

**Die Beiträge von Seifert und Threlfall  
zur dreidimensionalen Topologie**  
(Klaus Volkert, Heidelberg)

*D. Puppe (Heidelberg) zum siebzigsten Geburtstag gewidmet*

## 1. Einleitung

In den Jahren 1930 bis 1938 entfalteten William Threlfall (1888 – 1949) und sein Schüler Herbert Seifert (1907 – 1996) eine rege Aktivität im Bereich der dreidimensionalen Topologie, welche durch das noch heute weitverbreitete „Lehrbuch der Topologie“ (1934) einen gewissen Höhepunkt erreichte. Die von beiden angeregten Entwicklungen stellten einerseits einen bemerkenswerten Neuanfang in der seinerzeit eher stagnierenden dreidimensionalen Topologie dar, dessen wirkliche Tragweite erst fast 50 Jahre später im Gefolge der bekannten Arbeiten von W. Thurston erkannt wurde, andererseits knüpften sie in charakteristischer Weise an Ideen des ausgehenden 19. Jahrhunderts an. Der mathematische Fortschritt stellte sich hier in für ihn durchaus charakteristischer Weise als eine Synthese mehrerer vorhandener Ansätze dar. Nicht beabsichtigt ist hier eine umfassende Darstellung und Würdigung der Arbeiten von Seifert und Threlfall; ich beschränke mich im wesentlichen auf einen Aspekt, nämlich auf die Herausbildung der Theorie der gefaserten Räume (heute Seifert-Mannigfaltigkeiten oder Seifert-gefaserte Mannigfaltigkeiten genannt).

Neben den erwähnten mathematischen Entwicklungen werden im nachfolgenden auch einige neue Informationen zu Leben und Werk dieser beiden Mathematiker geboten, die sich im wesentlichen auf den Nachlaß von H. Seifert stützen. Mein Dank gilt Herrn H. Romberg (Stutensee) für die freundliche Überlassung dieses Nachlasses sowie Herrn D. Puppe (Heidelberg) für seine nunmehr jahrzehnte lange Förderung. Ihm möchte ich diese Arbeit über seinen eigenen akademischen Lehrer anlässlich seines 70. Geburtstages zueignen.<sup>1</sup>

## 2. Leben und Werk

William Richard Maximillian Hugo Threlfall wurde am 31.3.1888 in Dresden geboren. Zu diesem Zeitpunkt befand sich seine Mutter Helene Elizabeth Clara geb. Koch, eine Nichte von Robert Koch, auf der Rückreise von Bagdad nach Cambridge. Diese Reise hing wohl zusammen mit dem Tod ihres Mannes William Threlfall sen. (1863 – 1888), der 1888 als Leiter einer Forschungsexpedition in Diala (Indien) ertrunken war. Threlfalls Vater war Professor der Botanik in Cambridge und entstammte einem alten englischen Adelsgeschlecht. Nach einer kurzen Periode in England wuchs William Threlfall jun., erzogen von seiner Mutter und ihrer beiden ledigen Brüdern Hugo (Kapitän zur See) und Max (Ordinarius an der Bergakademie Freiberg) in Dresden auf, wo er 1898 – 1907 das humanistische Gymnasium besuchte. Nach bestandem Abitur begab er sich auf Auslandsreisen; anschließend studierte er in Jena Chemie, ein Studium, „das ich für den Fall eines notwendig werdenden Gelderwerbes wegen Unsicherheit der akademischen Laufbahn und Abneigung gegen den Lehrerberuf aufgenommen und mit dem Verbandsexamen abgeschlossen habe.“([1]) Es folgten ab WS 1911 auf Anregung des Jenenser Mathematikers Karl Hermann Robert Haussner (1863 – 1948) gut zwei Jahre Mathematikstudium in Göttingen „bei Hilbert“, wie Threlfall gerne hervorhob. Er beschäftigte sich u.a. auf Vorschlag Hilberts mit Logik und mit

<sup>1</sup> Unterstützt haben mich durch Hinweise oder bei der Beschaffung von Dokumenten E. Brieskorn (Bonn), F. Jung (Bruchsal), M. Georgidou (Stuttgart), V. Remmert (Mainz), T. Sauer (Bern), H. Schubert (Düsseldorf), R. Strelbel (Fribourg) und R. Voss (Dresden). Auch ihnen gilt mein Dank. Eine vorläufige Fassung dieses Artikels habe ich im Februar 2000 bei der Tagung „History of Mathematics in the 20<sup>th</sup> Century“ in Oberwolfach vorgestellt.

mathematischen Grundlagenfragen. Bei Kriegsausbruch 1914 wurde Threlfall aufgrund seiner britischen Staatsbürgerschaft interniert; später aber - unter anderem wohl nach Intervention seitens Hilberts (vgl. [6]) - freigelassen. Threlfall nahm dann am Krieg gegen Rußland teil. „1918 – 1927 infolge von Resignation über die Proletarisierung der Hochschule und des öffentlichen Lebens Privatgelehrter und Landwirt auf dem Gute meines Onkels bei Dresden.“ ([1])<sup>2</sup> 1921 – 22 war Threlfall Gasthörer an der Universität Leipzig, wo er sich 1925 immatrikulierte und im selben Jahr mit einer Arbeit über „Flächenteilungen“ promovierte.<sup>3</sup> Ab 1923 nahm Threlfall teil am Dresdner Mathematischen Kolloquium (Kowalewski, Lagally, Treffz u.a.), wo er 1925 erstmals vortrug. Hier hielten u.a. als auswärtige Gäste van der Waerden, Levi und Feigl Vorträge, so daß Threlfall Gelegenheit hatte, sich über aktuelle Entwicklungen in der Topologie zu informieren (vgl. Voss 1997, 3). Die Atmosphäre dieses Kolloquiums<sup>4</sup> mit ihrer offenen, interdisziplinären Orientierung kam sicherlich den vielfältigen Interessen Threlfalls sehr entgegen. Im Jahre 1926 publizierte Threlfall seine erste mathematische Abhandlung, 1927 habilitierte er sich, ermutigt durch den Dresdner angewandten Mathematiker Erich Immanuel Trefftz (1888 – 1937), an der Technischen Hochschule mit einer Arbeit über „Gruppenbilder“ und einem Vortrag über das „Raumproblem“<sup>5</sup>; seine Antrittsrede als Privatdozent hielt Threlfall am 30.1.1931 zum Thema „Die angebliche Grundlagenkrise in der Mathematik“. In Dresden wirkte er als Privatdozent, ab dem 6.6.33 als nichtplanmäßiger a.o. Professor, bis er zum 1.4.1936 an die Universität Halle – Wittenberg versetzt wurde (Voss 1997, 3). Am 1.1.38 wurde Threlfall die Vertretung der durch Siegels Weggang nach Göttingen vakant gewordenen Professur in Frankfurt a.M. übertragen; diese Stelle erhielt er wenig später als Festanstellung. Seine mathematischen Interessen und Schwerpunkte stellte Threlfall 1938 in [1] folgendermaßen dar:

„Mathematisch habe ich im Laufe der Zeit gearbeitet in mathematischer Logik, insbesondere Philosophie der südwestdeutschen Schule, spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, moderne Algebra, Tensoranalysis, Differentialgeometrie, Differentialgleichungen, insbesondere der Mechanik, konforme Abbildung und Tragflügeltheorie – und ich habe über die meisten dieser Gebiete Vorlesungen gehalten.“ Hieran fällt auf, daß Threlfall sein späteres Hauptarbeitsgebiet, die wie wir heute sagen würden geometrische oder algebraische Topologie, völlig unerwähnt läßt.

Den Krieg verbrachte Threlfall in Ausübung seiner Professur in Frankfurt und Braunschweig, wo er sich in der vorlesungsfreien Zeit als Gast an der Luftfahrt-Forschungsanstalt Hermann Göring aufhielt. Dort arbeitete sein Freund, Schüler und Koautor H. Seifert als

<sup>2</sup> In seiner Grabrede auf Threlfall ([3]) formulierte Süß: „T. hat durch Familientradition und alten soliden Reichtum das heute sehr seltene Glück genossen, während der entscheidenden Jahre seines Lebens in Freiheit arbeiten zu können. Er konnte daher seine ganze Zeit und Kraft den Studien widmen und hat sich dabei eine Weite des Blickes und einen Umfang der Bildung erworben, wie sie dem gehetzten Berufsmenschen im allgemeinen versagt ist.“ Threlfall war allerdings ab 1927 als wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für reine Mathematik (Inhaber: G. Kowalewski) an der TH Dresden tätig (Voss 1997, 3).

<sup>3</sup> Betreut wurde die Threlfallsche Dissertation von Friedrich W. D. Levi (1888 – 1966), der in Leipzig als außerordentlicher Professor von 1923 bis 1935 wirkte und 1929 ein Buch über „Geometrische Konfigurationen“ veröffentlichte, in welchem er eine präzise und vollständige Behandlung des Klassifikationsproblems für geschlossene Flächen gab. Als seine wichtigsten akademischen Lehrer nennt Threlfall in dem der Dissertation beigefügten Lebenslauf Herglotz, Hölder, Levi, Lichtenstein, Schnee in Leipzig und Linck, Haussner, Hilbert, Landau, Hölder, Lichtenstein, Herglotz, Schnee allgemein.

<sup>4</sup> Vgl. Voss 1997; neben Themen aus den Bereichen angewandte und reine Mathematik kamen auch Grundlagenprobleme und philosophische Fragen +zur Sprache. Threlfall beteiligte sich auch an der in Dresden ansässigen „Isis“, welche dem Gedanken der Interdisziplinarität besonders verpflichtet war.

<sup>5</sup> Das Manuskript dieses Vortrages (vom 27.7.27) sowie der Kolloquiumsvorträge Threlfalls über „Unendliche diskrete Gruppen“ (21.7.27) und über „Dreidimensionale sphärische Geometrie“ (20.11.30) finden sich im Nachlaß von Seifert. Der Habilitationsvortrag sowie der Vortrag über sphärische Geometrie, die Einblicke in die Vorgeschichte der frühen Publikationen von Seifert und Threlfall über Topologie bieten, wurden von Herrn D. Steinmetz (Heidelberg) transskribiert; sie werden demnächst in den „Nachrichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften“, welche dieses Vorhabens freundlicherweise finanziell unterstützte, veröffentlicht.

Abteilungsleiter im Forschungsvorhaben „Gasdynamik“, welches sich unter der Leitung von A. Busemann (1901 – 1986) hauptsächlich mit Fragen des Überschallfluges beschäftigte.<sup>6</sup> Am 22.2.1944 bescheinigte W. Süss in seiner Eigenschaft als Leiter des Arbeitskreises für Mathematik des Reichsforschungsrates Seifert und Threlfall: Sie „haben einen kriegswichtigen Forschungsauftrag des Reichsforschungsrates zu bearbeiten, welcher sie für einige Zeit zu ungestörter Arbeit zwingt. Die Umstände an Orten häufiger Fliegeralarme haben erfahrungsgemäß die dringenden Arbeiten stark verzögert, so daß ich die Professoren ersucht habe, sich tunlichst bald eine Arbeitsstätte zu suchen, welche die für den raschen Fortgang der Arbeiten notwendigen Voraussetzungen an Ruhe sichert.“ ([2]) Das kriegswichtige Vorhaben war vermutlich eine Monographie zur hypergeometrischen Differentialgleichung, dessen Manuskript sich in der Bibliothek der Fakultät für Mathematik der Universität Heidelberg findet. Eng mit diesen Forschungen zusammen hingen die Veröffentlichungen „Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen“ (1942) und „Die hypergeometrischen Differentialgleichungen der Gasdynamik“ (1947). Seifert hatte schon in Braunschweig Vorlesungen (für Busemann, Threlfall und zwei, drei weitere Zuhörer) über diesen Gegenstand gehalten. Die ruhige Arbeitsstätte fanden Seifert und Threlfall auf dem von Süss gerade erworbenen Lorenzenhof<sup>7</sup>, dem heutigen Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach. Dort erlebten beide das Kriegsende. Nach dem Krieg wurde Threlfall als Nachfolger des aus politischen Gründen entlassenen Udo Wegner (1902 – 1989) in Heidelberg Ordinarius<sup>8</sup>; er starb am 4.4.1949 in Oberwolfach bei einer Mathematikertagung, wo er beerdigt wurde. Die Grabrede hielt W. Süss (1895 – 1958), der sich zur Person Threlfalls so äußerte:

„Auf alle, die ihm näher standen, übte er einen grossen Einfluss aus durch seine Herzensgüte und seine Treue Menschen und Überzeugungen gegenüber, durch seine unbedingte Wahrheitsliebe und rücksichtslose Offenheit, mit der er seine Überzeugung vertrat, und durch die Unbestechlichkeit, mit der er das Echte und Gute zu erkennen wusste. Besonders in den Jahren, als die Begriffe von Recht und Unrecht ins Wanken gerieten und es üblich wurde, den Geiste der Zeit zu opfern, ist er vielen ein Führer und Vorbild gewesen.“ ([3])

Weniger positiv äußert sich V. Klemperer in seinem Tagebuch über Threlfall, wo es unter anderem heißt:

„Threlfall, ein Mann in den Vierzigern, Kopf gesenkt, buschiges Haar um eine Glatze herum, Gesicht rot, ziemlich alkoholisch. Von Geburt Engländer. „Ich könnte mit meinem Gelde in England gut leben und habe hier die Dachkammer.“ (Gusti Wiegandt sagte, die Dachkammer sei ein eigenes Haus, er sei Junggeselle und trinke wahrscheinlich gerne, sei aber sehr angesehener Mathematiker.) „Ich halte es nicht sechs Wochen unter Engländern aus, muß unter Deutschen leben. Nach dem Kriege hatte ich mit allem abgeschlossen, wollte mich auf dem Gut eines Onkels vergraben. Trefftz holte mich zur Hochschule. Ich war Stahlhelmer, wurde überzeugter Nationalsozialist, war Antisemit...“ – „Würden Sie jetzt noch die NSDAP wählen?“ – Pause, Grinsen, dann: „Es wird ja nicht mehr gewählt.“ (Klemperer II, 24)<sup>9</sup>

---

<sup>6</sup> Neben Seifert befand sich auch H. Wendt (\*1913) ab 1937 in Braunschweig, mit W. W. Hantzsch (1913 – 1944) der wichtigste Schüler Threlfalls und Seiferts. Hantzsch arbeitete aber nur kurze Zeit vor seinem Tod bei einem Fliegerangriff in Braunschweig; Wendt kam nach dem Krieg nach Heidelberg, wo er 1947 zum außerordentlichen Professor ernannt wurde. Nach einem kurzen Intermezzo in Dresden wurde er schließlich 1948 Professor für angewandte Mathematik in Bonn.

