^*G \end{array} .$$

Nach Voraussetzung ist r ein Isomorphismus. Also ist s die Nullabbildung. Nach c) hat man nun das kommutative Diagramm mit exakter unterer Zeile

$$\begin{array}{ccccc} & & R^1(f\circ g)_{sa*}(\varepsilon^*F) & \to & R^0f_{sa*}(R^1g_{sa*}\varepsilon^*F) \\ & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow 0 \\ 0 & \to & R^1(f\circ g)_{sa*}(\varepsilon^*G) & \to & R^0f_{sa*}(R^1g_{sa*}\varepsilon^*G) \end{array}$$

Also ist u die Nullabbildung. Damit ist F effacable für $f\circ g$. Die Behauptung folgt aus (3).

(8) Seien X ein Schema und Y eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von X. Zu jedem $x \in X(\mathbb{C})$ gebe es eine Zariski-offene Umgebung U von x in X und einen etalen Morphismus $l : U \to \mathbb{A}^n$, so daß $U \cap Y = V(l^*(t_1)) \cup \ldots \cup V(l^*(t_m))$, wobei $t_1, \ldots, t_m$ Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{A}^n$ sind. Seien $i : X \setminus Y \to X$ die Inklusion und F die konstante Garbe auf $(X \setminus Y)_{et}$ zu einer endlichen Gruppe G. Dann ist $f : \varepsilon^*R^1i_{et*}F \to R^1i_{sa*}\varepsilon^*F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

OE ist X zusammenhängend und es gibt einen etalen Morphismus $l : X \to \mathbb{A}^n$, so daß $Y = V(l^*(t_1)) \cup \ldots \cup V(l^*(t_m))$, wobei

$t_1,\ldots,t_m$ Koordinatenfunktionen auf A^n sind. Nach (1) genügt es die Surjektivität von f zu zeigen. Seien L eine offene semialgebraische Teilmenge von X(C) und $h : H \to L \setminus Y$ ein semialgebraischer G-prinzipalhomogener Raum über $L \setminus Y$. Sei $\bar{h}$ das durch h gegebene Element von $(R^1 i_{sa*}\varepsilon^*F)(L)$. Es gibt eine Überdeckung $(L_i' \mid i \in I)$ von $L \setminus Y$, so daß $H|L_i'$ als G-Raum trivial über L_i' ist für jedes $i \in I$. Also ist $\bar{h}|L_i'$ das ausgezeichnete Element von $(R^1 i_{sa*}\varepsilon^*F)(L_i')$ und somit ist $\bar{h}|L \setminus Y = f(e)$, wobei e das ausgezeichnete Element von $(\varepsilon^*R^1 i_{et*}F)(L \setminus Y)$ ist. Es ist noch zu zeigen, daß offene semialgebraische Teilmengen $L_1,\ldots,L_r$ von L und $h_i \in (\varepsilon^*R^1 i_{et*}F)(L_i)$ existieren, so daß $L \cap Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} L_i$ und $f(h_i) = \bar{h}|L_i$.

Man triangulLiere simultan L, $L \cap V(l^*(t_1)),\ldots,L \cap V(l^*(t_m))$, so daß die Sterne der Ecken, die in $L \cap Y$ liegen, $L \cap Y$ überdecken. Sei e eine Ecke der Triangulierung, die in $L \cap Y$ liegt. Es sei $e \in V(l^*(t_i))$ für $i = 1,\ldots,u$ und $e \notin V(l^*(t_i))$ für $i = u+1,\ldots,m$. Es ist dann $\mathrm{Stern}(e) \cap V(t^*(l_i)) = \emptyset$ für $i = u+1,\ldots,m$. Seien $q = \#G$ und $Y_o = V(l^*(t_1)) \cup \ldots \cup V(l^*(t_u))$. $W = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X \setminus Y_o}[T_1,\ldots,T_u]/(T_1^q - l^*(t_1),\ldots,T_u^q - l^*(t_u)) \xrightarrow{w} X \setminus Y_o$ ist endlich und etal. Es gilt

(*) Es gibt einen semialgebraischen G-prinzipalhomogenen Raum $p : P \to (X \setminus Y_o)(C)$, so daß $P|\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o$ und $H|\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o$ als G-prinzipalhomogene Räume isomorph sind und $P \times_{(X \setminus Y_o)(C)} W(C)$ als G-prinzipalhomogener Raum über W(C) trivial ist.

Begründung:

Man wähle eine offene semialgebraische Umgebung K von e in Stern(e), so daß l(K) ein Polyzylinder von $\mathbb{A}^n(C)$ mit Mittelpunkt l(e) ist und $l|K : K \to l(K)$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Sei $B : \text{Stern}(e) \times [0,1] \to \text{Stern}(e)$ die Homotopie "lineares Kontrahieren auf e" (also B_0 = Identität von Stern(e) und B_1 = Kontraktion auf e). Es existiert ein Punkt $y_0 \in K \setminus Y_0$, so daß $B(y_0,t) \in K$ für jedes $t \in [0,1]$. Sei x_0 ein Punkt aus W(C) mit $w(x_0) = y_0$. Sei $\sigma : [0,1] \to w^{-1}(\text{Stern}(e) \setminus Y_0)$ ein semialgebraischer Weg mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. Der semialgebraische Weg $w \circ \sigma$ ist in $\text{Stern}(e) \setminus Y_0$ relativ zu $\{0,1\}$ homotop zu einem Weg δ mit $\delta(t) \in K \setminus Y_0$ für jedes $t \in [0,1]$. Es gelten

(**) Es gibt ein $\tau \in \pi_1(\text{Stern}(e) \setminus Y_0, y_0)$, so daß $\tau^q = [w \circ \sigma]$, wobei $[w \circ \sigma]$ das durch $w \circ \sigma$ definierte Element aus $\pi_1(\text{Stern}(e) \setminus Y_0, y_0)$ ist.

(***) $w^{-1}(\text{Stern}(e) \setminus Y_0)$ ist zusammenhängend.

Denn: Es genügt folgendes zu zeigen: Seien $Q = (B_{r_1}(0) \setminus \{0\}) \times \ldots \times (B_{r_u}(0) \setminus \{0\}) \times B_{r_{u+1}}(a_{u+1}) \times \ldots \times B_{r_n}(a_n)$ und $w_0 : W_0 = \text{Spech}(\mathcal{O}_Q[T_1,\ldots,T_u]/(T_1^q - t_1,\ldots, T_u^q - t_u)) \to Q$. Sei $c : [0,1] \to W_0$ ein semialgebraischer Weg mit $c(0) = c(1)$. Dann ist W_0 zusammenhängend und es gibt ein $b \in \pi_1(Q, w_0(c(0)))$ mit $b^q = [w_0 \circ c]$.

