Vortragsmanuskript[1] von W. Threlfall:

Raumproblem

(27.VII.1927)

Alle Grundlagen einer Wissenschaft sind in Dunkel gehüllt und weisen auf metaphysische Tiefen zurück, auf denen sie – uns meist unbewußt – ruhen. Sie zu erkennen und von ihnen sich frei zu machen, ist schwer, aber von hoher Erkenntnisbefriedigung. Da ich mich aber für das Fach der Math[ematik] habilitieren will, so will ich rasch an den metaphysischen Abgründen vorbei eilen und mich dogmatisch auf den Boden der historischen Entwicklung stellen und das Raumproblem so hinnehmen, wie es sich uns heutzutage darstellt.

In den letzten 25 Jahren hat sich in der mathem[atischen] Raumauffassung eine Wandlung vollzogen, die der Tat des Kopernikus gleichkommt. Ich meine den Übergang von der euklidischen Ferngeometrie zur Riemannschen Nahegeometrie der allgem[einen] Relat[ivitäts]theor[ie].

[1] Transkription von Dirk Steinmetz (Oktober 2000). Ergänzungen stehen in […], nicht mit vollständiger Sicherheit lesbare Passagen in {…}.

Wenn ich vom Raum schlechthin rede, so ziele ich damit immer auf den Raum der Erfahrung und nicht auf bloß mathematische Mannigfaltigkeiten, wie sie in der mathesis universalis oder der synthetischen Geometrie auftreten. Diese werde ich vielmehr[,] so weit ich sie brauche[,] als bekannt voraussetzen, darunter auch die mathematischen Grundlagen der allg[emeinen] Rel[ativitäts]theor[ie].

Zunächst will ich ganz in der klassischen Ferngeometrie bleiben und die Fragen andeuten, die sich dem Mathematiker hier stellen.

Zwei Wege stehen da offen, um an das math[ematische] Raumproblem heranzukommen. Den einen will ich den modernen nennen; er ist kurz gesagt eine <u>Theorie der starren Bewegung</u>. Der andere, der antike[,] ist die <u>Axiomatik der Geometrie</u>. Beide stehen sich wie anal[ytische] u[nd] synthet[ische] Geom[etrie] gegenüber.

Der erste Weg geht von dem Form-Inhalt-Gegensatz aus und läßt sich so charakterisieren: an einem Gegenstande der raumzeitlichen Kategorie, einem Körper, unterscheiden wir das <u>Dies</u> von dem <u>So</u>. Einerseits ist der Körper hier-jetzt, anderseits ist er so u[nd] so beschaffen, gelb, viereckig. Den Umstand, daß der Körper sich an einer bestimmten Raumstelle befindet, pflegt man nicht seinen übrigen Eigenschaften beizuordnen. Die Raum-Zeit-Stelle des Körpers gehört nicht zu seinem Wesen.

Was sind nun diese Raumpunkte und Zeitstellen. Wir wollen diese Frage zunächst als mathematische, also in unnatürlicher Einstellung beantworten. Der Punkt ist ein bloßes etwas, ein der Gegenstandskategorie [„]mathematisches Ding[“] angehöriges Etwas, das dadurch vollständig charakterisiert ist, daß alle P[un]kte der Mannigfaltigkeit aller Zahlentripel zugeordnet werden können und daß sich die

- 4 -

Stetigkeit von den Zahlen auf die Punkte überträgt[,] d. h. benachbarte Punkte heißen solche, deren zugeordnete Zahlentripel wenig von einander abweichen. Dafür sagt man auch[,] daß die Raump[un]kte ein dreidimensionales Kontinuum bilden. Die Zeitstellen bilden ebenso ein eindim[ensionales].

Die erste These, die das Wesen des Raumes ausmacht, ist daher die: Das extensive Medium der Aussenwelt ist ein vierdimensionales Kontinuum. *Schon lange vor der Relativitätstheorie vereinigten die* Philosophen *Raum und Zeit zu dem Begriff des extensiven Mediums, welches daher kein überflüssiger gelehrter Ausdruck war, sondern {für Philosophen} stark belastet ist.*[2] Wir wollen *statt dessen dem math[ematischen] Sprachgebr[auch] folgen und für das extensive Medium den Minkowskischen Terminus Welt gebrauchen.*[3]

Diese erste These ist in neuester Zeit die einzige, die unangezweifelt dem Mathem[atiker] vom Wesen des Raumes in der Hand bleibt, sofern er nicht etwa daran denkt[,] den Raum als eine diskrete Mannigf[altig]k[ei]t zu betrachten. Über die beiden weiteren wesentlichen Eigenschaften, die metrische Struktur und die materielle Erfüllung[,] kann man verschiedener Meinung sein.