<sup>7</sup> Laut Tagebuch kamen sie dort von Freiburg herkommend am 13.9.44 an, wo sie von H. Behnke empfangen wurden.

<sup>8</sup> Vgl. hierzu [7].

<sup>9</sup> Die hier von Klemperer angedeutete politische Entwicklung Threlfalls läßt sich aus den anderen mir zugänglichen Quellen nicht bestätigen. Allerdings hatte Threlfall wohl eine Vorliebe für drastische und provokante Formulierungen, weshalb hier vielleicht ein Mißverständnis seitens Klemperer vorliegt. Diese Interpretation wird von H. Schubert unterstützt (briefliche Mitteilung vom 24.3.2000), der u.a. schreibt: „Threlfall konnte sehr ironisch sein und Herr Klemperer ist wahrscheinlich Opfer dieser von ihm nicht erkannten Ironie.“ Schubert charakterisiert Threlfalls Haltung als „aristokratisch“: „Threlfall mokierte sich darüber, daß

Zumindest äußerlich ruhig und geradlinig verlief das Leben<sup>10</sup> Karl Johann Herbert Seiferts. Geboren 1907 in Bernsdorf, aufgewachsen in Bautzen, wo sein Vater in der Justizverwaltung tätig war, schrieb sich Seifert im SS 1926 an der Technischen Hochschule Dresden ein; 1928/29 hielt sich Seifert zwei Semester lang in Göttingen auf. Er promovierte am 25.7.1930 in Dresden zum Dr. tech. mit der Arbeit „Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume“, dann zwei Jahre später (3.3.32) in Leipzig bei van der Waerden mit „Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume“. Die Habilitation erfolgte wieder in Dresden mit den „Verschlingungsinvarianten“. Im WS 1834/35 und im nachfolgenden SS verwaltete Seifert den vakanten Lehrstuhl von L. Lichtenstein (1878-1933) in Leipzig; ein erster Ruf nach Greifswald erging 1935 an Seifert, dem dieser allerdings nicht folgte. Noch im Herbst des gleichen Jahres wurde Seifert durch das Reichministerium aufgefordert, das durch Heinrich Liebmanns (1874 – 1939) erzwungenes Ausscheiden (vgl. [7]) freigewordene Ordinariat an der Universität Heidelberg zu vertreten. Die definitive Ernennung zum persönlichen Ordinarius verzögerte sich, hauptsächlich wohl aufgrund des Widerstandes seitens des nationalsozialistischen Dozentenbundes, bis 1937. Wie bereits oben bemerkt verbrachte Seifert den Krieg hauptsächlich in Braunschweig, dann in Oberwolfach. Ende 1945 nahm er seine Professur in Heidelberg wieder auf, wo er bis zu seiner Emeritierung 1975 lehrte. Herbert Seifert ist am 1.10.96 in Heidelberg gestorben.

Die oben erwähnte erste mathematische Arbeit, die Threlfall veröffentlichte, beschäftigte sich mit bedingt konvergenten Reihen und ist für unsere Zwecke hier uninteressant (Threlfall 1926). Wichtiger für uns ist die in Stil und Inhalt deutlich an die Dissertation anknüpfende Dresdner Habilitationsschrift „Gruppenbilder“, welche dort 1927 angenommen, aber erst 1932 gedruckt wurde. Aus heutiger Sicht würde man deren Inhalt überwiegend der kombinatorischen Gruppentheorie zuordnen; es geht hauptsächlich darum, über Erzeugende und Relationen definierte Gruppen geometrisch zu realisieren<sup>11</sup> und über diesen Umweg in bestimmten Fällen das Isomorphieproblem für solcherart definierte Gruppen zu klären. Dabei kommen einerseits das Klassifikationsproblem der geschlossenen Flächen zur Sprache, andererseits aber auch die Platonischen Gruppen. Wichtig für die spätere Entwicklung Threlfalls sollte der Zugang zu den geschlossenen Flächen über endlich erzeugte eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei operierende Bewegungsgruppen werden. Letztere gehören entweder zur sphärischen Geometrie – dann erhält man die Sphäre -, zur Euklidischen Ebene (Fall des Torus) oder zur hyperbolischen Ebene (Flächen höheren Geschlechtes) [vgl. Threlfall 1932, 31 und 34].<sup>12</sup> Die Verallgemeinerung dieser Idee auf drei Dimensionen sollte

---

„die Leute mit Mathematik bloß Geld verdienen wollen“.“

Antibritische Äußerungen Threlfalls finden sich schon in dessen Postkarten und Briefen an Hilbert aus der zweiten Hälfte des Jahres 1914. Zu Threlfalls und Seiferts Haltung im III. Reich vgl. man auch Segal 1999, wo man unter anderem eine Darstellung der Affäre „Blaschke“ (Auseinandersetzung Seifert/Threlfall mit dem Herausgeber Blaschke um das Kepler-Zitat als Vorwort des Buches über Morse – Theorie[1938]) findet (Segal 1999, 855 – 857)).

<sup>10</sup> Zu Seiferts Leben vgl. man auch Puppe 1997 oder Puppe 1999. Die folgenden Angaben stützen sich teilweise auf eine eidesstattliche Erklärung Seiferts [6].

<sup>11</sup> Die wichtigsten Möglichkeiten hierzu sind das Dycksche und das Dehnsche Gruppenbild (letzteres ist ja auch heute noch sehr gebräuchlich). Zur Geschichte der kombinatorischen Gruppentheorie vgl. man Chandler/Magnus 1982, welche allerdings keinen Hinweis auf Threlfalls Schrift geben. Erwähnung findet diese bei Coxeter im Zusammenhang mit regulären Polytopen; Coxeter bemerkt, daß Threlfall die Idee gehabt habe, Kepler – Poincaré Polyeder unter dem Gesichtspunkt Riemannscher Flächen zu studieren und daß er ausführlich ein konkretes Beispiel diskutiert habe (Coxeter 1973, 116).

<sup>12</sup> Dieses Ergebnis wird von Threlfall als allgemein bekannt präsentiert ohne Verweis auf einen entsprechenden Beweis. Die Idee selbst findet sich schon bei Poincaré 1882; man muß allerdings anmerken, daß das Klassifikationsproblem facettenreich war und in voller Allgemeinheit erst im Laufe der Zeit gelöst werden konnte (vgl. Volkert 1996, Kap. 2). Der wesentliche Unterschied zum dreidimensionalen Fall liegt darin, daß man alle geschlossenen orientierbaren Flächen aus Fundamentalbereichen endlich erzeugter diskontinuierlicher fixpunktloser Bewegungsgruppen erhält; für geschlossene orientierbare 3- Mannigfaltigkeiten ist dies aber nicht der Fall (vgl. 5. unten).

den Ausgangspunkt liefern für die Theorie, die schließlich in die Betrachtung der Seifert-gefaserten Räume mündete.

Die bemerkenswert produktive Zusammenarbeit von Threlfall und Seifert begann vermutlich im SS 1928, als der letztere eine Topologievorlesung des gerade ernannten Privatdozenten hörte.<sup>13</sup> Leider wissen wir über die näheren Umstände nichts, fest steht jedenfalls, daß Seifert 1930 ein Zimmer im Hause Threlfall in Dresden bezog<sup>14</sup> und daß das Manuskript der ersten gemeinsamen Arbeit „Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes“ am 8.3.1930 bei den Mathematischen Annalen eingereicht wurde (siehe 3. unten). Das bekannteste und sicherlich mit Abstand wichtigste Resultat dieser gemeinsamen Arbeit ist das 1934 erschienene „Lehrbuch der Topologie“, das ein Klassiker wurde und heute noch als wichtiges Nachschlagewerk im Bereich der dreidimensionalen Topologie dient.<sup>15</sup> Daneben entstanden mehrere gemeinsame Aufsätze sowie ein weiteres Buch, die „Variationsrechnung im Großen. Morsesche Theorie“ (vgl. das am Schluß dieses Aufsatzes abgedruckte Verzeichnis der Schriften von Threlfall und Seifert). Das Buchprojekt aus den Kriegstagen zur hypergeometrischen Differentialgleichung konnte nicht verwirklicht werden. Über die Art der Zusammenarbeit der beiden so unterschiedlichen Autoren kann man mangels Quellen fast nur spekulieren. In einem Brief Threlfalls vom 27. März 1933 an F. Hausdorff, das „Lehrbuch“ betreffend, schreibt ersterer allerdings:

„Für die Reklame, die Sie für uns machen wollen, sind wir Ihnen sehr verbunden. Bevorzugen Sie aber dabei, bitte, Herrn Seifert und schreiben Sie gerechterweise seinen Namen an die Wandtafel, da auf ihn der betreffende Gedanke wie die meisten zurückgehen. Auch kann er nicht als Kavalier zierlich von seinen Revenuen nach dem Grundsatz leben bene vixit bene latuuit, und es wäre mir leid um die deutschen Universitäten, wenn dieser Mensch und Gelehrte ihnen entginge. Übrigens ist er jetzt vertretungsweise Assistent bei Herrn Prof. van der Waerden.“

Zur Motivation seiner Beschäftigung mit der dreidimensionalen Topologie bemerkt Threlfall in [1]: „Meine Veröffentlichungen sind, ... , von zwei Gedanken ausgegangen: I. von dem kosmologischen Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie, bei gegebener Metrik die mit dieser Metrik verträglichen Zusammenhangsverhältnisse der Welt im Grossen zu ermitteln. Dies Problem, das die Verallgemeinerung der  $\text{curvatura integra}$  von zwei auf drei oder vier Dimensionen ausmacht, ist freilich von phantastischer Schwierigkeit, ... Ich habe mich daher zuerst mit dem bekannten topologischen Problem, also mit dem Homöomorphieproblem  $n$  – dimensional, besonders dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten befasst, sodann mit dem Raumformenproblem. ...

II. führt auf dasselbe topologische Problem bekanntlich die Frage nach dem qualitativen Verlaufe der Lösungen von Differentialgleichungen; die  $n$  – dimensional

---

<sup>13</sup> Threlfall las in diesem Semester u.a. „Topologie II“ (vermutlich eine Fortsetzung der „Einführung in die Topologie“, die B. Schilling im SS 1927 in Dresden angeboten hatte) und „Gruppenbilder“ (Briefliche Mitteilung von Frau Voss vom 22.2.2000 auf der Basis Dresdner Vorlesungsverzeichnisse).

Publikationen mit zwei oder mehr Autoren waren in jener Zeit in der Mathematik ziemlich selten. Eine Untersuchung von Richardson zeigte beispielsweise, daß im Bereich der reinen Mathematik in den Jahren 1939 bis 1957 93% der Publikationen Einzelarbeiten waren (vgl. Heintz 2000, 141 n 11). Ein im 19. Jh. aktives Autorenpaar (soweit ich weiß das einzige) war übrigens Biot/Bouquet in Frankreich.

<sup>14</sup> Nordstraße 1; Threlfalls Mutter und seine beiden Onkel wohnten ebenfalls dort. Mit dem Umzug Seiferts nach Dresden beginnt im Januar 1930 das im Nachlaß erhaltene 22bändige „Tagebuch von H. und W.“, das von Threlfall mit Akribie bis zu seinem Tode geführt wurde.

<sup>15</sup> Man vgl. etwa die Einschätzung, welche Joan Birman im Vorwort der 1980 veranstalteten englischen Ausgabe dieses Buches gibt: „In spite of the fact that with the passage of time our understanding of the subject has changed enormously [...] the book continues to be of interest for its geometric insight and leisurely, careful presentation with its many beautiful examples which convey so well to the student the flavor of the subject.“ (Birman 1980, IX).

Mannigfaltigkeiten treten da z. B. als Energiehyperflächen der Phasenräume auf und sind von den Bahnkurven freilich im weiteren Sinne als oben erwähnt gefasert.“ ([1])

Bemerkenswert an Threlfalls Ausführungen ist, daß er sich ausschließlich auf physikalisch relevante Probleme beruft, war doch das Homöomorphieproblem zumindest bis Anfang der 30er Jahre das topologische Problem schlechthin.<sup>16</sup> Vielleicht darf man hier ein Zugeständnis an den Zeitgeist (1938!) sehen, der die angewandte Mathematik höher schätzte als die reine.

Jedenfalls ist das Programm klar: Man nehme geeignete Untergruppen der eigentlichen Bewegungen des sphärischen, euklidischen oder hyperbolischen Raumes und untersuche die geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeiten, welche durch die Randidentifikationen auf deren Fundamentalbereich entstehen. In dieser Allgemeinheit ist die Aufgabe auch heute noch ungelöst; es gelang aber Seifert und Threlfall in ihren gemeinsamen Arbeiten von 1931 und 1933, zumindest den sphärischen Fall weitgehend zu klären.