Begründung für die letzte Behauptung:

Sei $w_i : W_i = \text{Spech}(\mathcal{O}_{B_{r_i}(0) \setminus \{0\}}[T_i]/(T_i^q - t_i)) \to B_{r_i}(0) \setminus \{0\}$ für $i = 1,\ldots,u$ und $w_i = \text{id} : W_i = B_{r_i}(a_i) \to B_{r_i}(a_i)$ für $i = u+1,\ldots,n$. Es ist dann $W_0 = W_1 \times \ldots \times W_n$ und

$w_o = w_1 \times \ldots \times w_n$. Also ist W_o zusammenhängend und
$(w_o)_*(\pi_1(W_o)) = \prod_{i=1}^{n} (w_i)_*(\pi_1(W_i)) = q\mathbb{Z} \times \ldots \times q\mathbb{Z} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} = \pi_1(Q)$.

Auf $W(C)$ operiert die Gruppe $\mu = \mu_q \times \ldots \times \mu_q = (\mu_q)^u$, wobei μ_q die Gruppe der q-ten Einheitswurzeln aus C ist. $W(C)$ wird dadurch zu einem semialgebraischen μ-prinzipalhomogenen Raum. Sei $\varphi : \pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o) \to \mu$ ein Gruppenhomomorphismus, der diesen semialgebraischen μ-prinzipalhomogenen Raum definiert. Es ist dann $\ker(\varphi) = w_*(\pi_1(W(C), x_o)) \subseteq \pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o)$. ($W(C)$ ist zusammenhängend nach (***)). Sei $\rho : \pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o) \to \pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o)$ der durch die Inklusion $\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o \to (X \setminus Y_o)(C)$ gegebene Gruppenhomomorphismus. $W(C) \mid \mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o$ wird dann durch $\varphi \circ \rho : \pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o) \to \mu$ gegeben. Also ist $\rho^{-1}(\ker(\varphi)) = \ker(\varphi \circ \rho) = w_*(\pi_1(w^{-1}(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o), x_o)) \subseteq \pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o)$. Sei $\psi : \pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o) \to G$ ein Gruppenhomomorphismus, der den G-prinzipalhomogenen Raum $H \mid \mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o$ definiert. Nach (**) ist $w_*(\pi_1(w^{-1}(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o), x_o)) \subseteq \ker(\psi)$. Also faktorisiert $\psi : \pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o) \to \pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o) / \rho^{-1}(\ker(\varphi)) \xrightarrow{\chi} G$. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\psi"'] & \pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o) \arrow[d] & \\
\pi_1(\mathrm{Stern}(e) \setminus Y_o, y_o)/\rho^{-1}(\ker(\varphi)) \arrow[r, hook, "\overline{\rho}"] \arrow[d, "\chi"'] & \pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o)/\ker(\varphi) \arrow[r, hook, "\overline{\varphi}"] \arrow[dl, dashed, "\lambda"] & \mu \\
G & &
\end{tikzcd}$$

Nach (***) ist $\varphi \circ \rho$ surjektiv. Also ist $\overline{\rho}$ ein Isomorphismus und somit existiert ein Gruppenhomomorphismus

$\lambda : \pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o)/\ker(\varphi) \to G$ mit $\chi = \lambda \circ \bar{p}$. Sei $p : P \to (X \setminus Y_o)(C)$ der durch die Zusammensetzung $\pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o) \to \pi_1((X \setminus Y_o)(C), y_o)/\ker(\varphi) \xrightarrow{\lambda} G$ gegebene G-prinzipalhomogene Raum über $(X \setminus Y_o)(C)$. Es ist dann (*) erfüllt.

Aus der Abstiegstheorie folgt die Existenz eines algebraischen G-prinzipalhomogenen Raumes $\tilde{p} : \tilde{P} \to X \setminus Y_o$, so daß $p : P \to (X \setminus Y_o)(C)$ und $\tilde{p}_C : \tilde{P}(C) \to (X \setminus Y_o)(C)$ als semialgebraische G-prinzipalhomogene Räume isomorph sind. $\tilde{P}|X \setminus Y$ gibt ein Element aus $H^1((X \setminus Y)_{et}, F)$ und somit auch ein Element $j \in (\varepsilon^* R^1 i_{et*} F)(X(C))$. Es ist $f(j|\mathrm{Stern}(e)) = \bar{h}|\mathrm{Stern}(e)$.

(9) Es sei $H^1(Z_{et}, G) \to H^1(Z_{sa}, G)$ ein Isomorphismus für jede endliche Gruppe G und jedes vollständige Schema Z der Dimension $\leq n$. Dann ist $\varepsilon^* R^1 f_{et*} F \to R^1 f_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus für jeden eigentlichen Morphismus $f : X \to S$ von Schemata, so daß $\dim f^{-1}(s) \leq n$ für jedes $s \in S(C)$, und jede Garbe F indfiniter Gruppen auf X_{et}.

Beweis:

Nach SGA 4, IX, 2.7.2. ist eine Garbe indfiniter Gruppen ein filtrierender induktiver Limes konstruierbarer Garben indfiniter Gruppen. Also ist OE F eine konstruierbare Garbe indfiniter Gruppen. Nach SGA 4, IX, 2.14. hat man einen injektiven Garbenmorphismus $F \to \prod_{i=1}^{k} (p_i)_{et*}(C_i)$, wobei $p_i : X_i \to X$ ein endlicher Morphismus und C_i die konstante Garbe zu einer endlichen Gruppe auf $(X_i)_{et}$ ist. Also ist OE F die konstante Garbe zu einer endlichen Gruppe (nach (4) und (5)). Nach SGA 4, XIV, 1.1. ist $R^1 f_{et*} F$ eine konstruierbare Garbe auf S_{et}. Ebenso ist nach Lemma 3 $R^1 f_{sa*} \varepsilon^* F$ eine konstruierbare Garbe auf $S(C)$. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $(\varepsilon^* R^1 f_{et*} F)_s \to (R^1 f_{sa*} \varepsilon^* F)_s$ ein Isomorphismus ist für jedes $s \in S(C)$. Nach SGA 4, XII, 5.2. ist $(\varepsilon^* R^1 f_{et*} F)_s = H^1(f^{-1}(s)_{et}, F | f^{-1}(s)_{et})$. Nach Lemma 2 ist $(R^1 f_{sa*} \varepsilon^* F)_s = H^1(f^{-1}(s)_{sa}, \varepsilon^* F | f^{-1}(s)_{sa})$.