---

[2] Kursiv gesetzter Text: im Original stenografiert.
[3] Kursiv gesetzter Text: steht im Original auf der gegenüberliegenden Seite.

- 5 -

Das amorphe Kontinuum erschöpft nun nicht die Forderungen, die eine Mann[igfaltig]k[ei]t haben muß, um als Raum angesprochen zu werden. Ein und derselbe Körper kann so[,] wie er ist[,] an verschiedenen Raumstellen sich befinden. Damit ist der Kongruenzbegriff und die starre Bewegung gegeben. Die starre Bewegung läßt sich vom einzelnen starren Körper auf den ganzen vom Körper sozusagen mitgeführten Raum übertragen. In dem math[ematischen] Kontinuum stellt sich dann die starre Bewegung als eine Transformation dar. Zwei starre Bewegungen hintereinander ausgeführt ergeben wieder eine, d. h. die Transformationen bilden eine Gruppe. Die euklidische Geom[etrie] ist dadurch gekennzeichnet, daß die Gruppe der Raumtr[an]sf[orma]t[ione]n die der orthog[onalen] Tr[an]sf[orma]t[ione]n ist, die klassische Mechanik dadurch[,] daß ihre Welttransformationen die Galileitr[an]sf[orma]t[ione]n sind.

- 6 -

Allgemein läßt sich die Gruppe dadurch noch etwas genauer begrifflich bestimmen, daß man verlangt, der starre Körper solle 6 Freiheitsgrade haben. Das ist eine naheliegende Forderung, daß ein Körper festgelegt ist, wenn man einen seiner Punkte kennt und festhält (3 Koordinaten), daß er alsdann noch 2 Freiheitsgrade hat, *die Drehung um diesen Punkt, und daß er nur einen Freiheitsgrad behält, wenn man einen zweiten Punkt festlegt. Er kann sich dann noch um eine Achse drehen. Durch den 3. Punkt ist er eindeutig festgelegt.*[4] Aus dieser Voraussetzung hat Lie nach dem Vorgange von Helmholtz u[nd] Überweg bewiesen, daß die 6[-]gliedrige Gruppe von Tr[an]sf[orma]t[ione]n immer eine quadratische Form festläßt, die den unendlich fernen Saum des Raumes ausmacht. Dreidim[ensionale] Mann[igfaltig]k[ei]t[e]n, die mit einer solchen Gruppe ausgestattet sind, nennt man Räume festen Krümmungsmaßes.

Der euklidische Raum ist unter diesen Räumen dadurch ausgezeichnet, daß seine Bewegungsgruppe eine dreigliedrige invar[iante] Untergruppe hat, die Parallelverschiebungen oder Translationen. D. h. es gibt in ihm eine

[4] Kursiv gesetzter Text: im Original stenografiert.

- 7 -

Gruppe von Bewegungen, eben die Translationen, die mit jeder andern Bewegung vertauschbar sind. Oder auch dadurch läßt sich der euklidische Raum kennzeichnen, daß in ihm ähnliche Figuren existieren, d. h. Figuren von verschiedener Größe[,] die in allen Streckenverhältnissen und Winkeln übereinstimmen.

Wie können wir nun feststellen, ob der Erfahrungsraum, von dem wir ja erst zur Betrachtung der Transformationsgruppen der Zahlenmannigfaltigkeit gelangt sind, wirklich euklidisch ist? Wir müssen aufzeigen, was starre Bewegungen, also starre Körper sind, ihre Gruppen studieren und nachsehen, ob darunter eine invariante Untergruppe von Translationen sich vorfindet, oder auch[,] ob es ähnliche Figuren gibt. Tatsächlich wird man freilich andere Forderungen zur Prüfung heranziehen, auf die ich an dieser Stelle nicht eingehe.

[Im Originalmanuskript auf der gegenüberliegenden Seite:]

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)^2 K = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\mathfrak{G}_{uu}+\mathfrak{F}_{uv}-\frac{1}{2}\mathfrak{E}_{vv} & \frac{1}{2}\mathfrak{E}_u & \mathfrak{F}_u-\frac{1}{2}\mathfrak{E}_v \\ \mathfrak{F}_v-\frac{1}{2}\mathfrak{G}_u & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{G}_v & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathfrak{E}_v & \frac{1}{2}\mathfrak{G}_u \\ \frac{1}{2}\mathfrak{E}_v & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{G}_u & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}$$

- 8 -

Mit den beiden Thesen von der Dreidimensionali[tät] und der metrischen Struktur ist nach der klassischen ferngeometrischen Auffassung das Wesen des Raumes schon erschöpft. In der relativistischen Geometrie dagegen gehört die materielle Erfüllung mit zum Wesen des Raumes. Da sie die metrische Struktur erst bestimmt, und diese nicht a priori für den ganzen Raum[,] *seine nächsten u[nd] fernsten Teile[,]*[5] vorbestimmt ist.