### 3. Zur Situation der Topologie um 1930 herum

Es ist an dieser Stelle sinnvoll, kurz auf die Situation der Topologie Ende der 20er Jahre des vorigen Jahrhunderts einzugehen. Bekanntlich hat das Gebiet, das wir heute Topologie nennen, historisch gesehen viele Wurzeln. Im Zusammenhang mit unseren Autoren geht es vor allem um jenen Entwicklungsstrang, den man „Theorie der Mannigfaltigkeiten“ nennen könnte. Hierbei war die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten das zentrale Problem, als Paradigma galt die Klassifikation der geschlossenen Flächen. Ganz wesentliche Impulse gingen für dieses Gebiet von der „Analysis situs“-Reihe (1892 – 1904) von H. Poincaré aus, in der dieser alle zur Klassifikation wichtigen Invarianten (Fundamentalgruppe, Betti- und Torsionszahlen) behandelte und viele Beispiele von Mannigfaltigkeiten – hauptsächlich dreidimensionale – konstruierte. Allerdings wurde mit der Arbeit von J. W. Alexander (1919) klar, daß schon bei 3-Mannigfaltigkeiten die stärkste bis dahin bekannte Invariante, die Fundamentalgruppe, zur Klassifikation nicht ausreicht. Alexander bewies nämlich die von H. Tietze bereits 1908 geäußerte Vermutung, daß es nicht-homöomorphe geschlossene zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten gibt, deren Fundamentalgruppen isomorph sind. Es handelt sich dabei um die Linsenräume  $L(5,1)$  und  $L(5,2)$ , welche auch im Werk von Seifert und Threlfall eine wichtige Rolle spielen sollten.<sup>17</sup> Das allgemeine Klassifikationsproblem für 3-Mannigfaltigkeiten trat nach diesem negativen Ergebnis allmählich zugunsten der zugänglicher erscheinenden Poincaré-Vermutung in den Hintergrund: Poincaré hatte seine letzte Arbeit über Topologie (1904) mit der Frage abgeschlossen, ob die 3-Sphäre bis auf Homöomorphie die einzige geschlossene und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe sei – ein Problem, das bis heute ungelöst ist und das bei Seifert und Threlfall eine wichtige Rolle spielen sollte.

Bis in die 20er Jahre hinein hatte die Theorie der Mannigfaltigkeiten hauptsächlich mit kombinatorischen Methoden gearbeitet. Besonders dezidiert äußerten sich M. Dehn und P. Heegard in ihrem gemeinsamen Artikel für die „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ (1907) zu dieser Methode: „Durch die Entwicklung der ersten sieben Nummern dieses Abschnittes ist die Analysis situs dargestellt als ein durch seine anschauliche Bedeutung ausgezeichneter Teil der Kombinatorik.“ (Dehn-Heegard 1907, 170) In den 20er Jahren setzte sich im Widerspruch hierzu immer mehr die Ansicht durch, daß Mannigfaltigkeiten als kontinuierliche Gebilde zu gelten haben; hierbei spielten die Fortschritte der mengentheoretischen Topologie wie sie vor allem mit dem Namen von Felix Hausdorff verknüpft sind, eine wichtige Rolle. Es stellte sich dann aber das Problem, zu

<sup>16</sup> Vgl. Volkert 1996. Überlegungen zum Aussehen des Universums im Großen wurden wohl erstmals von Schwarzschild 1899 abgestellt.

<sup>17</sup> Unter anderem führten sie die heute gängige Bezeichnung „Linsenraum“ ein; siehe unten.

zeigen, daß kontinuierliche Mannigfaltigkeiten tatsächlich eine kombinatorische Struktur zulassen. 1925 konnte T. Radó beweisen, daß dies für Flächen zutreffend ist; die analoge Frage für 3-Mannigfaltigkeiten blieb bis nach dem Zweiten Weltkrieg offen.<sup>18</sup> Eng mit dem genannten Problem hängt die sogenannte Hauptvermutung (H. Kneser 1926) zusammen: Sind zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten stets auch kombinatorisch äquivalent? Erst wenn man diese beiden Fragen positiv beantwortet hat, kann man mit Fug und Recht davon ausgehen, daß der kontinuierliche Gesichtspunkt weitgehend mit dem kombinatorischen übereinstimmt. Gegen Ende der 20er Jahre setzte sich nun angesichts der genannten Schwierigkeiten die Einsicht durch, daß man sich von der kombinatorischen Sichtweise lösen müsse. In diesem Sinne äußerte van der Waerden auf der DMV-Sitzung in Prag (1929):

„Ich glaube, man kann jetzt mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß die Schwierigkeiten aller dieser Untersuchungen so groß ist und bleiben wird, daß es auf jeden Fall den Vorzug verdient, die gewünschten Invarianzeigenschaften der Homologiegruppen, der Wegegruppe usw. direkt, ohne den Umweg über den kombinatorischen Äquivalenz- und Invarianzbegriff, also nach der méthode mixte zu beweisen.“ (Van der Waerden 1930, 127) Wie wir sehen werden, gelang es Seifert und Threlfall zu der geschilderten methodologischen Dichotomie eine interessante und erfolgsversprechende Alternative aufzuzeigen.

Ende der 20er Jahre setzte die sogenannte Algebraisierung der Topologie allmählich ein – ausgehend einerseits von dem Kreis um E. Noether (hier sind vor allem H. Hopf und P. Alexandroff<sup>19</sup> zu nennen), andererseits von L. Vietoris. Diese veränderte nachhaltig das Anlitz der Topologie und führte zu ganzen neuen Forschungsprogrammen (man denke etwa an die Kohomologietheorien, die homologische Algebra oder die Kategorientheorie). Für die Theorie der Mannigfaltigkeiten und ihr zentrales Anliegen, die Klassifikation, brachte die Algebraisierung zuerst einmal kaum substantiellen Fortschritt, weshalb wir hier auf sie nicht näher eingehen müssen.<sup>20</sup> In den Arbeiten von Seifert und Threlfall ist die neue Sichtweise durchaus präsent, deutlich etwa in der Behandlung der Homologietheorie im „Lehrbuch“.

Der Ansatz von Seifert und Threlfall läßt sich ansatzweise zurück verfolgen bis ins Werk von H. Poincaré. Bereits in seiner Note von 1892 und ausführlich dann in seiner großen Arbeit „Analysis situs“ (1895) hatte Poincaré geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten durch Identifikationen auf den Randflächen eines (ausgefüllten) Würfels hergestellt. Das einfachste Beispiel hierfür ist der 3-Torus. Es entsteht, wenn man die gegenüberliegenden Quadrate des Einheitswürfels gemäß den Abbildungsvorschriften

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\square (x + 1, y, z) \\ (x, y, z) &\square (x, y + 1, z) \\ (x, y, z) &\square (x, y, z + 1) \end{aligned}$$

miteinander identifiziert. Die von diesen Translationen erzeugte Untergruppe der Isometriegruppe des dreidimensionalen Euklidischen Raumes ist isomorph der Fundamentalgruppe der entstehenden Mannigfaltigkeit.<sup>21</sup> Poincaré verallgemeinerte unverzüglich seine Vorgehensweise, indem er nicht nur Isometrien zur Identifikation heranzog sondern allgemeiner geeignete affine Abbildungen.<sup>22</sup> Allerdings bleibt Poincaré's Vorgehen insofern unsystematisch, als er keinerlei Versuch unternimmt, etwa alle

<sup>18</sup> Moise zeigte 1952, daß 3-Mannigfaltigkeiten stets triangulierbar sind und hier die Hauptvermutung gilt; in höheren Dimensionen ist beides nicht mehr richtig.

<sup>19</sup> Dieser prägte übrigens 1932 im Anhang zur „Anschaulichen Geometrie“ von D. Hilbert und S. Cohn-Vossen die heute noch gängige Bezeichnung „algebraische Topologie“.

<sup>20</sup> Zur Algebraisierung vgl. man Volkert 1996, Kap. 6 oder James 1999.

<sup>21</sup> Diese ist also isomorph  $Z \times Z \times Z$ . Poincaré wurde vermutlich durch seine Betrachtungen zu Kleinschen Funktionen – modern gesprochen sind das automorphe Funktionen bezüglich  $PSL(2, C)$  – zur Betrachtung der Würfelmannigfaltigkeiten geführt; vgl. Volkert 1998 sowie Sarkaria 1999.

<sup>22</sup> Das wichtigste Beispiel hierfür liefert die Beispielgruppe sechs bei Poincaré; diese heute gelegentlich Würfelmannigfaltigkeiten genannten Beispiele wurden in jüngster Zeit von Sarkaria eingehend untersucht und klassifiziert (vgl. Sarkaria 1996, 256f).

Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren, welche durch Untergruppen der Isometriegruppe des dreidimensionalen Raumes entstehen.<sup>23</sup>

Poincaré war sich anscheinend nicht bewußt, daß sein Ansatz eng mit einem Problem zusammenhing, welches in der zeitgenössischen Geometrie diskutiert wurde: nämlich mit dem sogenannten Klein-Cliffordschen-Raumproblem. Dieses geht auf Klein und Clifford zurück und wurde von S. Lie und vor allem von W. Killing 1891/93 weiter präzisiert. Die ursprüngliche Frage ging dahin, geschlossene Räume zu finden, welche lokal isometrisch einem der drei Räume der klassischen Geometrien (Euklidisch, hyperbolisch, elliptisch) sind. Es stellte sich heraus, daß man diese sogenannten Raumformen erhalten kann als Fundamentalbereiche von geeigneten Untergruppen der Isometriegruppen der fraglichen Geometrien. Ein Vergleich der Arbeiten Killings mit jenen von Poincaré zeigt allerdings auch, daß bei ersterem das Interesse an der Untersuchung der entstehenden Mannigfaltigkeiten eher gering war; so führt Killing nur im Falle des 3-Torus die Identifikationen überhaupt aus, betrachtet alle anderen Fälle hingegen als Unterstrukturen der geometrische Räume (also als sogenannte „Raumteilungen“). Bis in die 1920er Jahre blieb es dann still um das Raumproblem; 1926 veröffentlichte H. Hopf eine Abhandlung, in der auf das Raumproblem wieder zu sprechen kam und in der er wesentliche Ergebnisse von Seifert und Threlfall vorwegnahm. Ein Vergleich der Arbeit von Hopf mit derjenigen von Seifert und Threlfall ist sehr instruktiv: Es zeigt sich, daß Hopf das Problem weitgehend algebraisch angeht, seine Lösung ist elegant und knapp. Seifert und Threlfall hingegen arbeiten überwiegend geometrisch, was ihre Vorgehensweise umständlich und schwerfällig erscheinen läßt. Allerdings – und dies darf man nicht übersehen – erhalten sie auch konkretere und weitergehende Resultate als Hopf. Auf ihre Arbeiten möchte ich jetzt näher eingehen.

#### **4. Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes**

Das Programm, das Threlfall und Seifert in den beiden, 1931 bzw. 1933 erschienenen Arbeiten des obigen Titels verfolgen, ist klar: Man nehme die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien der  $S^3$  - modern gesprochen ist das die Gruppe  $SO(4)$  - und suche darin nach endlichen (allgemeiner: eigentlich diskontinuierlich und) fixpunktfrei operierenden Untergruppen. Weiterhin betrachte man den zugehörigen Fundamentalbereich<sup>24</sup> und untersuche die geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten, welche aus den Fundamentalbereichen durch die von der Gruppe induzierten Randidentifikationen entstehen. Das Problem hat also mindestens zwei Aspekte: einen algebraisch – gruppentheoretischen, die Bestimmung der (endlichen) Untergruppen nämlich, und einen geometrisch – topologischen, die Untersuchung der Fundamentalbereiche und der zugehörigen Mannigfaltigkeiten. Verknüpft werden beide durch die Begriffe Fundamentalgruppe und Überlagerung: die fragliche endliche Gruppe ist ja Decktransformationsgruppe der universellen Überlagerung  $S^3$  der Mannigfaltigkeit und damit isomorph deren Fundamentalgruppe. Im folgenden werden wir diese beiden Aspekte nebst ihrer Vorgeschichte näher betrachten. Schließlich stellt sich

<sup>23</sup> Dieses Problem wurde 1935 von Hantzsche und Wendt gelöst und in der Arbeit Hantzsche/Wendt 1936 verallgemeinert. Vorarbeiten hierzu gab es von L. Bieberbach (1911 und 1912).

<sup>24</sup> Threlfall und Seifert sprechen in der Tradition von Kleins Ikosaederbuch (1884), das im deutschsprachigen Raum die Terminologie im Bereich Gruppen und Geometrie lange Zeit bestimmte, von Diskontinuitätsbereichen. Eine weitere auch von unseren Autoren gelegentlich zitierte Quelle für den genannten Bereich war Steinitz' Enzyklopädieartikel über „Polyeder und Raumteilungen“ (Steinitz 1916)..

Die Existenz des Fundamentalbereiches wird durch die Voraussetzungen der Endlichkeit bzw. der eigentlichen Diskontinuität garantiert; die Fixpunktfreiheit benötigt man, für die Isomorphie zwischen Decktransformationsgruppe und Fundamentalgruppe. Es gibt allerdings später dann bei Seifert und Threlfall weiterführende Überlegungen zum fixpunkthaltigen Fall (vgl. Threlfall – Seifert 1933, 578 – 583), die zeigen, daß sich hierbei für die  $S^3$  nichts neues ergibt.

allgemein noch die Frage nach der Tragweite der gewählten Vorgehensweise: Läßt sich so jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit erhalten?

#### 4.1 Die Isometriegruppe der 3-Sphäre und ihre Untergruppen

Die Idee, Geometrie und Gruppentheorie zusammenzubringen, ist eine der fundamentalsten und fruchtbarsten mathematischen Ideen, welche das 19. Jh. hervorgebracht hat. Entsprechend schwierig ist es, deren Geschichte herauszuarbeiten. Ich will mich deshalb hier auf einige wenige Hinweise beschränken.<sup>25</sup>

Bahnbrechend für unser Thema war die Arbeit „Mémoire sur les groupes de mouvements“ von C. Jordan aus dem Jahre 1869, welche man auf dem Hintergrund der Kristallographie sehen sollte. Darin ermittelte Jordan 174 Typen<sup>26</sup> von Untergruppen von  $\text{Isom}^+(E^3)$  – also der Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien des dreidimensionalen Euklidischen Raumes  $E^3$  – darunter als endliche Untergruppen die endlichen zyklischen Gruppen, die Diedergruppen sowie die drei Symmetriegruppen der platonischen Körper.<sup>27</sup> Sein wesentliches methodisches Hilfsmittel war die Tatsache, daß jede orientierungserhaltende Isometrie des  $E^3$  äquivalent ist einer Translation, einer Rotation oder einer Schraubung, ein Ergebnis, das mindestens bis Euler zurückreicht. Ordnet man den Schraubungen mit einem festem Drehzentrum ihren Rotationsanteil zu, so erhält man einen Homomorphismus einer Untergruppe von  $\text{Isom}^+(E^3)$  in  $\text{SO}(3)$ . Letztlich erlangt man so auch Kenntnis von den Untergruppen dieser klassischen Gruppe, also von  $\text{Isom}^+(S^2)$ . Entsprechenden Fragen für die hyperbolische Ebene und den hyperbolischen Raum ging H. Poincaré im Rahmen seiner Arbeiten zu automorphen Funktionen – er sprach von Fuchsschen und Kleinschen Funktionen – zu Beginn der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts an.