(I) Seien X ein Schema der Dimension ≤ 1 und F die konstante Garbe zu einer endlichen Gruppe G auf X_{et}. Dann ist $H^1(X_{et}, F) \to H^1(X_{sa}, \varepsilon^* F)$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Nach (6) und indem man zur Normalisierung von X_{red} übergeht, kann man OE annehmen, daß X ein zusammenhängendes normales Schema der Dimension 1 ist. Nach (1) ist nur noch die Surjektivität von $H^1(X_{et}, F) \to H^1(X_{sa}, \varepsilon^* F)$ zu zeigen. Sei $t : T \to X(C)$ ein semialgebraischer G-prinzipalhomogener Raum über $X(C)$. Man wähle nichtleere Zariski-offene Teilmengen U von $\mathbb{A}^1$ und V von X und einen endlichen und etalen Morphismus $h : V \to U$. Sei $t' = t | t^{-1}(V) : t^{-1}(V) \to V(C)$. $h_C \circ t' : t^{-1}(V) \to U(C)$ ist eine semialgebraische Überlagerung von $U(C)$. Nach Satz 11.16. gibt es einen endlichen und etalen Morphismus $l : Y \to U$ und einen semialgebraischen Isomorphismus $s : Y(C) \to t^{-1}(V)$, so daß $(h_C \circ t') \circ s = l_C$. Nach

Satz 12.11. gibt es einen Morphismus $g : Y \to V$ von Schemata, so daß $t' \circ s = g_C$. g ist endlich und etal. Es gibt ein normales rein 1-dimensionales Schema Z und einen endlichen Morphismus $p : Z \to X$, so daß $p^{-1}(V) = Y$ und $p|p^{-1}(V) = g$ und $p^{-1}(V)$ dicht in Z ist. Nach Proposition 7.2. setzt sich s fort zu einem isoalgebraischen Isomorphismus $r : Z(C) \to T$. Also ist p etal. Nach Satz 12.11. gibt es genau eine Operation von G auf Z, so daß Z dadurch zu einem algebraischen G-prinzipalhomogenen Raum über X wird und r ein Isomorphismus ist zwischen den semialgebraischen G-prinzipalhomogenen Räumen $t : T \to X(C)$ und $p_C : Z(C) \to X(C)$.

(II) Seien $f : X \to S$ ein eigentlicher Morphismus und F eine Garbe indfiniter Gruppen auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* R^1 f_{et*} F \to R^1 f_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach der relativen Dimension $\max\{\dim f^{-1}(s) \mid s \in S(C)\}$ geführt. Ist die relative Dimension ≤ 1, so folgt die Behauptung aus (9) und (I). (II) gelte für die relative Dimension $<n$. Nach (9) ist im Induktionsschritt zu zeigen

(*) Seien Z ein vollständiges Schema der Dimension $\leq n$ und F die konstante Garbe zu einer endlichen Gruppe auf Z_{et}. Dann ist $H^1(Z_{et}, F) \to H^1(Z_{sa}, \varepsilon^* F)$ ein Isomorphismus.

Auf jeder irreduziblen Komponente Z_i von Z wähle man eine (nichtleere) Zariski-offene Teilmenge U_i von Z und ein

$l_i \in \mathcal{O}_Z(U_i)$, so daß l_i nicht konstant ist und $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die l_i definieren ein $l \in \mathcal{O}_Z(\cup U_i)$. Sei $\overline{Z}$ der Zariski-Abschluß des Graphen von l in $Z \times \mathbb{P}^1$. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \overline{Z} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Z \arrow[dr, "u"'] & & \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "v"] \\ & \operatorname{Spec} \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

wobei p und q die Einschränkungen der Projektionen $Z \times \mathbb{P}^1 \to Z$ und $Z \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ auf $\overline{Z}$ sind. Die relative Dimension von q ist <n. Nach (6) genügt es zu zeigen, daß $\varepsilon^* R^1(v \circ q)_{et*}(p_{et}{}^*F) \to R^1(v \circ q)_{sa*}\varepsilon^*(p_{et}{}^*F)$ ein Isomorphismus ist. Dies folgt aus (7).

(III) Seien U eine dichte Zariski-offene Teilmenge eines Schemas X, $i : U \to X$ die Inklusion und F die konstante Garbe zu einer endlichen Gruppe auf U_{et}. Dann ist $\varepsilon^* R^1 i_{et*} F \to R^1 i_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

OE ist X reduziert. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[d, "p"] \\ U_{reg} \arrow[urr, "q"] \arrow[r, hook, "j"'] & U \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

wobei Y ein reguläres Schema, p ein projektiver Morphismus und q eine offene Immersion ist, so daß $Y \setminus q(U_{reg})$ ein Divisor mit normal crossings ist. Der Garbenmorphismus $F \to (j_{et})_*(j_{et})^*F$ ist injektiv. Nach (4) und (5) genügt es zu zeigen, daß $\varepsilon^* R^1(p \circ q)_{et*}((j_{et})^* F) \to R^1(p \circ q)_{sa*}\varepsilon^*((j_{et})^* F)$ ein Isomorphismus ist. Dies folgt aus (7), (8) und (II).

(IV) Seien $f : X \to S$ ein affiner Morphismus von Schemata und F eine Garbe indfiniter Gruppen auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* R^1 f_{et*} F \to R^1 f_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Wie im Beweis von (9) ist OE F die konstante Garbe zu einer endlichen Gruppe. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & S \end{tikzcd}$$

wobei p ein projektiver Morphismus und i eine offene Immersion ist, so daß $i(X)$ dicht in Y ist. (IV) folgt aus (7), (II), und (III).

(V) Seien $f : X \to S$ ein beliebiger Morphismus von Schemata und F eine Garbe indfiniter Gruppen auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* R^1 f_{et*} F \to R^1 f_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Seien $X_1, \ldots, X_r$ affine Zariski-offene Teilmengen von X, die X überdecken. Man hat den Morphismus $\coprod_{i=1}^{r} X_i \to X$. (V) folgt aus (6) und (IV).

Beweis von γ):

Sei X ein Schema. $D^+(X_{et})$ bezeichnet die derivierte Kategorie der Kategorie $Ab(X_{et})$ der abelschen Garben auf X_{et} (die Objekte von $D^+(X_{et})$ sind die nach links beschränkten Komplexe aus $Ab(X_{et})$), entsprechend bezeichnet $D^+(X_{sa})$ die derivierte Kategorie von $Ab(X_{sa})$. Mit R^+h wird die Rechtsableitung eines Funktors h bezeichnet. (Zur Definition von derivierten Kategorien und Rechtsableitungen siehe SGA $4\frac{1}{2}$). Sei $f : X \to S$ ein Morphismus von Schemata. $\varepsilon^* R^+ f_{et*}$ und $R^+ f_{sa*}\varepsilon^*$ sind exakte Funktoren von $D^+(X_{et})$ nach $D^+(S_{sa})$. (Man beachte, daß ε^* ein exakter Funktor von $Ab(X_{et})$ nach $Ab(X_{sa})$ bzw. von $Ab(S_{et})$ nach $Ab(S_{sa})$ ist; somit kann man schreiben $R^+\varepsilon^* = \varepsilon^*$). Man hat den kanonischen Morphismus zwischen graduierten Funktoren $\varepsilon^* R^+ f_{et*} = R^+(\varepsilon^* f_{et*}) \xrightarrow{\sim} R^+(f_{sa*}\varepsilon^*) \to R^+ f_{sa*}\varepsilon^*$ und somit auch Morphismen zwischen Funktoren $\varepsilon^* R^i f_{et*} = H^i \varepsilon^* R^+ f_{et*} \to H^i R^+ f_{sa*}\varepsilon^* = R^i f_{sa*}\varepsilon^*$. Eine abelsche Garbe F auf X_{et} wird identifiziert mit dem Komplex $K \in Ob(D^+(X_{et}))$, so daß $K^i = 0$ für $i \neq 0$ und $K^0 = F$. Es ist dann zu zeigen, daß $\varepsilon^* R^+ f_{et*} F \to R^+ f_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus in $D^+(S_{sa})$ ist für jede Torsionsgarbe F auf X_{et}.