Bleiben wir erst bei der klassischen Ferngeometrie. Durch die Bewegungsgruppe ist dann in der Tat die ganze Geometrie gegeben. Zwei Fig[ure]n sind kongruent, wenn sie durch eine Tr[an]sf[orma]t[io]n der Gruppe in einander sich überführen lassen. Damit ist ein übertragbarer Maßstab bekannt; ebenso die Gerade, die nun als geodätische Linie gegeben wird. D. h. Geraden sind kürzeste Linien zwischen zwei Punkten oder Richtung behaltende Linien. Im ersten Fall sind die Geraden durch eine Eigenschaft im Großen definiert, im zweiten

[5] Kursiv gesetzter Text: im Original später eingefügt.

durch eine differentialgeom[etrische] Eigenschaft, die nur am einzelnen Punkt feststellbar ist. Auf diesen Unterschied[,] geom[etrische] Gebilde zu bestimmen, durch Eigenschaften im Großen oder im Kleinen, werden wir noch zurückkommen und können uns dann dieses Beispiels erinnern. Natürlich kann ich hier[,] wo es sich nur um prinzipielle Fragen handeln soll, die Ergebnisse der geometrischen Wissenschaft nur streifen.

Mit Maßstab und Gerade sind nun auch die abgeleiteten Eigenschaften bekannt, die die <u>axiomatische</u> Geom[etrie] zum Ausgangspunkt der Raumlehre. Z. B. Sätze wie: I Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, II eine Gerade einer Ebene, die in ein Dreieck hinein geht, muß auch wieder herauskommen[,] oder III die Kongruenzsätze. Damit gehen wir zur axiomatischen Lösung des Raumproblems über, die man auch die antike Lösung des Euklid

nennen kann.

Dem Altertum lag die Betrachtung des Raumes als stetige Punktmannigfaltigkeit fern. Der Raum war für Aristoteles das Nicht-seiende, das Leere, das Zwischen-den-Dingen. Sie mußten daher von den Beziehungen zwischen den Körpern ausgehen und kamen so zur Begründung der Geom[etrie,] wie sie von Euklid gegeben wurden. In modernem Gewande läßt sie sich so andeuten: Es gibt drei Arten von Dingen[,] Punkte, Geraden, Ebenen, die gewissen Axiomen genügen. Diese Axiome sind I. die der Verknüpfung[,] z. B.[:] durch zwei P[un]kte geht eine Gerade, II. die der Anordnung[,] z. B. das Axiom von Pasch über die aus dem Dreieck wieder austretende Gerade, III. die der Kongruenz. Beschränkt man sich auf diese drei Klassen von Axiomen, so ergibt sich gerade die Geometrie, die wir aber durch die Bewegungsfreiheit des starren Körpers

- 11 -

gewonnen hatten, nämlich die Geometrie mit festem Krümmungsmaß. Und wie wir früher die euklidische Geom[etrie] unter ihnen durch die Existenz der invarianten Untergruppe ausgezeichnet hatten, so können wir sie jetzt durch Hinzunahme des euklidischen Parallelenaxioms festlegen. *Aussage des eukl[idischen] u[nd] hyp[erbolischen] Parall[elen]-axioms: „man muß weiterdrehen, ehe der auf der einen Seite entschwundene Punkt auf der anderen erscheint.*[6] Für die hyperbolische Geom[etrie] wäre dies durch das hyperbolische Parallelenaxiom zu ersetzen. Auf die Sonderstellung der elliptischen Geom[etrie] will ich nicht eingehen.

Nur das sei noch hervorgehoben, daß es nur drei Geometrien *gibt, wenn wir die angegebenen Festsetzungen über die Bewegungsfreiheit des starren Körpers machen, oder was auf dasselbe* {hinaus} *kommt, die Achsen der Verknüpfung, Anordnung und* $\cong$ *zu Grunde legen. Es sind die* nichteuklidischen[7] Geometrien im engeren Sinne, *die elliptische, die euklidische und die hyperbolische. +, verschwindend oder – krümmungsmaßentsprechend. Die Größe des Krümmungsmaßes ist unwesentlich, da die Geometrie* {…} *durch die Bewegungsgruppe oder die Achsen gekennzeichnet ist und die Größe des Maßstabs in ihr keine Rolle spielt.*[8]

---

[6] Kursiv gesetzter Text: im Original als Anm. auf der gegenüberliegenden Seite.
[7] Schreibfehler? Evtl. „klassisch“ statt „nichteuklidisch“.
[8] Kursiv gesetzter Text: im Original stenografiert.