Von besonderer Wichtigkeit für Seifert und Threlfall war die Arbeit „Sur les substitutions orthogonales et sur les divisions régulières de l'espace“ von E. Goursat (1858 - 1936)<sup>28</sup> aus dem Jahre 1889. Darin setzte sich dieser das Ziel, die Untergruppen von  $\text{SO}(4)$  – also anders gesagt von  $\text{Isom}^+(S^3)$  – zu bestimmen; fünf dieser endlichen Untergruppen führen in der bekannten Weise auf Raumteilungen der  $S^3$  und damit auf die sechs regulären vierdimensionalen Polytope im  $E^4$ . Um dieses Problem zu lösen verschaffte sich Goursat modern gesprochen einen Homomorphismus

$$\text{SO}(3) \times \text{SO}(3) \rightarrow \text{PSO}(4).$$

Da man die endlichen Untergruppen von  $\text{SO}(3)$  kannte, das sind ja gerade die endlichen zyklischen und die Diedergruppen sowie die drei Symmetriegruppen der platonischen Körper, liegt es nahe, endliche Untergruppen von  $\text{SO}(4)$  dadurch zu gewinnen, daß man endliche Gruppen in den Faktoren miteinander kombiniert. Es stellt sich somit ein gruppentheoretisches Problem: Wie hängen die Untergruppen eines direkten Produktes zusammen mit den Untergruppen seiner Faktoren? Dieses Problem (von unseren Autoren „Gruppenpaarung“ genannt)<sup>29</sup> wird von Threlfall und Seifert 1931 gelöst: Ist  $G = H \times K$  und sind  $h, k$  Normalteiler von  $H$  bzw.  $K$ , so ist  $h \times k$  eine Untergruppe von  $H \times K$ , falls  $H/h \cong$

<sup>25</sup> Zur Entwicklung der Gruppentheorie kann man Wussings Klassiker heranziehen; detailliert auf das Thema Geometrie und Gruppentheorie geht Scholz 1989 am Beispiel der Kristallographie ein. Einen knappen Überblick kann man sich bei Scholz 1990, 307 - 309 verschaffen.

<sup>26</sup> Zwei Untergruppen sind vom selbem Typ, wenn sie innerhalb der Gruppe der affinen Bijektionen von  $E^3$  konjugiert sind. Die Jordansche Liste war fast vollständig. Eine detaillierte Diskussion derselben gibt Scholz 1989, 97 – 102.

<sup>27</sup> Wegen der bekannten Dualität von Würfel und Oktaeder sowie von Dodekaeder und Ikosaeder treten bei den fünf platonischen Körpern nur drei verschiedene Symmetriegruppen auf. Seifert und Threlfall bezeichnen in ihren frühen Arbeiten die genannten endlichen Gruppen pauschal als „platonische Gruppen“ (Threlfall-Seifert 1931, 10), eine Bezeichnung, die sich nicht einbürgern konnte.

<sup>28</sup> Goursat studierte an der Ecole normale supérieure, wo seinerzeit als erster bedeutender Mathematiker G. Darboux lehrte. Von diesem ist Goursats Arbeit deutlich beeinflusst, die inhaltlich u.a. an Poincaré anknüpft.

$K/k$  ist (vgl. Threlfall – Seifert 1931, 17).<sup>30</sup> Dieses Kriterium kommt allerdings im Artikel von 1931 nicht im topologischen Zusammenhang zum Zuge, da dort stets  $K$  trivial gewählt wird. Es ist aber auch für sich genommen als gruppentheoretisches Ergebnis interessant.

Des Weiteren kann es mehrere Untergruppen zu vorgegebenem  $h$  und  $k$  geben; deren Anzahl hängt ab von der Anzahl der inneren Automorphismen, welche  $K/k$  zuläßt.<sup>31</sup>

Die Arbeit von Goursat ist recht umfangreich und für den modernen Leser eher unzugänglich. Das liegt in erster Linie daran, daß er lineare Abbildungen nicht durch Matrizen darstellt sondern in Jordanscher Tradition in Substitutionsschreibweise angibt. Es sei deshalb in dieser Stelle kurz erläutert, wie Threlfall und Seifert den Homomorphismus

$$SO(3) \times SO(3) \rightarrow SO(4)$$

begründen. Eine orientierungserhaltende Isometrie  $\beta$  der Sphäre läßt sich in einer geeigneten Basis in folgender Weise auf Blockform („Winkelform“ bei Seifert und Threlfall) bringen<sup>32</sup>:

$$(*) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

Weiterhin ersieht man aus dieser Darstellung, daß sich jede eigentliche Isometrie der  $S^3$  folgendermaßen als Produkt schreiben läßt:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

Da die geometrische Wirkung der beiden Faktoren einfacher zu verstehen ist als diejenige der Ausgangsisometrie, wird diese Produktdarstellung in 4.2 von Vorteil sein.

Gilt in (\*) zudem  $\varphi = \psi$ , so liegt eine von Threlfall und Seifert sogenannte Rechtsdrehung vor; ist aber  $\varphi \equiv -\psi \pmod{2\pi}$ , so sprechen die Autoren von einer Linksdrehung<sup>33</sup>. Eine einfache Überlegung zeigt nun, daß man eine auf Blockform gebrachte Matrix aus  $SO(4)$  auf zwei Weisen als Matrizenprodukt einer Rechts- und einer Linksdrehung schreiben kann.

<sup>29</sup> Es muß bemerkt werden, dass Hopf das Problem schon in seiner Arbeit von 1926 gelöst hatte, was aber Seifert und Threlfall entgangen war; man vgl. den Anhang II am Ende ihrer gemeinsamen Arbeit von 1933.

<sup>30</sup> Ein weitere Untergruppe, welche zu  $h$  und  $k$  gehört, ergibt sich eventuell als zweistufige Erweiterung von  $h \times k$ .

<sup>31</sup> Hat man einen Isomorphismus von  $H/h$  auf  $K/k$ , so erhält man alle derartigen Isomorphismen, indem man den einen Isomorphismus mit allen inneren Automorphismen der Zielgruppe zusammensetzt. (Mitteilung von R. Strebel vom 20.7.2000).

<sup>32</sup> Modern betrachtet handelt es sich um eine spezielle Form der Jordanschen Normalform. Das entsprechende Ergebnis wird von Threlfall und Seifert als bewiesen vorausgesetzt (ohne Zitat eines Beweises), formuliert wird es weitgehend in geometrischer Sprache (z.B. werden Eigenräume als isotrope Räume bezeichnet etc.). Lineare Algebra in unserem heutigen Sinne ist nur in der Matrixschreibweise, welche von unseren Autoren selten verwendet wird, zu finden.

<sup>33</sup> Interpretiert man eigentliche Bewegungen der Sphäre als Schraubungen, so haben die Bezeichnungen Rechts- bzw. Linksdrehung eine konkrete geometrische Bedeutung, da sie einander entgegengesetzten Drehungen um die Schraubachse entsprechen. In der elliptischen Geometrie werden Rechts- bzw. Linksdrehungen als Cliffordsche Schiebungen erster bzw. zweiter Art bezeichnet, weil Clifford sie dazu verwendet hatte, zu einer Gerade Parallelen im Sinne von Abstandslinien zu konstruieren: vgl. Bonola – Liebmann 1908, 195 – 208 oder Klein 1928, 234 – 236. Cliffordsche Schiebungen waren von Hopf in einem dem Threlfall-Seifertschen sehr ähnlichen Zusammenhang bereits 1926 betrachtet worden.

Andererseits läßt sich jeder orthogonalen, auf Blockform gebrachten  $3 \times 3$ -Matrix mit Determinante gleich 1 eine Rechtsdrehung bzw. eine Linksdrehung zuordnen. Z.B.

$$\begin{pmatrix} \cos 2\tau & -\sin 2\tau & 0 \\ \sin 2\tau & \cos 2\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau & 0 & 0 \\ \sin \tau & \cos \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \tau & -\sin \tau \\ 0 & 0 & \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}$$

mit  $\tau = \varphi + \psi$  oder  $\tau \equiv \varphi - \psi \pmod{2\pi}$ .

Insgesamt erhält man – modern gesprochen – einen Homomorphismus

$$\text{Isom}^+(\mathbb{S}^2) \times \text{Isom}^+(\mathbb{S}^2) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{S}^3)$$

(oder anders ausgedrückt

$$\text{SO}(3) \times \text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}(4))$$

mit Kern  $\{(E,E),(-E,-E)\}$ .<sup>34</sup> In der Sprache von Threlfall-Seifert handelt es sich um einen zweistufige Abbildung. Da die Untergruppen von  $\text{SO}(3)$  bekannt sind, kann man mit Hilfe des oben genannten Kriteriums von Threlfall-Seifert versuchen, Untergruppen von  $\text{SO}(4)$  zu finden. Damit ist der Anteil der Arbeit, den man heute der linearen Algebra und der Gruppentheorie zurechnen würde, erledigt.

Bevor wir konkrete Ergebnisse besprechen, müssen wir uns noch der Geometrie zuwenden. Dies ist deshalb notwendig, weil wir ja die gewünschten 3-Mannigfaltigkeiten durch Randidentifikationen aus Fundamentalbereichen gewinnen wollen. Um deren Aussehen verstehen zu können, bedarf es aber geometrischer Überlegungen. Im wesentlichen geht es um die Frage: Gegeben eine eigentlich diskontinuierlich operierende (insbesondere könnte sie auch endlich sein) Untergruppe von  $\text{Isom}^+(\mathbb{S}^3)$ . Wie findet man deren Fundamentalbereich? Hierzu sagt einem die lineare Algebra nichts; notwendig ist ein bemerkenswerter Wechsel in der Interpretation der Elemente von  $\text{Isom}^+(\mathbb{S}^3)$ .

## 4.2 Die Bewegungen der $\mathbb{S}^3$

Wie bereits in 4.1 bemerkt, läßt sich eine orientierungserhaltende Bewegung der  $\mathbb{S}^3$  auf die Form

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

bringen. Diese besagt, daß die beiden zweidimensionalen Eigenräume – sie mögen  $E_{12}$  und  $E_{34}$  (und hinfert mit der z-t-Ebene bzw. der x-y-Ebene des  $\mathbb{R}^4$  identifiziert werden) heißen<sup>35</sup> - jeweils in sich einer Drehung unterworfen werden. Um sich ein konkretes Bild hiervon machen zu können, projizieren die Autoren die  $\mathbb{S}^3$  stereographisch von ihrem Nordpol (also dem Punkt  $(0,0,0,1)$ ) in den Äquatorraum  $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t=0\}$ . Diese Projektion kann man so einrichten, daß der Durchschnitt von  $E_{12}$  und  $\mathbb{S}^3$  (das ist ein Großkreis) auf die z-Achse

<sup>34</sup> Für eine moderne Darstellung dieser Sachverhalte sei auf das Lehrbuch Storch/Wiebe 1990, 399 und 544 verwiesen. Die hier gegebene verkürzte Beschreibung wirft u.a. die Frage nach der Abhängigkeit vom gewählten Koordinatensystem auf; diese wird von Seifert und Threlfall andiskuiert – allerdings wieder in geometrischer Sprache (vg. Threlfall – Seifert 1931, 12f).

<sup>35</sup> Threlfall und Seifert sprechen von isotropen Ebenen.

des  $\mathbb{R}^3$  abgebildet wird, während der Durchschnitt von  $E_{34}$  und  $S^3$  auf den Einheitskreis der x-y-Ebene abgebildet wird. Weiter benutze man die schon oben erwähnte Produktdarstellung

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

Um eine geometrische Vorstellung der Wirkung der Isometrie zu bekommen, betrachten wir die Bahnkurven von Punkten, das heißt man parametrisiert die beiden Bewegungen in der obigen Produktdarstellung, indem man als Argumente der trigonometrischen Funktionen nicht mehr  $\varphi$  und  $\psi$  nimmt sondern  $t\varphi$  und  $t\psi$ , wobei  $t$  von 0 bis 1 läuft. Die Bahnkurven sind im allgemeinen Kurvenstücke, keine geschlossenen Kurven. Die erste Matrix bewirkt dann im Euklidischen Bildraum Drehungen um die z-Achse um den Winkel  $\psi$ ; die Bahnkurven sind Kreisbögen, welche auf Kreisen liegen, deren Mittelpunkte sich auf der z-Achse befinden, und die in zur z-Achse senkrechten Ebenen liegen. Der zweite Faktor dreht in den hierzu total senkrechten Räumen. Die Bahnkurven liegen dabei auf Orthogonalkreisen der Sphäre  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , die (sphärische) Drehachse ist der Einheitskreis in der x-y-Ebene. Also liegen die geschilderten Bahnkurven alle auf Tori, welche die geschlossene z-Achse zur Drehachse haben. Dabei landen die erstgenannten Bahnkurven auf Meridianen, die letztgenannten auf Breitenkreisen. Eine Sonderrolle spielen lediglich die geschlossene z-Achse und der x-y-Einheitskreis. Kombiniert man nun die beiden Faktoren zum Produkt, so müssen die Bahnkurven immer noch auf den genannten Tori liegen, da dies ja für die Bahnkurven der einzelnen Faktoren gilt. Im allgemeinsten Fall erhält man Stücke von Torusknoten, für Rechts- bzw. Linksdrehungen Stücke von „schrägen Kreisen“, das heißt Torusknoten der Form (1,1) bzw. (1,-1). Nimmt man insbesondere eine parametrisierte Bewegung der Form<sup>36</sup>

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ 0 & 0 & \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}$$

so schließen sich die Bahnkurven zu den geschilderten Torusknoten.