(1) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Für jede Torsionsgarbe F auf X_{et} sei $\varepsilon^* R^+ f_{et*} F \to R^+ f_{sa*}\varepsilon^* F$ ein Isomorphismus. Sei $K \in Ob(D^+(X_{et}))$, so daß $H^i(K)$ eine Torsionsgarbe ist für jedes $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$\varepsilon^* R^+ f_{et*} K \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Die Spektralsequenzen zu $R^+ f_{et*}$ und $R^+ f_{sa*}$ liefern

$E_2^{p,q} = \varepsilon^* R^p f_{et*}(H^q(K)) \Rightarrow \varepsilon^* H^{p+q} R^+ f_{et*} K = H^{p+q} \varepsilon^* R^+ f_{et*} K$

$E_2^{p,q} = R^p f_{sa*}(\varepsilon^* H^q(K)) = R^p f_{sa*}(H^q(\varepsilon^* K)) \Rightarrow H^{p+q} R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K$.

Somit ist $H^i(a)$ ein Isomorphismus in $Ab(Y_{sa})$ für jedes $i \in \mathbb{Z}$, wobei $a : \varepsilon^* R^+ f_{et*} K \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K$. Also ist a ein Isomorphismus in $D^+(Y_{sa})$.

(2) Seien $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Morphismen von Schemata und $K \in Ob(D^+(Z_{et}))$. Sind $\varepsilon^* R^+ g_{et*} K \to R^+ g_{sa*} \varepsilon^* K$ und $\varepsilon^* R^+ f_{et*}(R^+ g_{et*} K) \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^*(R^+ g_{et*} K)$ Isomorphismen, so ist auch $\varepsilon^* R^+(f \cdot g)_{et*} K \to R^+(f \cdot g)_{sa*} \varepsilon^* K$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Der Morphismus $\varepsilon^* R^+ f_{et*} \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^*$ gibt den Morphismus $u : \varepsilon^* R^+ f_{et*} R^+ g_{et*} \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* R^+ g_{et*}$, der Morphismus $\varepsilon^* R^+ g_{et*} \to R^+ g_{sa*} \varepsilon^*$ gibt den Morphismus $v : R^+ f_{sa*} \varepsilon^* R^+ g_{et*} \to R^+ f_{sa*} R^+ g_{sa*} \varepsilon^*$. Man hat das kommutative Diagramm von Morphismen zwischen Funktoren

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon^* R^+ f_{et*} R^+ g_{et*} \arrow[r, "u"] & R^+ f_{sa*} \varepsilon^* R^+ g_{et*} \arrow[r, "v"] & R^+ f_{sa*} R^+ g_{sa*} \varepsilon^* \\
\varepsilon^* R^+ (f \cdot g)_{et*} \arrow[u, "\wr"] \arrow[rr] & & R^+ (f \cdot g)_{sa*} \varepsilon^* \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Aus diesem Diagramm folgt die Behauptung von (2).

Bemerkung:

Ist $H^i(K)$ eine Torsionsgarbe für jedes $i \in \mathbb{Z}$, so ist auch

$H^i(R^+g_{et*}K)$ eine Torsionsgarbe für jedes $i \in \mathbb{Z}$. Denn: Man hat die Spektralsequenz $E_2^{p,q} = R^p g_{et*}(H^q(K)) \Rightarrow H^{p+q}(R^+g_{et*}K)$ und nach SGA 4, IX, 1.2. ist $R^p g_{et*}(H^q(K))$ eine Torsionsgarbe für jedes $p,q \in \mathbb{Z}$.

(3) Seien $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Morphismen von Schemata und $K \in \mathrm{Ob}(D^+(Z_{et}))$. Sind $\varepsilon^*R^+g_{et*}K \to R^+g_{sa*}\varepsilon^*K$ und $\varepsilon^*R^+(f\circ g)_{et*}K \to R^+(f\circ g)_{sa*}\varepsilon^*K$ Isomorphismen, so ist auch $\varepsilon^*R^+f_{et*}(R^+g_{et*}K) \to R^+f_{sa*}\varepsilon^*(R^+g_{et*}K)$ ein Isomorphismus.

Der Beweis ergibt sich aus dem Diagramm im Beweis von (2).

Bemerkung:
Es sei $Z \xrightarrow{g} X$ endlich. Nach SGA 4, VIII, 5.5. ist g_{et*} exakt, ebenso ist nach Proposition 4.2. g_{sa*} exakt. Also ist $R^+g_{et*} = g_{et*}$ und $R^+g_{sa*} = g_{sa*}$ und somit ist $\varepsilon^*R^+g_{et*} \to R^+g_{sa*}\varepsilon^*$ ein Isomorphismus (nach α)).

(4) Seien $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ Morphismen von Schemata, wobei g surjektiv ist. Für jede Torsionsgarbe F auf Z_{et} seien $\varepsilon^*R^+g_{et*}F \to R^+g_{sa*}\varepsilon^*F$ und $\varepsilon^*R^+(f\circ g)_{et*}F \to R^+(f\circ g)_{sa*}\varepsilon^*F$ Isomorphismen. Dann ist auch $\varepsilon^*R^+f_{et*}G \to R^+f_{sa*}\varepsilon^*G$ ein Isomorphismus für jede Torsionsgarbe G auf X_{et}.

Beweis:

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden drei Punkten.

Es sei $n \in \mathbb{Z}$ gegeben.

i) Ist $\varepsilon^* R^i f_{et*} G \to R^i f_{sa*} \varepsilon^* G$ bijektiv für $i \leq n$ für jede Torsionsgarbe G auf X_{et}, so ist $\varepsilon^* R^{n+1} f_{et*} F \to R^{n+1} f_{sa*} \varepsilon^* F$ injektiv für jede Torsionsgarbe F auf X_{et}.

ii) Ist $\varepsilon^* R^i f_{et*} G \to R^i f_{sa*} \varepsilon^* G$ bijektiv für $i \leq n$ und injektiv für $i = n+1$ für jede Torsionsgarbe G auf X_{et}, so ist $\varepsilon^* R^i f_{et*} K \to R^i f_{sa*} \varepsilon^* K$ bijektiv für $i \leq n$ und injektiv für $i = n+1$ für jedes $K \in Ob(D^+(X_{et}))$, so daß $H^j(K)$ eine Torsionsgarbe ist für jedes $j \in \mathbb{Z}$ und $H^j(K) = 0$ für $j < 0$.

iii) Ist $\varepsilon^* R^i f_{et*} K \to R^i f_{sa*} \varepsilon^* K$ bijektiv für $i \leq n$ und injektiv für $i = n+1$ für jedes $K \in Ob(D^+(X_{et}))$, so daß $H^j(K)$ eine Torsionsgarbe ist für jedes $j \in \mathbb{Z}$ und $H^j(K) = 0$ für $j < 0$, so ist $\varepsilon^* R^{n+1} f_{et*} F \to R^{n+1} f_{sa*} \varepsilon^* F$ bijektiv für jede Torsionsgarbe F auf X_{et}.

Beweis von i):

Sei F eine Torsionsgarbe auf X_{et}. Es ist $\varinjlim_{m \in \mathbb{N}} {}_mF \to F$ ein Isomorphismus, wobei ${}_mF$ der Kern der Multiplikation $F \xrightarrow{m} F$ ist. Deshalb ist OE ${}_mF = F$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Es ist dann $G := \prod_{x \in X} (i_x)_* (i_x)^* F$ eine Torsionsgarbe ($i_x : \bar{x} \to X$ ist ein geometrischer Punkt von X, der in $x \in X$ lokalisiert ist). Es ist $R^i f_{et*} G = 0$ für jedes $i \neq 0$. Aus der exakten Sequenz $0 \to F \to G \to G/F \to 0$ erhält man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon^* R^n f_{et*} G \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon^* R^n f_{et*} G/F \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon^* R^{n+1} f_{et*} F \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon^* R^{n+1} f_{et*} G \arrow[d] \\
R^n f_{sa*} \varepsilon^* G \arrow[r] & R^n f_{sa*} \varepsilon^* G/F \arrow[r] & R^{n+1} f_{sa*} \varepsilon^* F \arrow[r] & R^{n+1} f_{sa*} \varepsilon^* G
\end{tikzcd}$$

Nach dem Fünfer-Lemma folgt hieraus die Behauptung.

Beweis von ii):

Die Behauptung gilt für jedes $K \in Ob(D^+(X_{et}))$, so daß $H^j(K) = 0$ für $j \leq n+1$. Gegeben sei nun ein $m \in \mathbb{N}_0$, so daß ii) für jedes $K \in Ob(D^+(X_{et}))$ gilt mit $H^j(K) = 0$ für jedes $j \leq m$ und $H^j(K)$ ist Torsionsgarbe für jedes $j \in \mathbb{Z}$. Sei $L \in Ob(D^+(X_{et}))$, so daß $H^j(L)$ Torsionsgarbe ist für jedes $j \in \mathbb{Z}$ und $H^j(L) = 0$ für $j \leq m-1$. Man hat ein ausgezeichnetes Dreieck in $D^+(X_{et})$

$$\begin{tikzcd}
P := H^m(L)[-m] \arrow[rr] & & L \arrow[dl] \\
& K \arrow[ul, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

Aus der langen exakten Kohomologiesequenz zu diesem Dreieck folgt, daß $H^j(K) = 0$ für $j \leq m$ und $H^j(K) = H^j(L)$ für $j > m$. Der Morphismus $\varepsilon^* R^+ f_{et*} \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^*$ zwischen exakten Funktoren gibt einen Morphismus zwischen ausgezeichneten Dreiecken in $D^+(Y_{sa})$

$$(*) \quad \begin{tikzcd}
\varepsilon^* R^+ f_{et*} P \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon^* R^+ f_{et*} L \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon^* R^+ f_{et*} K \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon^* R^+ f_{et*} P[1] \arrow[d] \\
R^+ f_{sa*} \varepsilon^* P \arrow[r] & R^+ f_{sa*} \varepsilon^* L \arrow[r] & R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K \arrow[r] & R^+ f_{sa*} \varepsilon^* P[1]
\end{tikzcd}$$

Wendet man auf (*) den Kohomologiefunktor an, so erhält man mit Hilfe des Fünfer-Lemmas die Behauptung für L.

Beweis von iii):

Sei F eine Torsionsgarbe auf X_{et}. Den Morphismus

$F \to R^+g_{et*}R^+g_{et}{}^*F = R^+g_{et*}(g_{et}{}^*F)$ ergänze man zu einem ausgezeichneten Dreieck in $D^+(X_{et})$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr] & & R^+g_{et*}(g_{et}{}^*F) \arrow[dl] \\ & K \arrow[ul, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

Aus der langen exakten Kohomologiesequenz zu diesem Dreieck ersieht man, daß $H^j(K) = 0$ für $j < 0$ (da g surjektiv ist, ist $H^0(F) = F \to g_{et*}g_{et}{}^*F = H^0(R^+g_{et*}(g_{et}{}^*F))$ injektiv) und $H^j(K)$ eine Torsionsgarbe ist für jedes $j \in \mathbb{Z}$. Der Beweis verläuft nun wie unter ii).

(I) Für jedes vollständige Schema Z der Dimension $\leq n$, jede konstante Garbe G auf Z_{et} zu einer endlichen abelschen Gruppe und jedes $q \in \mathbb{N}_0$ sei $H^q(Z_{et}, G) \to H^q(Z_{sa}, \varepsilon^*G)$ ein Isomorphismus. Seien $f: X \to S$ ein eigentlicher Morphismus von Schemata, so daß $\dim f^{-1}(s) \leq n$ für jedes $s \in S(C)$, und F eine Torsionsgarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^*R^+f_{et*}F \to R^+f_{sa*}\varepsilon^*F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Da $F = \varinjlim_{m \in \mathbb{N}} {}_mF$, ist OE $F = {}_mF$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Also ist F eine $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modulgarbe. Nach SGA 4, IX, 2.7.2. ist eine $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modulgarbe ein filtrierender induktiver Limes konstruierbarer $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modulgarben. Also ist OE F eine konstruierbare $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modulgarbe. Nach SGA 4, IX, 2.14. hat man eine exakte Sequenz $0 \to F \to F_0 \to F_1 \to \ldots$, wobei jedes F_j von der Form $\prod_{i=1}^{k} (p_i)_{et*}(C_i)$ ist mit $p_i: X_i \to X$ endlich und C_i konstante konstruierbare $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modulgarbe auf $(X_i)_{et}$. Sei K der Komplex $0 \to F_0 \to F_1 \to \dots$. F und K sind isomorph in $D^+(X_{et})$. Es ist zu zeigen, daß $\varepsilon^* R^+ f_{et*} K \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K$ ein Isomorphismus ist. Man hat die Spektralsequenzen

$$E_1^{p,q} = \varepsilon^* R^q f_{et*} K^p \Rightarrow \varepsilon^* R^{p+q} f_{et*} K = H^{p+q} \varepsilon^* R^+ f_{et*} K$$

$$E_1^{p,q} = R^q f_{sa*} \varepsilon^* K^p \Rightarrow H^{p+q} R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K.$$