Der Drehung um den Winkel  $\varphi$  entspricht im Euklidischen Bild eine Verschiebung längs der z-Achse; die Drehung um den Winkel  $\psi$  bewirkt eine Drehung um die z-Achse. Man erhält also eine Schraubung – ein wohlbekanntes Ergebnis. Zur  $S^3$  zurück kommt man aus dem Euklidischen Bild, indem man sich die z-Achse geschlossen denkt<sup>37</sup>; die Isometrie ist dann eine sphärische Schraubung, der man im übrigen ihre Fixpunktfreiheit sofort ansieht.<sup>38</sup>

Wie wir bereits gesehen haben bewegen sich alle Punkte der  $S^3$  auf Torusknoten – mit Ausnahme derjenigen Punkte, die auf der z-Achse liegen, und jenen auf dem x-y-

<sup>36</sup> Dies entspricht dem weiter unten zu diskutierenden Fall, daß man eine Rechtsdrehung nimmt, die eine zyklische Gruppe endlicher Ordnung erzeugt. Betrachtet man die Bahn eines Punktes unter dieser Gruppe, so liegen diese Punkte auf den oben angegebenen Kurven.

<sup>37</sup> Dieser hier nur anschaulich beschriebene Zusammenhang läßt sich genauer so fassen: Man versehe den dreidimensionalen Raum mit der durch die stereographische Projektion induzierten Metrik und führe anschließend die Einpunktkompaktifizierung durch. Der dreidimensionale Raum mit der induzierten Metrik wird von Seifert und Threlfall als „konformer Modellraum“ bezeichnet. Dieser wird schon bei F. Klein in den „Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie“ beschrieben.

<sup>38</sup> In der Existenz fixpunktfreier Isometrien besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen der zwei- und der dreidimensionalen Sphäre.

Einheitskreis. Diese durchlaufen jeweils einen Großkreis, der die Seele einer Schar von Tori bildet. Nimmt man einen dieser Volltori um die geschlossene z-Achse, so ist sein Komplement in der  $S^3$  ebenfalls ein Volltorus.<sup>39</sup> Diese Volltori lassen sich beide aus den geschilderten Bahnkurven aufbauen: Durch jeden Punkt, der nicht auf der z-Achse und nicht auf dem x-y-Einheitskreis liegt, geht genau ein schräger Kreis; diese schrägen Kreise sind disjunkt. Insgesamt erhält man eine Struktur, die Seifert später (Seifert 1932) einen gefaserten Raum nennen wird.

Ein konkretes Beispiel erhält man, wenn man eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  mit der trivialen Gruppe paart. Dann ist die sphärische Bewegung, welche auf das erzeugende Element der zyklischen Gruppe abgebildet wird, wegen der Zweistufigkeit eine Rechtsdrehung von der Ordnung  $2n$ ; der Rechtsdrehwinkel ist somit  $\varphi/n$ . Die Frage ist nun, wie man den Fundamentalbereich dieser zyklischen Gruppe findet. Hierzu betrachtet man den Nullpunkt des  $R^3$  (bzw. denjenigen Punkt der  $S^3$ , der unter der stereographischen Projektion auf diesen abgebildet wird) nebst seinen Bildern. Im  $R^3$  liegen diese alle auf der z-Achse, sphärisch gesehen befinden sie sich auf der zu einem Großkreis geschlossenen z-Achse und haben auf diesem immer den gleichen sphärischen Abstand (dieser entspricht dem Drehwinkel  $\varphi/n$ ). Das Rezept, wie man sich in einem solchen Fall den Fundamentalbereich verschafft, kann man schon in Steinitz' Enzyklopädieartikel (§ 46) andeutungsweise nachlesen; letzten Endes geht es zurück auf P. Lejeune – Dirichlet.<sup>40</sup>

Im Sinne dieses Rezeptes muß man diejenigen Symmetrie-Ebenen ermitteln, welche den fraglichen Punkt, dessen Fundamentalbereich bestimmt werden soll, von seinen sukzessiven Bildern trennen.<sup>41</sup> In unserem Fall liegen alle Bilder des Grundpunktes auf der (geschlossenen) z-Achse mit gleichgroßen sphärischen Entfernungen. Die Symmetrie-Ebenen sind 2-Sphären – Ebenen in der dreidimensionalen sphärischen Geometrie – welche die z-Achse senkrecht schneiden. Weiter haben sie die Eigenschaft, alle durch den Einheitskreis in der  $x - y -$  Ebene zu gehen. Aus diesem Grunde tragen nur die beiden dem Grundpunkt am nächsten gelegenen Symmetriesphären zu dessen Fundamentalbereich bei, den sie begrenzen. Dieser hat folglich ein linsenförmiges Aussehen, weshalb Seifert und Threlfall von einem Linsenraum<sup>42</sup> sprechen. Diese heute gängige Bezeichnung tritt hier erstmals auf und ist geometrisch motiviert.

---

<sup>39</sup> Diese für die dreidimensionale Topologie sehr wichtige Einsicht – sie liefert u.a. ein einfaches Beispiel für eine Heegard-Zerlegung – wurde erstmals von W. Dyck in einem Vortrag 1884 formuliert (vgl. Dyck 1885).

<sup>40</sup> Vgl. Dirichlet 1850.

<sup>41</sup> Anders gesagt: Spiegelt man an der Ebene, so geht der Punkt in seinen Bildpunkt über. Bei der Konstruktion des Fundamentalbereiches geht es ja darum, ein maximalen Bereich zu finden, der aus jedem Orbit genau einen Punkt enthält, der also in seinem Innern keine unter der Gruppenoperation äquivalente Punkte umfaßt. Beachtet man noch, daß man es mit Isometrien zu tun, die ja Entfernungen erhalten, so wird die geschilderte Vorgehensweise unmittelbar einsichtig.

<sup>42</sup> Die Linsenräume wurden ausführlich diskutiert von H. Tietze in seiner Habilitationsschrift (Tietze 1908); erstmals auf traten sie – wenn auch nur ganz am Rande – bei W. Dyck 1884 (Dyck 1886). Tietze verwandte Kugeln zur Definition der Linsenräume; später hat J. W. Alexander Linsenräume aus zwei Volltori gewonnen, was in heutiger Terminologie auf eine Heegrad – Zerlegung hinausläuft (Alexander 1919).

(In dieser Abbildung ist  $n = 3$  gewählt, also besteht die Bahn des Grundpunktes aus 6 Punkten, wovon aber einer dieser Punkte im Unendlichen liegt.)

Die obere Schale der Linse wird mit der unteren Schale vermöge der sphärischen Schraubung um die geschlossene  $z$ -Achse mit dem Winkel  $\varphi/n$  identifiziert<sup>43</sup>; alle Punkte im Innern der Linse haben in derselben keine äquivalenten Punkte. Die scharfe Kante der Linse ist nichts anderes als der Einheitskreis der  $x$ - $y$ -Ebene; sie enthält somit äquivalente Punkte (jeweils  $2n$  an der Zahl).

Insgesamt bieten sich im einfachsten Fall, daß man in  $SO(3) \times SO(3)$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  mit der trivialen Gruppe paart, folgende Möglichkeiten:

$n = 1$ : Dann sind beide Gruppen trivial; die zugehörige Untergruppe von  $SO(4)$  ist zyklisch von der Ordnung 2, der normale Fundamentalbereich ist die Einheitskugel, die identifizierenden Abbildungen sind die Identität und die Diametralpunktvertauschung (als  $-E$  oben geschrieben). Die geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist somit der projektive Raum.

$n$  gerade: Die zugehörige Untergruppe von  $SO(4)$  ist zyklisch von der Ordnung  $2n$ ; der normale Fundamentalbereich ist eine Linse, deren Kalotten unter sphärischen Schraubungen mit Winkel- und Ganghöhe  $\pi/n$  miteinander identifiziert werden. Die geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist der Linsenraum  $L(2n,1)$ .

$n$  ungerade: In diesem Falle gibt es zwei Untergruppen von  $SO(4)$ , die sich aus dem entsprechenden Produkt in  $SO(3) \times SO(3)$  ableiten: Die eine ist zyklisch von der Ordnung  $n$  („einstufiger Fall“ in der Terminologie von Seifert und Threlfall), die andere zyklisch von der Ordnung  $2n$  („zweistufiger Fall“). In beiden Fällen erhält man wie gehabt Linsenräume  $L(n,1)$  bzw.  $L(2n,1)$ .

Es folgt eine Übersicht zu den anderen Gruppenpaarungen, die Seifert und Threlfall in ihrer Arbeit von 1931 betrachten: In allen Fällen ist die Gruppe  $K$  trivial; für den anderen Faktor werden der Reihe nach die endlichen Untergruppen von  $SO(3)$  eingesetzt.

Ist  $H$  die Diedergruppe der Ordnung  $m = 2m'$ , so bildet sich diese in die binäre Diedergruppe<sup>44</sup> der Ordnung  $2m$  ab. Der zugehörige Fundamentalbereich ist ein sphärisches Prisma mit  $2m'$  Seitenflächen, die zugehörige 3-Mannigfaltigkeit der Prismaraum  $P(m,1)$ . Ist  $m' = 2$ , so erhält man insbesondere den schon von Poincaré betrachteten Quaternionenraum<sup>45</sup>

Ist  $H$  die Tetraedergruppe, so erhält man als zugehörige  $SO(4)$ -Gruppe die binäre Tetraedergruppe; der Fundamentalbereich ist ein sphärisches Oktaeder, dessen Seitenflächen um  $60^\circ$  verschraubt miteinander identifiziert werden.

Zur Oktaedergruppe gehört die binäre Oktaedergruppe; ihr Fundamentalbereich ist ein abgestumpfter sphärischer Würfel<sup>46</sup>, wobei die Dreiecke um  $60^\circ$ , die Achtecke um  $45^\circ$  verschraubt miteinander zu identifizieren sind.

---

<sup>43</sup> Anders gesagt: Es wird einerseits in Richtung der  $z$ -Achse um  $\varphi$  („Ganghöhe“ der entsprechenden Schraubung) gedreht und andererseits um die  $z$ -Achse als Drehachse ebenfalls um den Winkel  $\varphi$ .

<sup>44</sup> Binär bedeutet, daß die Ordnung der Gruppe doppelt so groß ist wie diejenige der Ausgangsgruppe. Geometrisch gelangt man zur binären Gruppe, indem man eine geeignete Ebenenspiegelung zur Symmetriegruppe hinzunimmt, also letztlich alle Deckabbildungen betrachtet und nicht mehr nur orientierungserhaltende.

<sup>45</sup> Poincaré erhielt diesen bereits 1895 als Würfelmannigfaltigkeit (Beispiel Nummer 4), indem er die gegenüberliegenden Seitenflächen eines Würfels vermöge Drehungen um  $90^\circ$  miteinander identifizierte. Die Fundamentalgruppe des Quaternionenraumes ist isomorph der multiplikativen Einheitengruppe der Quaternionen, daher sein Name (der allerdings noch nicht bei Poincaré auftritt; dieser nennt die fragliche Gruppe vielmehr „hyperkubisch“, weil sie mit den Deckabbildungen des Hyperwürfels zusammenhängt). Sie ist also eine endliche aber nicht triviale Gruppe und zeigt deshalb, daß die Verhältnisse im Dreidimensionalen anders liegen als im Zweidimensionalen (jede geschlossene orientierbare Fläche mit endlicher Fundamentalgruppe hat eine triviale Fundamentalgruppe). Eine andere Beschreibung des Quaternionenraumes – nämlich als Raum der nicht-orientierten Linienelemente der projektiven Ebene – gab van der Waerden; vgl. Threlfall 1932, 93.

<sup>46</sup> Das Kuboktaeder ist gewissermaßen der Grenzfall dieses Körpers, wenn man die Schnitte durch die Kantenmitten führt. So weit darf man also nicht gehen.

Die interessanteste Mannigfaltigkeit erhält man ausgehend von der Ikosaedergruppe. Zu dieser gehört die binäre Ikosaedergruppe, der Fundamentalbereich ist ein sphärisches Dodekaeder, dessen Seitenflächen um  $72^\circ$  verschraubt miteinander zu identifizieren sind. Das besondere Interesse dieser Mannigfaltigkeit, welche sphärischer Dodekaederraum genannt wird, liegt darin, daß ihre erste Homologiegruppe (und damit wegen ihrer Orientierbarkeit auch ihre zweite) trivial ist. Vom Standpunkt der Homologie aus ist sie von der  $S^3$  nicht zu unterscheiden; sie ist in moderner Ausdrucksweise eine Homologiesphäre<sup>47</sup>. Das erste Beispiel einer solchen Mannigfaltigkeit hatte Poincaré 1904 in seinem fünften Komplement konstruiert, ein weiteres Beispiel hatte M. Dehn 1910 aus der Kleeblattschlinge gewonnen<sup>48</sup>. Daß tatsächlich die drei genannten Mannigfaltigkeiten<sup>49</sup> homöomorph sind, konnte abschließend erst 1933 auf der Basis von Seiferts Theorie der gefaserten Räume bewiesen werden (vgl. Weber – Seifert 1933, 245 - 248).

Für sämtliche Beispiele werden von den Autoren die Invarianten angegeben (a,b;c;-) bedeutet dabei erste Betti-Zahl, zweite Betti-Zahl, (ev. mehrere) Torsionskoeffizienten der Dimension 1, Torsionskoeffizienten der Dimension 2; ein Strich heißt nicht vorhanden<sup>50</sup>.

projektiver Raum	(0,0;2;-)
Linsenraum $L(p,1)$	(0,0;2p;-) falls p gerade (0,0;p;-) und (0,0;2p;-) falls p ungerade
Prismaraum $P(m,1)$	(0,0;2,2;-) falls m gerade (0,0;4;-) falls m ungerade
Oktaederraum abgestumpfter	(0,0;2;-)
Würfel	(0,0;2;-)
Dodekaederraum	(0,0;-;-)

In der weiterführenden Arbeit von 1933 werden die Linsen- und die Prismenräume verallgemeinert zu  $L(p,q)$  und  $P(m,n)$ ; das hängt damit zusammen, daß nunmehr auch der zweite Faktor, der in die Gruppenpaarung eingeht, nicht mehr trivial genommen wird. Allerdings versuchen Seifert und Threlfall auch 1933 nicht, explizit alle möglichen Gruppenpaarungen zu untersuchen, weil „die Ergebnisse über gefaserte Räume das Mittel an die Hand [geben], die Diskontinuitätsbereiche mit einem Schlage zu erledigen.“ (Threlfall – Seifert 1932, 544). Auf diese Theorie, die die konsequente Weiterführung der Arbeit von 1931 darstellt, möchte ich jetzt noch eingehen.

Schließlich bleibt noch die Frage, ob man alle geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten auf die geschilderte Art und Weise bekommen kann. 1931 wird diese noch als offen behandelt, aber bereits in der auf einem Vortrag im Dresdner Kolloquium vom 8. Juni 1931 basierenden Veröffentlichung Threlfall 1932 wird klar ausgesprochen, daß es im hyperbolischen Fall geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten gibt, welche nicht Diskontinuitätsbereiche fixpunktloser Isometriegruppen sind (Threlfall 1932, 89f).

## 5. Die Theorie der gefaserten Räume

<sup>47</sup> Max Dehn hat 1910 die Bezeichnung „Poincaréscher Raum“ für Homologiesphären eingeführt (Dehn 1910, 238); darüber hinaus hat er verschiedene Beispiele solcher Räume konstruiert. Der Dodekaederraum nimmt hierunter allerdings bis heute eine Sonderstellung ein, da er die einzige bekannte Homologiesphäre mit endlicher Fundamentalgruppe ist.

<sup>48</sup> Einen Hinweis auf dieses Beispiel enthält bereits eine 1907 veröffentlichte Berichtigung zum Enzyklopädieartikel von Dehen/Heegard; vgl. Dehn 1907.

<sup>49</sup> Weitere Beschreibungen des Dodekaederraumes gaben der russische Mathematiker Kreines 1932 (Identifikationen auf einem Polyeder) und Seifert (als verzweigte Überlagerung eines Knotens). Vgl. Volkert 1996, 143 – 152. Alle diese 3-Mannigfaltigkeiten sind Homologiesphären, deren Fundamentalgruppe die binäre Ikosaedergruppe ist.

<sup>50</sup> Da alle Mannigfaltigkeiten orientierbar sind, gibt es keine Torsionskoeffizienten der Dimension 2.

Die Theorie der gefaserten Räume ist Gegenstand der wohl bekanntesten Veröffentlichung von Herbert Seifert. Diese erschien 1932 in den Acta mathematica unter dem Titel „Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume“; mit ihr promovierte Seifert in Leipzig bei van der Waerden zum Dr. phil.<sup>51</sup> Der Ausgangspunkt dieser Arbeit ist jene Zerlegung in gefaserte Tori, die wir oben im Beispiel der  $S^3$  kennengelernt haben. Diese Struktur wird nun abstrahiert, das heißt, es werden 3-Mannigfaltigkeiten betrachtet, die eine solche gewissermaßen hypothetisch tragen, ohne daß noch gefragt wird, woher diese Struktur kommt und ob sie sich überhaupt realisieren läßt. Letzteres ist natürlich nach den Vorerfahrungen klar.

Nachdem Seifert sehr sorgfältig im Anschluß an Hausdorff und Weyl den Begriff Mannigfaltigkeit eingeführt hat (Seifert 1932, 148-150), kommt er auf die sogenannten gefaserten Vollringe – wie Seifert den Volltorus nennt - zu sprechen, welche später die Grundbausteine seiner gefaserten Räume sein werden. Um einen gefaserten Vollring zu bekommen, nehme man einen ausgefüllten geraden Zylinder im gewöhnlichen Raum und identifiziere Boden- und Deckfläche durch eine Schraubung mit dem Drehwinkel  $(2m/n)\pi$ . Dabei sollen  $m$  und  $n$  teilerfremde ganze Zahlen<sup>52</sup> sein und  $n$  ungleich 0. Die zur Achse des Zylinders parallelen Geradenstücke werden bei dieser Identifikation auf Torusknoten vom Typ  $(n,m)$  abgebildet; lediglich die Achse selbst wird nicht verknotet. Die Knoten sowie der Kreis, auf den die Achse abgebildet wird, werden von Seifert Fasern<sup>53</sup> genannt.

Eine Mannigfaltigkeit wird gefasert genannt, wenn durch jeden ihrer Punkte eine und nur eine Faser geht. Dabei ist eine Faser nichts anderes als eine beliebige Kurve in der Mannigfaltigkeit. Weiterhin wird gefordert, daß jeder Punkt derselben eine Umgebung besitzt, die sich homöomorph auf die Umgebung eines Punktes des euklidischen Raumes so abbilden läßt, daß die Fasern in die Geradenstücke eines Parallelenbündels übergehen. Diese Begriffsbildung ist natürlich sehr allgemein; sie wird umgehend eingeschränkt zu den gefaserten Räumen:

---

<sup>51</sup> Seifert begründete in Gesprächen diese zweite Promotion mit dem Hinweis, Threlfall habe ihn gedrängt, noch einen „ordentlichen“ Dokortitel zu erlangen (in Dresden hatte Seifert den Dr. rer. tech. erworben).

<sup>52</sup> Genauer lassen sich  $m$  und  $n$  folgendermaßen festlegen:  $n$  natürliche Zahl größer Null,  $0 \leq m < n/2$ .

<sup>53</sup> Es ist dies wohl die erste Stelle, an der dieser für die moderne Topologie so wichtige Begriff fällt. Er ist offenkundig anschaulich motiviert. Die verknoteten Fasern heißen auch gewöhnliche Fasern, während die nicht verknotete Faser Ausnahmefaser genannt wird (Seifert 1932, 158). Ein Kompaktheitsargument zeigt, daß es in einem geschlossen gefaserten Raum (siehe unten) nur endlich viele Ausnahmefasern gibt (Seifert 1932, 158); weiterhin läßt sich zeigen, daß die charakteristischen Zahlen  $m$  und  $n$  nicht von der ausgewählten Umgebung einer Faser abhängen (Seifert 1932, 158). Deshalb heißt eine Ausnahmefaser  $H$   $n$ -fache Ausnahmefaser, wenn sie eine Umgebung besitzt, welche sich so auf einen gefaserten Volltorus abbilden läßt, daß dessen charakteristische Zahlen  $m$  und  $n$  sind und  $H$  auf die Achse dieses Torus geht.

Eine gefaserte Mannigfaltigkeit heißt gefasertes Raum, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

„1) Die Fasern, auf die sich die Punkte der Mannigfaltigkeit verteilen, sind geschlossene Kurven.

2. Durch jeden Punkt geht genau eine Faser hindurch.<sup>54</sup>

3. Zu jeder Faser  $H$  gibt es eine Fasernumgebung, das ist eine solche  $H$  enthaltende Teilmenge von Fasern, die sich fasertreu<sup>55</sup> auf einen „gefaserter Vollring“ abbilden läßt, wobei  $H$  in die „mittlere Faser“ übergeht.“ (Seifert 1932, 150)

Anschaulich gesprochen besteht ein gefasertes Raum aus lauter Kreislinien, die sich in geeigneter Weise zusammenfügen. Das läßt sich modern dadurch ausdrücken, daß die entsprechende Mannigfaltigkeit eine  $S^1$ -Operation zuläßt.

Seifert arbeitet vorerst in der (modern gesprochen) Kategorie der gefaserten Räume und der fasertreuen Abbildungen. Später wird dann an manchen Stellen der Zusammenhang zur allgemeinen Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten<sup>56</sup> hergestellt. Das erste Ziel ist es, ein vollständiges Invariantensystem für gefaserte Räume unter fasertreuen Abbildungen zu finden. Ein ganz wesentliches Hilfsmittel hierbei ist die sogenannte „Zerlegungsfläche“, die folgendermaßen eingeführt wird:

„Jeder gefaserte Raum  $F$  hat eine Zerlegungsfläche  $f$ . Dies ist aber keine Punktmenge des Raumes  $F$ , und sie läßt sich im allgemeinen gar nicht als Fläche in den Raum hineinlegen, sondern sie ist als abstrakte Mannigfaltigkeit so definiert: jeder Faser von  $F$  entspricht umkehrbar eindeutig ein Punkt der Zerlegungsfläche  $f$ . Damit hat zugleich jeder Punkt von  $F$  auf der Zerlegungsfläche einen bestimmten Bildpunkt; denn durch jeden Punkt  $F$  geht genau eine Faser hindurch. Die Umgebungen auf  $f$  sind definiert als Bilder der räumlichen Umgebungen in  $F$ .“ (Seifert 1932, 155)<sup>57</sup> Es stellt sich heraus, daß  $f$  eine zusammenhängende offene oder abgeschlossene Fläche ist, wenn  $F$  eine zusammenhängende offene oder abgeschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist. Damit lassen sich aber alle Resultate aus der Flächentheorie auf  $f$  anwenden; insbesondere gilt nach T. Radó, daß  $f$  triangulierbar ist. Ist  $f$  geschlossen, so kann man den Hauptsatz der Flächentopologie, also die Klassifikation durch Henkel- oder Kreuzhaubenzahl, anwenden.

Die Einführung der Zerlegungsflächen durch Seifert ist bemerkenswert, weil diese wohl die ersten abstrakt definierten Quotientenräume in der Geschichte der Topologie sind; die bis dato betrachteten Quotientenräume – etwa die Diskontinuitätsbereiche – hatten dagegen stets eine konkrete anschauliche Bedeutung. Die Zerlegungsfläche gibt an, wie Seifert in einer Fußnote (Seifert 1932, 155 n8) sagt, wie der gefaserte Raum aus seinen Fasern aufgebaut ist. Das führt zu dem wichtigen Satz: Zwei gefaserte Räume gehören nur dann zur selben Klasse<sup>58</sup>, wenn ihre Zerlegungsflächen homöomorph sind. Also ist für geschlossene gefaserte Räume das Geschlecht<sup>59</sup> der Zerlegungsfläche eine Invariante. Die Übereinstimmung der Geschlechter ist notwendig aber noch nicht hinreichend für die Äquivalenz der zugehörigen gefaserten Räume. Hierzu muß deren Aufbau aus gefaserten Volltori noch berücksichtigt werden.

<sup>54</sup> Diese Bedingung ist redundant, weil sie schon an die gefaserte Mannigfaltigkeit gestellt wurde.

<sup>55</sup> D.h. die fragliche Abbildung ist ein Homöomorphismus, der Fasern auf Fasern abbildet..

<sup>56</sup> Bedingung 3 sorgt dafür, daß gefaserte Räume im Sinne Seiferts stets dreidimensionale Mannigfaltigkeiten sind.

<sup>57</sup> In moderner Ausdrucksweise ist  $f$  der Quotientenraum  $F/\sim$ , wobei  $x\sim y$  ( $x,y$  Punkte in  $F$ ) gilt, wenn es eine Faser  $H$  gibt, welche durch  $x$  und durch  $y$  geht. Seifert beschreibt die finale Topologie bezüglich der Identifizierungsabbildung.

<sup>58</sup> Diese Klassenbildung beruht auf der fasertreuen Abbildung, die ja per definitionem topologisch ist und einen Homöomorphismus der Zerlegungsflächen induziert. Allerdings treten noch gewisse Orientierungsaspekte hinzu (vgl. Seifert 1932, 171): „Zwei gefaserte Räume  $F$  und  $F'$  werden zur selben Klasse gerechnet, wenn ihre Zerlegungsflächen  $f$  und  $f'$  sich so aufeinander topologisch abbilden lassen, dass jede Kurve in eine gleich bewertete übergeht.“

<sup>59</sup> Darunter versteht Seifert die Henkel- oder Kreuzhaubenzahl; er verwendet also den Begriff „Geschlecht“ für den orientierbaren und für den nichtorientierbaren Fall (vgl. Seifert 1932, 155).

Das Ergebnis, das Seifert erhält, ist folgendes: Ist  $F$  ein geschlossener orientierter gefasertes Raum mit Zerlegungsfläche  $f$ , so wird  $F$  bezüglich seiner Klassenzugehörigkeit festgelegt durch folgenden Invarianten:

$$(O, o; p \mid b; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n) \text{ oder } (O, n; k \mid b; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$$

Dabei bedeuten:  $O$  die Orientierbarkeit von  $F$ ,  $o$  die Orientierbarkeit von  $f$ ,  $p$  die Henkelzahl von  $f$ ,  $n$  die Nichtorientierbarkeit von  $f$ ,  $k$  die Kreuzhaubenzahl von  $f$ ;  $\alpha_i, \beta_i$  sind die charakteristischen Zahlen der Ausnahmefasern<sup>60</sup> und  $b$  eine ganze Zahl, welche über eine Homologiebedingung festgelegt ist.<sup>61</sup> Ein ähnlicher etwas komplizierterer Satz gilt, falls  $F$  nichtorientierbar ist (vgl. Seifert 1932, 187). Wie sich gleich herausstellen wird, ist Seiferts System stark genug, um die Poincaré-Vermutung für gefaserte Räume zu beweisen. Doch zuerst einige Beispiele:

Das erste Beispiel<sup>62</sup> ist das Produkt  $S^1 \times S^2$ , das Seifert als Schalenraum einführt: Hierzu nehme man zwei konzentrische Sphären nebst dem von ihnen eingeschlossenen Raum. Auf den Randsphären identifiziere man Punktepaare, die auf dem selben Radius liegen. Folglich schließen sich die Radien zu Kreisen:

Die Zerlegungsfläche dieses gefaserten Raumes ist  $S^2$ , welche sich hier als Teilraum des gefaserten Raumes realisieren läßt. Die geschilderte Vorgehensweise läßt sich offensichtlich verallgemeinern: Ist  $f$  eine geschlossene Fläche, so ist das Produkt  $S^1 \times f$  ein gefasertes Raum mit Zerlegungsfläche  $f$ . Hieraus ersieht man direkt, daß jede geschlossene Fläche als Zerlegungsfläche eines gefaserten Raumes auftreten kann.