Es genügt deshalb zu zeigen, daß $\varepsilon^* R^+ f_{et*} K^p \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K^p$ ein Isomorphismus ist für jedes $p \in \mathbb{Z}$. Also ist OE F die konstante Garbe zu einer endlichen abelschen Gruppe (nach (3)). Nach SGA 4, XIV, 1.1. ist $R^q f_{et*} F$ eine konstruierbare Garbe auf S_{et} für jedes $q \in \mathbb{N}_0$. Nach Lemma 3 ist $R^q f_{sa*} \varepsilon^* F$ eine konstruierbare Garbe auf S(C) für jedes $q \in \mathbb{N}_0$. Deshalb genügt es zu zeigen, daß $(\varepsilon^* R^q f_{et*} F)_s \to (R^q f_{sa*} \varepsilon^* F)_s$ ein Isomorphismus ist für jedes $s \in S(C)$ und jedes $q \in \mathbb{N}_0$. Nach SGA 4, XII, 5.2. ist $(\varepsilon^* R^q f_{et*} F)_s = H^q(f^{-1}(s)_{et}, F|f^{-1}(s)_{et})$. Nach Lemma 2 ist $(R^q f_{sa*} \varepsilon^* F)_s = H^q(f^{-1}(s)_{sa}, \varepsilon^* F|f^{-1}(s)_{sa})$.

(II) Seien X ein vollständiges Schema der Dimension ≤ 1 und F die konstante Garbe auf X_{et} zu einer endlichen abelschen Gruppe G. Dann ist $H^q(X_{et}, F) \to H^q(X_{sa}, \varepsilon^* F)$ ein Isomorphismus für jedes $q \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Sei $f : Z \to X$ die Normalisierung von X_{red}. Man hat die exakte Sequenz $0 \to F \to f_{et*} f_{et}^* F \to H \to 0$ auf X_{et}, wobei der Träger von H aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten von X besteht. Es ist $H^q(X_{et},H) \to H^q(X_{sa},\varepsilon^*H)$ ein Isomorphismus für jedes $q \in \mathbb{N}_0$. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $H^q(X_{et},f_{et*}f_{et}{}^*F) \to H^q(X_{sa},\varepsilon^*f_{et*}f_{et}{}^*F)$ ein Isomorphismus ist. Hierzu wiederum genügt es zu zeigen, daß $H^q(Z_{et},f_{et}{}^*F) \to H^q(Z_{sa},\varepsilon^*f_{et}{}^*F)$ ein Isomorphismus ist. Also ist OE X ein zusammenhängendes vollständiges reguläres Schema der Dimension 1. Weiterhin ist OE $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. X(C) ist als orientierbare zusammenhängende vollständige semialgebraische Mannigfaltigkeit der Dimension 2 isomorph zu einem $M_p, p \in \mathbb{N}_0$ (in der Notation von [Mn]). Indem man X als verzweigte Überlagerung von $\mathbb{P}^1$ realisiert, erhält man mit Hilfe der Hurwitz-Formel: $2-2p = \chi(X(C)) = 2-2g$, wobei g das Geschlecht von X ist. Somit hat man $H^0(X(C),G) = G$, $H^1(X(C),G) = G^{2g}$, $H^2(X(C),G) = G$, $H^i(X(C),G) = 0$ für $i > 2$. Nach SGA 4, IX, 4.7. und X, 4.3. ist ebenso $H^0(X_{et},G) = G$, $H^1(X_{et},G) = G^{2g}$, $H^2(X_{et},G) = G$, $H^i(X_{et},G) = 0$ für $i > 2$.

Nach (1) aus dem Beweis von β) ist $H^1(X_{et},F) \to H^1(X_{sa},\varepsilon^*F)$ injektiv. Da $\#H^1(X_{et},F) = \#H^1(X_{sa},\varepsilon^*F)$, ist $H^1(X_{et},F) \to H^1(X_{sa},\varepsilon^*F)$ bijektiv. Es ist noch zu zeigen, daß $H^2(X_{et},F) \to H^2(X_{sa},\varepsilon^*F)$ ein Isomorphismus ist.

Man wähle ein $x \in X(C)$. Sei $j : U = X \setminus \{x\} \to X$ die Inklusion und sei $K = j_{et}{}^*F$. Man hat die beiden Spektralsequenzen

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{et},R^qj_{et*}K) \Rightarrow H^{p+q}(U_{et},K)$$

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{sa},R^qj_{sa}\varepsilon^*K) \Rightarrow H^{p+q}(U_{sa},\varepsilon^*K).$$

Man hat einen Morphismus zwischen diesen beiden Spektralsequenzen, der auf den $E_2^{p,q}$-Termen gegeben ist durch die Zusammensetzung der beiden Abbildungen $H^p(X_{et},R^qj_{et*}K) \to$

$H^p(X_{sa}, \varepsilon^*R^qj_{et*}K) \to H^p(X_{sa}, R^qj_{sa*}\varepsilon^*K)$. Also hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
E_2^{0,1} = H^0(X_{et}, R^1j_{et*}K) & \xrightarrow{d_2} & H^2(X_{et}, j_{et*}K) = E_2^{2,0} \\
u\downarrow & & \downarrow r \\
H^0(X_{sa}, \varepsilon^*R^1j_{et*}K) & & H^2(X_{sa}, \varepsilon^*j_{et*}K) \\
v\downarrow & & \downarrow s \\
E_2^{0,1} = H^0(X_{sa}, R^1j_{sa*}\varepsilon^*K) & \xrightarrow[d_2]{} & H^2(X_{sa}, j_{sa*}\varepsilon^*K) = E_2^{2,0}
\end{array}$$

Es sind u und s Isomorphismen. Nach (8) aus dem Beweis von β) ist v ein Isomorphismus. In einer Spektralsequenz hat man die exakte Sequenz $E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to E^2$, hier also $H^0(X_{sa}, R^1j_{sa*}\varepsilon^*K) \to H^2(X_{sa}, j_{sa*}\varepsilon^*K) \to H^2(U_{sa}, \varepsilon^*K)$. Aus der Poincaré-Dualität folgt $H^2(U_{sa}, \varepsilon^*K) = 0$. Also ist $H^0(X_{sa}, R^1j_{sa*}\varepsilon^*K) \to H^2(X_{sa}, j_{sa*}\varepsilon^*K)$ surjektiv und somit ist auch r surjektiv. Es ist $F \to j_{et*}j_{et}{}^*F = j_{et*}K$ ein Isomorphismus. Da $\# H^2(X_{et}, F) = \# H^2(X_{sa}, \varepsilon^*F)$, ist $H^2(X_{et}, F) \to H^2(X_{sa}, \varepsilon^*F)$ ein Isomorphismus.