Weniger einfach aber für die Theorie wichtig sind die „Faserungen der Hypersphäre“, also der  $S^3$ , die Seifert im Paragraphen 3 seiner Arbeit untersucht. Hier wird ganz deutlich, daß der Ursprung seiner Theorie in jenen Untersuchungen lag, die oben im vierten Abschnitt besprochen wurden. In allgemeinsten Form werden die Fasern gegeben durch

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\mu u) + y \sin(\mu u) \\ y' &= -x \sin(\mu u) + y \cos(\mu u) \\ z' &= z \cos(\nu u) + t \sin(\nu u) \\ t' &= -z \sin(\nu u) + t \cos(\nu u) \end{aligned}$$

wobei der Parameter  $u$  das Intervall  $0$  bis  $2\pi$  durchläuft. Die Bahnkurven von Punkten  $(x, y, z, t) \in S^3$  sind dann Torusknoten<sup>63</sup>; Ausnahmen bilden die Punkte des  $x$ - $y$ -Einheitskreises

<sup>60</sup> Wegen der Geschlossenheit gibt es deren nur endlich viele.

<sup>61</sup> Diese hängt mit einer Art von Chirurgie zusammen, welche aus dem ursprünglich gegebenen gefaserten Raum  $F$  den sogenannten Klassenraum macht (vgl. Seifert 1932, 170 – 178). Im wesentlichen geht es dabei darum, Ausnahmefasern auszubohren und dann wieder geeignet zu schließen.

<sup>62</sup> Dieses Beispiel tritt bei Threlfall-Seifert 1933, 562 auch als Prismaraum auf; es findet Erwähnung in Alexanders Vortrag beim Internationalen Mathematikerkongress in Zürich 1932 (Alexander 1932, 255) und im Vortrag Threlfalls daselbst (Threlfall 1932a, 198). Die abstrakte Betrachtung topologischer Produkte setzte sich erst in der ersten Hälfte der 30er Jahre durch; ein wichtiger Wegbereiter hierbei war Künneth mit seinen Arbeiten über Invarianten von Produkten.

und der geschlossenen z-Achse.<sup>64</sup> Diese sind Ausnahmefasern der Vielfachheiten  $m$  bzw.  $n$ . Es gelingt Seifert im § 11 seiner Abhandlung zu zeigen, daß alle Faserungen der  $S^3$  von der angegebenen Form sind, wobei die Sonderfälle  $m = 1$  und  $n = 1$  (dann gibt es jeweils nur eine Ausnahmefaser) sowie  $m = n = 1$  (keine Ausnahmefaser) zu berücksichtigen sind. Dies wiederum spielt bei der Behandlung der Poincaré-Vermutung eine Rolle. Die Zerlegungsfläche zu den Faserungen der  $S^3$  sind stets Kugeloberflächen; nimmt man die Faserung mit  $m = n = 1$ , so ist die entsprechende Identifizierung gerade die Hopf-Faserung (vgl. Seifert 1932, 161 n12).

Weitere Beispiele für gefaserte Räume liefern die Diskontinuitätsbereiche der endlichen fixpunktlosen sphärischen Bewegungsgruppen (vgl. 4. oben); nach dem „Hauptsatz“ (vgl. Threlfall/Seifert 1933, 568) stimmen diese genau mit den gefaserten Räumen endlicher Fundamentalgruppe überein.

In die topologische Kategorie leiten die Betrachtungen des § 10 über, wo die Fundamentalgruppen gefaserner Räume untersucht werden. Es stellt sich heraus, daß die Fundamentalgruppe der Zerlegungsfläche eine Faktorgruppe der Fundamentalgruppe des gefaserten Raumes ist<sup>65</sup>. Soll also die Fundamentalgruppe von  $F$  endlich sein, so muß es diejenige von  $f$  erst recht sein. Ist  $F$  und damit  $f$  geschlossen, kommen dann nach dem Hauptsatz der Flächentheorie für  $f$  nur noch die Sphäre  $S^2$  und die projektive Ebene  $P_2R$  in Frage. Nun lassen sich aber die Faserungen, die zu diesen Zerlegungsflächen gehören, explizit ermitteln:

Ist die Zerlegungsfläche die projektive Ebene, so enthält der zugehörige gefaserte Raum höchstens eine Ausnahmefaser, ist sie die Kugeloberfläche, so gibt es höchstens drei Ausnahmefasern, deren Vielfachheiten (das sind die charakteristischen Zahlen  $n$  von oben) sich im Falle, daß es drei Ausnahmefasern gibt, folgendermaßen angeben lassen:  $(2,2,n)$ ,  $(2,3,3)$ ,  $(2,3,4)$ ,  $(2,3,5)$ . Mit diesem Ergebnis kennt man alle Faserungen, welche auf Zerlegungsflächen mit endlicher Fundamentalgruppe führen. Dies wird von Seifert umgehend dazu verwendet, die Poincaré-Vermutung<sup>66</sup> in einem Spezialfall zu bestätigen. Die Poincaré-Vermutung besagt ganz allgemein, daß eine geschlossene zusammenhängende und einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit der  $S^3$  homöomorph ist. Übertragen in Seiferts Kontext: Jeder geschlossene zusammenhängende und einfach zusammenhängende gefaserte Raum ist der  $S^3$  homöomorph. Nun ist aber die Fundamentalgruppe eines derartigen gefaserten Raumes per definitionem trivial, also erst recht diejenige der zugehörigen Zerlegungsfläche. Also ist diese die  $S^2$  und man kann die oben erzielten Ergebnisse anwenden. Es stellt sich heraus, daß alle in Frage kommenden Faserungen Faserungen der  $S^3$  sind, womit die fragliche Aussage bewiesen ist:

„Satz 11: Ein geschlossener gefasertes Raum, der die die Identität zur Fundamentalgruppe hat, ist die Hypersphäre.“ (Seifert 1932, 206)

Damit war das erste positive Klassifikationsergebnis im Bereich der dreidimensionalen Topologie gewonnen. Wie bereits erwähnt konnten Weber und Seifert aufbauend auf die Theorie der gefaserten Räume 1933 auch zeigen, daß die drei bekannten Homologiesphären, deren Fundamentalgruppen die binäre Ikosaedergruppe waren, homöomorph sind – ein

<sup>63</sup> Der Typ eines derartigen Torusknoten hängt davon ab, welchen Torus man betrachtet. Hierbei spielt die Tatsache eine Rolle, daß das Komplement eines Volltorus in der  $S^3$  wieder ein Volltorus ist, wobei sich die charakteristischen Zahlen der Torusknoten gerade vertauschen.

<sup>64</sup> Vgl. 4.1 oben. Seifert verwendet hier dieselbe geometrische Deutung wie in der gemeinsamen Arbeit mit Threlfall von 1931.

<sup>65</sup> Kategorientheoretisch betrachtet induziert die identifizierende Abbildung von  $F$  auf  $f$  einen Epimorphismus der zugehörigen Fundamentalgruppen. Seifert leitet sein Ergebnis übrigens unter Verwendung des heute nach ihm und van Kampen benannten Satzes her (vgl. Seifert 1932, 199f), der sich erstmals in Seifert Dresdner Dissertation von 1931 findet (Seifert 1931, 33 -36).

<sup>66</sup> Seifert benützt 1932 diese Bezeichnung nicht; sie kommt dann aber im „Lehrbauch“ (1934) S. 218 vor und geht wohl auf Kérékjártó 1923, 12 zurück. Zur Geschichte dieser Vermutung, die bei Poincaré 1904 als Frage begann, vgl. man Volkert 1996. .

weiteres Klassifikationsresultat. Seifert und Threlfall gingen schließlich auch das entsprechende Problem für die Linsenräume an. Hier gelang es ihnen aber nur, eine hinreichende Bedingung<sup>67</sup> für die Homöomorphie von Linsenräumen herzuleiten; daß diese auch notwendig ist, bewies K. Reidemeister 1936 mit Hilfe der heute sogenannten Reidemeister-Franz-Torsion. Gefaserte Räume, oder wie man heute sagt Seifert-gefaserte Mannigfaltigkeiten, spielen auch in der modernen topologischen Forschung eine wichtige Rolle; man vgl. hierzu Hempel 1976 oder Orlik 1972.<sup>68</sup>

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß Seifert aus seinen Betrachtungen über Fundamentalgruppen von gefaserten Räumen ein handliches algebraisches Kriterium für die Faserbarkeit einer 3-Mannigfaltigkeit gewann, welches es erlaubte, bequem die Frage nach der Existenz nicht-faserbarer Mannigfaltigkeiten zu beantworten (Seifert 1932, 223 – 231). Sein Fazit: „Das einfachste Beispiel eines nicht faserbaren Raumes ist die Summe aus zwei topologische Produkten aus Kreis und Kugel,...“ (Seifert 1932, 230).<sup>69</sup> Allgemein stellt sich heraus, daß Summen nur in ganz bestimmten Sonderfällen faserbar sind. Damit ist ein gewisser Abschluß erreicht, insofern der Geltungsbereich der Theorie der gefaserten Räume umrissen wird.

Seifert ist später auf die Theorie der gefaserten Räume nur noch in der gemeinsamen Arbeit mit dem Dresdner Werkstoffwissenschaftler und Mitglied des dortigen Mathematischen Kolloquiums Constantin Weber zurückgekommen, auf deren Inhalt oben schon hingewiesen wurde. Im „Lehrbuch der Topologie“ wird die Theorie nur erwähnt nicht aber ausgeführt.<sup>70</sup> Vielleicht wäre sie im geplanten aber nie realisierten zweiten Band des „Lehrbuches“ berücksichtigt worden. In den Jahren vor dem Krieg hat Seifert noch viele andere Arbeiten im Bereich der Topologie publiziert (vgl. das Verzeichnis am Ende dieses Aufsatzes), wobei ab 1933 die Knotentheorie eine wichtige Rolle spielte.<sup>71</sup> Wie bereits in 2. erwähnt, begann sich Seifert im Krieg mit Fragen der angewandten Mathematik, insbesondere mit Differentialgleichungen, zu beschäftigen. Ab den 1950er Jahren wandte er sich dann verstärkt der Differentialgeometrie zu. In seiner letzten Publikation allerdings, die 1975 im Jahre seiner Emeritierung erschien, behandelte Seifert wieder ein topologisches Problem.<sup>72</sup>

## 6. Zusammenfassung

Die hier vorgeführte Entwicklung der Theorie der gefaserten Räume zeigt in deutlicher Weise einen Weg, wie sich mathematische Theorien entwickeln können. Ausgehend von konkreten Beispielen, deren Betrachtung durch Analogieüberlegungen nahegelegt wird, zeigt sich eine konkrete Struktur in derselben. Im nächsten Schritt wird diese Struktur abstrahiert, also losgelöst von den Beispielen betrachtet und beschrieben. Es zeigt sich, daß diese Struktur so reichhaltig ist, daß sich allgemeine Sätze formulieren und beweisen lassen - ja, daß sie sogar eine partielle Lösung bekannter Probleme – etwa des Homöomorphieproblems oder der Poincaré-Vermutung – zulassen. In einem vorläufig letzten Schritt wird dann der Geltungsbereich der neuen Theorie abgesteckt.

Insgesamt belegt diese Geschichte die Wichtigkeit von konkreten Beispielen: Nur anhand dieser war es ja möglich, die entsprechende Struktur zu finden. Dieser Aspekt wird auch von Seifert und Threlfall immer wieder betont: „Solange das vollständige Invariantensystem der

<sup>67</sup> Genauer gesagt geben Seifert und Threlfall eine hinreichende Bedingung an und eine andere notwendige; vgl. Threlfall – Seifert 1933, 551.

<sup>68</sup> Einige knappe Hinweise gibt Birman 1980.

<sup>69</sup> Gemeint ist die zusammenhängende Summe: Man nehme aus zwei 3-Mannigfaltigkeiten jeweils eine Vollkugel heraus und identifiziere längs der entstehenden Randsphären so, daß das Resultat orientierbar wird.

<sup>70</sup> Vgl. Seifert/Threlfall 1934, 323 n.38.

<sup>71</sup> Vgl. hierzu Epple 1999.

<sup>72</sup> Vgl. hierzu Ratcliffe 1994, 328.

dreidimensionalen geschlossenen Räume gegenüber stetigen Abbildungen noch aussteht, ist die Konstruktion einzelner solcher Räume gerechtfertigt, die die vollständige Aufzählung durch eine Beispielsammlung ersetzt.“ (Seifert 1931, 26) Dies verweist auf einen Aspekt der Mathematikgeschichte, der lange Zeit unter dem Eindruck des Primats der Theorie vernachlässigt wurde, und der erst in letzter Zeit – ausgehend von I. Lakatos’ „Beweise und Widerlegungen“ – vor allem im sogenannten Quasi-Empirismus untersucht wird.<sup>73</sup>

### **Unveröffentlichte Quellen:**

- [1] „Bericht über wissenschaftliche Arbeiten und Bildungsgang von William Threlfall“ (Manuskript maschinengeschrieben; entstanden wohl 1938 im Zusammenhang mit der Bewerbung um die Siegel-Nachfolge)
- [2] „Bescheinigung“ ausgestellt von W. Süss, Freiburg i. Br. 22. Februar 1944 (Nachlaß Seifert)
- [3] „Rede von W. Süss am Grabe von W. Threlfall“ (Manuskript maschinengeschrieben; gehalten am 6.4.49 zu Oberwolfach) [Nachlaß Seifert]
- [4] Brief von W. Threlfall an F. Hausdorff; Dresden, den 27.März 1933 (Hausdorff – Archiv Bonn)
- [5] Postkarte von Threlfalls Mutter an D. Hilbert (Niedersächsische Landesbibliothek Göttingen, Hilbert-Nachlaß)
- [6] Eidesstattliche Erklärung von H. Seifert bezüglich seines Werdeganges, Heidelberg 23.7.74 (Nachlaß Seifert)
- [7] Jung, F.: Das Mathematische Institut der Universität Heidelberg im Dritten Reich (Staatsexamensarbeit am Historischen Seminar der Universität Heidelberg 1999).