(III) Seien $f: X \to S$ ein eigentlicher Morphismus von Schemata und F eine Torsionsgarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^*R^+f_{et*}F \to R^+f_{sa*}\varepsilon^*F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Der Beweis folgt durch vollständige Induktion nach der relativen Dimension $\max\{\dim f^{-1}(s) \mid s \in S(\mathbb{C})\}$. Nach (I) und (II) gilt (III), wenn die relative Dimension ≤ 1 ist. (III) gelte für die relative Dimension $<n$. Nach (I) ist noch zu zeigen

(*) Seien Z ein vollständiges Schema der Dimension $\leq n$

und F eine Torsionsgarbe auf Z_{et}. Dann ist $H^q(Z_{et},F) \to H^q(Z_{sa},\varepsilon^*F)$ ein Isomorphismus für jedes $q \in \mathbb{N}_0$.

Man betrachte das kommutative Diagramm aus dem Beweis von (II) aus β). (*) folgt aus (1), (2) und (4).

(IV) Sei $l : X \to \mathbb{A}^n$ ein etaler Morphismus. Seien t eine Koordinatenfunktion auf $\mathbb{A}^n$, $j : X \setminus V(l^*(t)) \to X$ die Inklusion und F die konstante Garbe auf $(X \setminus V(l^*(t)))_{et}$ zu einer endlichen abelschen Gruppe G. Dann ist $\varepsilon^* R^+ j_{et*} F \to R^+ j_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

OE ist $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Es ist schon bewiesen, daß $\varepsilon^* R^q j_{et*} F \to R^q j_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus ist für $q \in \{0,1\}$. Nach SGA 4, XVI, 3.7. ist $R^q j_{et*} F = 0$ für $q > 1$. Es genügt also folgendes einzusehen

(*) Seien M eine reindimensionale semialgebraische Mannigfaltigkeit und Y eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von M, die ebenfalls eine reindimensionale Mannigfaltigkeit ist. Dann ist $R^q j_* K = 0$ für $q \notin \{0, \dim M - \dim Y - 1\}$, wobei $j : M \setminus Y \to M$ die Inklusion und K die konstante Garbe auf $M \setminus Y$ zu der Gruppe G ist.

Begründung von (*):

Gegeben sei ein $q \neq \dim M - \dim Y - 1$. Auf M hat man die Prägarben P, $U \mapsto H^q(U,G)$ und Q, $U \mapsto H^q(U \setminus Y, G)$. Der zu dem kanonischen Prägarbenmorphismus $P \to Q$ assoziierte Garbenmorphismus $P^\# \to Q^\#$ ist surjektiv, denn: Sei V eine offene semialgebraische Teilmenge von M. Man wähle eine simultane Triangulierung von V und $Y \cap V$, so daß die Sterne der Ecken, die in $Y \cap V$ liegen, $Y \cap V$ überdecken. Sei L der Stern einer Ecke e, die in $Y \cap V$ liegt. $Y \cap L$ ist der Stern von e in der Triangulierung von $Y \cap V$. Deshalb ist $H_i(Y \cap L, G) = 0$ für $i \neq \dim Y$. (H_i bezeichnet die i-te Homologiegruppe mit abgeschlossenem Träger). Aus der exakten Sequenz

$$\ldots \to H_r(Y \cap L, G) \to H_r(L, G) \to H_r(L \setminus Y, G) \to H_{r-1}(Y \cap L, G) \to \ldots$$

folgt, daß $H_r(L,G) \to H_r(L \setminus Y, G)$ surjektiv ist für $r \neq \dim Y+1$. Die Poincaré-Dualität gibt das kommutative Diagramm ($n := \dim M$):

$$\begin{array}{ccc} H^i(L,G) & \xrightarrow{\sim} & H_{n-i}(L,G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(L \setminus Y, G) & \xrightarrow{\sim} & H_{n-i}(L \setminus Y, G). \end{array}$$

Also ist $H^q(L,G) \to H^q(L \setminus Y, G)$ surjektiv.

(V) Seien $f : X \to S$ ein beliebiger Morphismus von Schemata und F eine Torsionsgarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* R^+ f_{et*} F \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach $\dim X$. (V) gelte, wenn $\dim X < n$.

i) Seien $f : X \to S$ eine offene Immersion, wobei X regulär und n-dimensional ist und $f(X)$ dicht in S ist, und F die konstante Garbe auf X_{et} zu einer endlichen abelschen Gruppe. Dann ist $\varepsilon^* R^+ f_{et*} F \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* F$

ein Isomorphismus.

Beweis:

Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

wobei Z ein reguläres Schema, p ein projektiver Morphismus und h eine offene Immersion ist, so daß $Z \setminus h(X)$ ein Divisor mit normal crossings ist. Nach (1), (2) und (III) genügt es zu zeigen, daß $\varepsilon^* R^+ h_{et*} F \to R^+ h_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus ist. OE gibt es einen etalen Morphismus $l : Z \to \mathbb{A}^n$, so daß $Z \setminus h(X) = V(l^*(t_1)) \cup \ldots \cup V(l^*(t_m))$, wobei $t_1, \ldots, t_m$ Koordinatenfunktionen von $\mathbb{A}^n$ sind. Sei h_i die durch h gegebene offene Immersion $X \to Z \setminus \bigcup_{k=1}^{m-i} V(l^*(t_k))$ für $i = 1, \ldots, m-1$. Man setze $h_m := h$. Durch vollständige Induktion nach i wird gezeigt, daß $\varepsilon^* R^+(h_i)_{et*} F \to R^+(h_i)_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus ist. Für $i = 1$ folgt dies aus (IV). Sei $\varepsilon^* R^+(h_r)_{et*} F \to R^+(h_r)_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus für ein $r \in \{1, \ldots, m-1\}$. Sei j die offene Immersion $Z \setminus \bigcup_{k=1}^{m-r} V(l^*(t_k)) \to Z \setminus \bigcup_{k=1}^{m-r-1} V(l^*(t_k))$, wenn $r \in \{1, \ldots, m-2\}$, beziehungsweise $Z \setminus V(l^*(t_1)) \to Z$, wenn $r = m-1$. Nach (2) genügt es im Induktionsschritt zu zeigen, daß $\varepsilon^* R^+ j_{et*}(R^+(h_r)_{et*} F) \to R^+ j_{sa*} \varepsilon^*(R^+(h_r)_{et*} F)$ ein Isomorphismus ist. Sei L die konstante Garbe auf $(Z \setminus \bigcup_{k=1}^{m-r} V(l^*(t_k)))_{et}$ zu derselben Gruppe, die F definiert. Es ist $F = (h_r)_{et}{}^* L$. Den Morphismus $L \to R^+(h_r)_{et*} R^+(h_r)_{et}{}^* L = R^+(h_r)_{et*} F$ ergänze man zu einem ausgezeichneten Dreieck in $D^+((Z \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{m-r} V(1^*(t_k)))_{et})$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr] & & R^+(h_r)_{et*}F \arrow[dl] \\ & K \arrow[ul, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