### **Veröffentlichte Literatur:**

Alexander, J. W.: Note on two three-manifolds with the same group (Transactions of the American Mathematical Society 20 (1919), 339-342).

Bieberbach, L.: Über die Bewegungen der euklidischen Räume I (Mathematische Annalen 70 (1911), 297-336).

Bieberbach, L.: Über die Bewegungen der euklidischen Räume II (Mathematische Annalen 72 (1912), 400-412).

Bonola, R. – Liebmann, H.: Die nichteuklidische Geometrie (Leipzig und Berlin: Teubner, 1908).

Birman, Joan: Introduction. In: Seifert, H./Threlfall, W.: A Textbook of Topology (New York u.a.: Academic Press, 1980), IX-XI.

---

<sup>73</sup> Vgl. etwa Heintz 2000, 70-92 oder Volkert 1996, Kap. 8.

Chandler, B./Magnus, W.: The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas (New York u.a.: Springer, 1982).

CMc. Gordon A.: Three-dimensional Topology up to 1960. In: History of Topology, ed. by I. M. James (Amsterdam: Elsevier, 1999), 449-489.

Coxeter, H. S. M.: Regular Polytopes (New York: Dover, 1973).

Dehn, M.: Berichtigender Zusatz zu III AB 3 Analysis Situs (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 16 (1907), 573).

Dehn, M.: Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes (Mathematische Annalen 69 (1910), 137-168).

Dehn, M./Heegrad, P.: Analysis situs. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band in drei Teilen: Geometrie. Redigiert von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Erster Teil, erste Hälfte (Leipzig: Teubner, 1907-1910), 153-220 (abgeschlossen 25.06.1907).

Dirichlet, P. G. Lejeune- : Ueber die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten Zahlen (Journal für die reine und angewandte Mathematik 40 (1850), 209-227).

Dyck, W.: On the „Analysis situs“ of Three-dimensional Spaces. In: Report of the fifty-fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Montreal in August and September 1884 (London, 1885), 648.

Epple, M.: Die Entstehung der Knotentheorie (Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1999).

„Geschichte der Algebra. Eine Einführung“, hg. von Erhard Scholz (Mannheim u.a.: BI, 1990)

Hantzsche W./Wendt, H.: Dreidimensionale euklidische Raumformen (Mathematische Annalen 110 (1935), 593-611).

Hantzsche, W./Wendt, H.: Dreidimensionale wirbelgefaserte Räume (Mathematische Zeitschrift 40 (1936), 727-755).

Heintz, B.: Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin (Wien/New York: Springer, 2000).

Hempel, J.: 3-manifolds (Princeton [N.Y.]: Princeton University Press, 1976).

History of Topology, ed. by I. M. James (Amsterdam: Elsevier, 1999).

Hopf, H.: Das Klein-Cliffordsche Raumproblem (Mathematische Annalen 95 (1926), 313-339).

James, I. M.: From combinatorial topology to algebraic topology. In: History of Topology, ed. by I. M. James (Amsterdam: Elsevier, 1999), 561-574.

Kérékjártó, B. von: Vorlesungen über Topologie I. Flächentopologie (Berlin, 1923)

- Klein, F.: Ueber nichteuklidische Geometrie (Mathematische Annalen 37 (1890), 544 – 572).
- Klein, F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Herausgegeben mit einer Einführung und Kommentaren versehen von P. Slodowy (Basel u.a.: Birkhäuser, 1993).
- Klemperer, V.: Ich will Zeugnis ablegen bis zum Letzten. Tagebücher 1933-45, hg. von W. Nowojski unter Mitarbeit von H. Klemperer (Berlin: Aufbau-Verlag, 1998).
- Klein, F.: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie (Berlin: Springer, 1928 – unveränderter Nachdruck 1968)
- Kneser, H. Die Topologie der Mannigfaltigkeiten (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 34 (1926), 1-14).
- Mitgliedergesamtverzeichnis der Deutschen-Mathematiker-Vereinigung 1890 – 1990, hg. von M. Toepell (München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München, 1991).
- Orlik, P.: Seifert-manifolds (Berlin u.a.: Springer, 1972).
- Puppe, D.: Herbert Seifert (Nachruf) In: Jahrbuch der Heidelberger Akademie der Wissenschaften für 1997 (Heidelberg u.a.: Springer, 1998), 139-144.
- Puppe, D.: Herbert Seifert. In: History of Topology, ed. by I. M. James (Amsterdam: Elsevier, 1999), 1021-1027.
- Ratcliffe, J. G.: Foundations of Hyperbolic Manifolds (New York u.a.: Springer, 1994).
- Reidemeister, K.: Homotopieringe und Linsenräume (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 11 (1936), 102-109).
- Sarkaria, K. S.: A look back at Poincaré's *Analysis situs*. In: Henri Poincaré. Science et philosophie, hg. von J. – L. Greffe, K. Lorenz und G. Heinzmann (Berlin: Akademie, 1996), 251-258.
- Sarkaria, K. S.: The topological work of Henri Poincaré. In: History of Topology, ed. by I. M. James (Amsterdam: Elsevier, 1999), 123-168.
- Segal, S. L.: Topologists in Hitler's Germany. In: History of Topology, ed. By I. M James (Amsterdam: Elsevier, 1999), 849-861.
- Steinitz, E.: Polyeder und Raumteilungen. In: Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band: Geometrie, redigiert von W. Fr. Meyer und H. Mohrmann. Erster Teil, zweite Hälfte (Leipzig, 1914-1931), 1-139 (ausgegeben 31.8.1916).
- Tietze, H.: Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten (Monatshefte für Mathematik und Physik 19 (1908), 1-118).

Van der Waerden, B. L.: Kombinatorische Topologie (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39 (1930), 121-139).

Volkert, K.: Das Homöomorphierproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten in der Topologie 1895-1935 (Habilitationsschrift Heidelberg 1996) – erscheint demnächst im Birkhäuser-Verlag.

Volkert, K.: Wie und warum wurde Poincaré zum Topologen? (Philosophia scientiae 2 (1997), 74-102).

Voss, W.: Dresdner Mathematiker von 1920 bis 1935. Die Ära Kowalewski (Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden 45 Heft 6 (1996), 1-7).

Wussing, H.: Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs (Berlin [DDR]: Akademie-Verlag, 1969).

**Schriften von H. Seifert und W. Threlfall (in chronologischer Ordnung):**

Threlfall, W.: Bedingt konvergente Reihen (Mathematische Zeitschrift 24 (1926), 212-214).

Threlfall, W./Seifert, H.: Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes (Mathematische Annalen 104 (1931), 1 - 70).

[Von den Autoren wird stets - vgl. etwa das Literaturverzeichnis ihres „Lehrbuchs“ - 1930 als Erscheinungsjahr dieser Arbeit angegeben; das entspricht aber nicht den Angaben auf dem Frontispiz des entsprechenden Zeitschriftenbandes.]

Seifert, H.: Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume (Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse 83 (1931), 26-66).

Seifert, H.: Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume (Acta mathematica 60 (1932), 147-238).

Seifert, H.: Homologiegruppen berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten (Mathematische Zeitschrift 35 (1932), 609-611).

Seifert, H.: Poincaré'sche Räume. In: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932. II. Band: Sektionsvorträge, hg. von W. Saxer (Zürich und Leipzig o. J.), 197-198.

Seifert, H.: Lösung der Aufgabe 84 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 41 (1932), 7).

Threlfall, W.: Dreidimensionale Raumformen. In: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932. II. Band: Sektionsvorträge, hg. von W. Saxer (Zürich und Leipzig o. J.), 148-149.

Threlfall, W.: Räume aus Linienelementen (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 42 (1932), 87-110).

Threlfall, W.: Lösung der Aufgabe 84 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 41 (1932), 6-7).

Threlfall, W./Seifert, H.: Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes (Schluß) [Mathematische Annalen 107 (1932), 543-586].

Seifert, H.: Verschlingungsinvarianten (Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte der physikalisch-mathematischen Klasse 1933, 811-823).

Seifert, H.: Aufgaben Nr. 154, 236 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, verschiedene Bände).

Seifert, H.: Lösung der Aufgabe 124 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 42 (1933), 112-113).

Threlfall, W.: Aufgaben Nr. 84, 135, 189 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, verschiedene Bände).

Threlfall, W.: Lösung der Aufgabe 124 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 42 (1933), 116-117).

Weber, C./Seifert, H.: Die beiden Dodekaederräume (Mathematische Zeitschrift 37 (1933), 237 – 253).

Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten (Mathematische Annalen 110 (1934), 571-592).

Seifert, H./Threlfall, W.: Lehrbuch der Topologie (Leipzig: Teubner, 1934). Englische Ausgabe: Seifert and Threlfall: A Textbook of Topology and Seifert: Topology of 3-dimensional fibered spaces, ed. by J. Birman and J. Eisner (New York u.a.: Academic Press, 1980). Weitere Ausgaben in Spanisch, Russisch und Chinesisch.

Threlfall, W.: La notion de recouvrement (L'Enseignement mathématique 34 (1935), 228-254).

Seifert, H.: Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 11 (1936), 84 – 101).

Seifert, H.: Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten (Mathematische Zeitschrift 41 (1936), 1-17).

Seifert, H.: La théorie des noeuds (L'Enseignement mathématique 35 (1936), 201-212).

Seifert, H.: Bemerkung zur stetigen Approximation von Flächen (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 12 (1936), 29-37).

Threlfall, W.: Quelques résultats récents de la topologie des variétés (L'Enseignement mathématique 41 (1936), 242-255 & notes complémentaires).

Threlfall, W.: Modern mathematics in Germany (The Mathematics Teacher 29 (1936), 300-393).

Seifert, H./Threlfall, W.: Variationsrechnung im Großen. Morsesche Theorie [Hamburgische Mathematische Einzelschriften 24. Heft/1938] (Leipzig und Berlin: Teubner, 1938).

Threlfall, W.: Le calcul des variations globales (L'Enseignement mathématique 38 (1939-42), 189-208).

Threlfall, W.: Stationäre Punkte auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 51 (1941), 14-33).

Seifert, H.: Lösung der Aufgabe 307 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 52 (1942), 72-79)

Seifert, H.: Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen (Mathematische Zeitschrift 48 (1942), 175-192).

Seifert, H.: Die hypergeometrischen Differentialgleichungen der Gasdynamik (Mathematische Annalen 120 (1947), 75-126).  
[Festschrift für C. Caratheodory]

Seifert, H.: Periodische Bewegungen mechanischer Systeme (Mathematische Zeitschrift 51 (1948), 197-216).

Seifert, H./Threlfall, W.: Topologie. In: Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939-1945. Für Deutschland bestimmte Ausgabe der FIAT Reviews of German Science. Band 2: Reine Mathematik. Teil 2, hg. von W. Süss (Wiesbaden: Steiner, 1948), 239-252. Englisches Original 1946.

Threlfall, W.: Knotengruppe der Homologieinvarianten (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse (1949), 8. Abhandlung, 357-370).

Seifert, H.: Schlingknoten (Mathematische Zeitschrift 52 (1950), 62-80).

Seifert, H.: Closed integral curves in 3-space and isotopic two dimensional deformations (Proceedings of the American Mathematical Society 1 (1950), 287-302).

Seifert, H.: On the homology invariants of knots (Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Series. 2. Serie 1 (1950), 23-32).

Seifert, H./Threlfall, W.: Old and new results on knots (Canadian Journal of Mathematics 2 (1950), 1-15).

Seifert, H.: Zum Satz von O. Bonnet über den Durchmesser einer Eifläche (Mathematische Zeitschrift 77 (1961), 125-130).

Seifert, H.: Minimalflächen von vorgegebener topologischer Gestalt (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse (Jahrgang 1974, 1. Abteilung), 16 Seiten).

Seifert, H.: Komplexe mit Seitenzuordnung (Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. II. Mathematisch-physikalische Klasse (Jahrgang 1975, No. 6, 49-80).

**Anhang:** Entwurf eines Briefes von W. Threlfall an H. Hopf (Oberwolfach 26. April 1945)

Dear Prof. Hopf. At last this terrible upheaval of The Nazis is over. We all revived when the French troops yesterday relived us from this nightmare. I hope soon to have a dinner-talk with you about our adventures in Germany and the progress of our research-work. Get a good vermouthe ready for I shall feel "singular im hoche". I lost my last relatives, many of my friends and students, both my houses at Dresden, my home at Francfort, our manuscripts and half printed papers. But for my old friend Seifert, I should not have outlived the war and if he were not with me I should not care to live on. Today let me tell you only the last and most interesting phase of our adventures. In summer 1944 Prof. Süß succeeded in founding a Reichsinstitut for mathematics and managed to obtain a lonely castle in the Black Forest from the government of Baden, as a substitute for the bombed universities. I add a prospectus of this institute. He used all his influence and ingenuity for this purpose, and yet it seems like a wonder, that he could save so many professors and even strangers with only a loose camouflage. We all owe him an immense gratitude, and we shall do all to keep the inst. going in the times to come. We should be very much obliged to you if you could help us to this and by circulating informations regarding the existence and designs of the inst.

You may be interested in the fate of some of our colleagues. Cara should have joined us, if Mrs. C. ... apop.str. We know nothing about v.d.W. His last add. (Feb.) has been Bischofswroda ... Rellich, Magnus, Deuring at Gttn. Hantzsche +, Wendt, Busem. no news since march. B (?) saved us several times from the grip of the ??? by taking us ... (Tagebuch von H. und W., S. 1159)

Anschrift des Verfassers: K. Volkert, Fakultät III, PH Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 561, e-mail volkert@ph-heidelberg.de