Sei $i : Y = (Z \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{m-r} V(1^*(t_k))) \smallsetminus h(X) \to Z \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{m-r} V(1^*(t_k))$ die Inklusion. Es ist $\dim Y < n$ und somit ist $\varepsilon^*R^+(j \cdot i)_{et*}(R^+i_{et}^*K) \to R^+(j \cdot i)_{sa*}\varepsilon^*(R^+i_{et}^*K)$ ein Isomorphismus. Nach (3) und da $K \to R^+i_{et*}R^+i_{et}^*K$ ein Isomorphismus ist (denn der Träger von $H^q(K)$ ist in Y enthalten für jedes $q \in \mathbb{Z}$), ist $\varepsilon^*R^+j_{et*}K \to R^+j_{sa*}\varepsilon^*K$ ein Isomorphismus. Nach (IV) ist $\varepsilon^*R^+j_{et*}L \to R^+j_{sa*}\varepsilon^*L$ ein Isomorphismus.

ii) Seien $f : X \to S$ eine offene Immersion, wobei X n-dimensional und $f(X)$ dicht in S ist, und F die konstante Garbe auf X_{et} zu einer endlichen abelschen Gruppe. Dann ist $\varepsilon^*R^+f_{et*}F \to R^+f_{sa*}\varepsilon^*F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

OE ist X reduziert. Seien Y der singuläre Ort von X und $i : Y \to X$ und $j : X \smallsetminus Y \to X$ die Inklusionen. Man hat ein ausgezeichnetes Dreieck in $D^+(X_{et})$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr] & & L := R^+j_{et*}R^+j_{et}^*F \arrow[dl] \\ & K \arrow[ul, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

Nach (3) und i) ist $\varepsilon^*R^+f_{et*}L \to R^+f_{sa*}\varepsilon^*L$ ein Isomorphismus. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\varepsilon^*R^+(f \cdot i)_{et*}(R^+i_{et}^*K)$ $\to R^+(f \cdot i)_{sa*}\varepsilon^*(R^+i_{et}^*K)$ ein Isomorphismus. Nach (3) und da $K \to R^+ i_{et*} R^+ i_{et}{}^* K$ ein Isomorphismus ist (denn der Träger von $H^q(K)$ ist in Y enthalten für jedes $q \in \mathbb{Z}$), ist $\varepsilon^* R^+ f_{et*} K \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* K$ ein Isomorphismus.

iii) Seien $f: X \to S$ ein affiner Morphismus, wobei $\dim X = n$, und F eine Torsionsgarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* R^+ f_{et*} F \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Wie im Beweis von (I) ist OE F die konstante Garbe auf X_{et} zu einer endlichen abelschen Gruppe. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & S \end{tikzcd}$$

wobei p projektiv, i eine offene Immersion und $i(X)$ dicht in Y ist. iii) ergibt sich nun aus (1), (2), (III) und ii).

iv) Seien $f: X \to S$ ein Morphismus von Schemata, wobei $\dim X = n$, und F eine Torsionsgarbe auf X_{et}. Dann ist $\varepsilon^* R^+ f_{et*} F \to R^+ f_{sa*} \varepsilon^* F$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Seien $X_1, \ldots, X_r$ affine Zariski-offene Teilmengen von X, die X überdecken. Man hat den Morphismus $g: \coprod_{i=1}^{r} X_i \to X$. iv) folgt aus (4) und iii).

Literatur

[A] S.S. Abhayankar, "Local Analytic Geometry", Academic Press, New York, 1964.

[BE] J. Bochnak, G. Efroymson, Real algebraic geometry and the 17th Hilbert Problem, Math. Ann. 251 (1980), 213-241.

[BS] C. Bănică, O. Stănăsilă, "Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces", J. Wiley, London, 1976.

[BT] H. Behnke, P. Thullen, "Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher", 2. Aufl. Erg. Math. 51, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[C] H. Cartan, Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. math. France 85 (1957), 77-99.

[D] H. Delfs, Kohomologie affiner semialgebraischer Räume, Dissertation, Universität Regensburg, 1980.

[D_1] H. Delfs, The Homotopy Axiom in Semialgebraic Cohomology, preprint Univ. Regensburg, 1984.

[DK] H. Delfs, M. Knebusch, Semialgebraic topology over a real closed field II, Math. Z. 178 (1981), 175-213.

[DK_1] H. Delfs, M. Knebusch, On the homology of algebraic varieties over real closed fields, J. reine angew. Math. 335 (1982), 122-163.

[DK_2] H. Delfs, M. Knebusch, Separation, retractions and homotopy extension in semialgebraic spaces, Pacific J. Math., erscheint demnächst.

[DK_3] H. Delfs, M. Knebusch, "Locally semialgebraic spaces", Lecture Notes in Math., in Vorbereitung.

[DR] L. van den Dries, P. Ribenboim, Lefschetz principle in Galois theory, Queen's Mathematics Preprint, No. 1976-5.

[EGA I*] A. Grothendieck, J. Dieudonné, "Eléments de Géométrie Algébrique I", Grundlehren math. Wiss. 166, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[EGA III] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique III, Publ. Math. IHES 11 (1961).

[EGA IV] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique IV, Publ. Math. IHES 28 (1966) und 32 (1967).

[F] O. Forster, Lokale analytische Geometrie, Vorlesungsausarbeitung, Universität Münster, WS 1975/76.

[G] J. Giraud, "Cohomologie non abélienne", Grundlehren math. Wiss. 179, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1971.

[GR] H. Grauert, R. Remmert, "Theorie der Steinschen Räume", Grundlehren math. Wiss 227, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[H] M. Hervé, "Several complex variables", Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press, 1963.

[Ha] R. Harvey, The theory of hyperfunctions on totally real subsets of a complex manifold with applications to extension problems, Am. J. of math. 91 (1969), 853-873.

[Hu] J.H. Hubbard, On the cohomology of Nash sheaves, Topology 11 (1972), 265-270.

[K] M. Knebusch, Semialgebraische Geometrie, Vorlesung Universität Regensburg, SS 1982.

[K_1] M. Knebusch, Isoalgebraic Geometry: First Steps,"Sêminaire de Thêorie des Nombres", Progress in Mathematics 22, Birkhäuser, 1982.

[K_2] M. Knebusch, An invitation to real spectra, preprint Univ. Regensburg, 1984.

[KK] L. Kaup, B. Kaup, "Holomorphic Functions of Several Variables", Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1983.

[M] G. Meixner, Differentialtopologische Untersuchungen über semialgebraische Mengen und Abbildungen, Dissertation, Universität Regensburg, 1984.

[Mn] C.R.F. Maunder, "Algebraic Topology", Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

[N] R. Narasimhan, "Introduction to the Theory of Analytic Spaces", Lecture Notes in Math. 25, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[R] M. Raynaud, "Anneaux Locaux Hensêliens", Lecture Notes in Math. 169, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[S] J.P. Serre, Exemples de variétés projectives conjugées non homéomorphes, C.R. Acad. Sc. Paris 258 (1964), 4194-4196.

[SGA 1] A. Grothendieck, "Revêtements Etales et Groupe Fondamental", Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, "Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas", Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972, 1973.

[SGA $4\frac{1}{2}$] P. Deligne, "Cohomologie Etale", Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.