Es ist nicht überflüssig hier nach Besprechung der axiomatischen Geom noch einmal auf die Frage zurückzukommen: Was heißt es eigentlich, der Erfahrungsraum sei eukl[idisch] oder nichteukl[idisch]?

Wir Mathematiker stellen Theorien über mehrdim[ensionale] Mannigfalt[ig]k[ei]t[e]n auf, euklidische oder sonst[ige]. Aber ein[e] Beziehung zur Physik, zur Erfahrung haben diese nicht. Man hat daher den Wert der Mathematik angezweifelt und sie auf gleiche Stufe mit dem Schachspiel gestellt.

So ist es nun freilich nicht. Der Reiz der Mathematik liegt in der Schönheit ihrer großen geschlossenen Theorien, der Funktionentheorie, der Theorie der algebraischen Zahlen, der n[-]dimensionalen Topologie und Diff[eremtial]geometrie. Wäre die Mathematik eine weniger exklusive Wissenschaft, so würde Gauss öfter neben Beethoven genannt werden. Es sind selbstgenügsame Gebilde,

die jeder utilitaristischen Rechtfertigung spotten. Göttinnen thronen sehr in Einsamkeit, um sie kein Raum, auch weniger eine Zeit. Das steht als Motto über eine der schönsten dieser Theorien geschrieben *(Minkowski[,] Geom[etrie] d[er] Zahlen)*.[9]

~~So kümmert sich denn der Mathematiker~~ [10]

Fragt man[,] warum dennoch die reine Mathematik eine so große Bedeutung für die exakten Wissenschaften, für die Technik und für die Gestaltung des äußeren Weltbildes gehabt hat, so kann ich nur mit einem großen Mathematiker antworten, daß dies ein großes Geheimnis ist, von dem man eigentlich nicht reden solle, denn alles was innerhalb der reinen Mathematik gesund ist, findet früher oder später seine Anwendung. So ging es mit der Theorie der Kegelschnitte des Altertums und mit den Keplerschen Gesetzen, so mit der Geom. als Invariantentheorie und dem Relativitätsprinzip.

(Klein[,] Lorentztransformationen)[11]

[9] Kursiv …: im Original als Fußnote 1 auf der gegenüberliegenden Seite.
[10] Im Original durchgestrichen.
[11] Kursiv …: im Original als Fußnote 2 auf der gegenüberliegenden Seite, korrespondierendes Fußnotenzeichen jedoch nicht im Text. Sollte vermutlich hinter: „einem großen Mathematiker“ stehen.

- 14 -

Der Mathematiker aber hat sich um diese Anwendbarkeit nicht zu kümmern.

Er fragt nicht einmal danach, was eine Gerade ist. Seine Begriffe sind nicht konstitutiv, sondern reflexiv, d. h. er hat es nur mit dem Etwas schlechthin zu tun. Eine Definition, wie sie in den Naturwissenschaften die Regel ist, durch genus prox[imum] u[nd] diff[erentia] spec[ifica,] kennt die Mathematik nicht. Sie konstruiert ihre Begriffe, und deren Inhalt erschöpft sich in den über sie gefällten Urteilen. Punkt und Gerade sind Schemata innerhalb der Math[ematik], die man deshalb oft Grundgebilde nullter und erster Stufe nennt. Sie werden vollständig durch die Axiome, die aus ihnen abgeleiteten logischen Existenzbeweise weiterer Gebilde und durch die logischen Folgerungen charakterisiert. Es trifft den Kern der Sache, wenn man die Math[ematik] die Wissenschaft nennt, in der man nie weiß, wovon man spricht, noch ob das, was man sagt, wahr ist *(B. Russel[,] Princ[iples] of math[ematics]).*[12]

- 15 -

Das Raumproblem selbst gehört also gar nicht zur reinen Mathematik. Denn hier handelt es sich nicht um eine beliebige Mannigfaltigkeitslehre, sondern den einen Raum der Erfahrung gilt es zu ermitteln. Die Beziehung zwischen Math[ematik] u[nd] Erfahrung kann nur durch Fingerzeig hergestellt werden. Wir müssen aufzeigen[:] dies ist eine Gerade, dies ist ein Punkt. Wenn wir also den zweiten axiomatischen Weg gehen, so müssen wir vor allem die beiden Begriffe [„]Gerade[“] und [„]kongruent[“] in der wirklichen Welt erzwingen, d. h. wir brauchen einen Maßstab und einen Lichtstrahl, Zirk[el] und Lineal.

Und nun ist es eine sinnvolle Frage, ob die Lichtstrahlen und die starren Maßstäbe die Axiome der euklidischen oder der nichteukl[idischen] oder sonst einer Geom[etrie] erfüllen. Erfüllen sie, so ist die Geom[etrie] des wirklichen Raumes die euklidische, andernfalls könnte man noch versucht sein[,] eine Krümmung der Lichtstrahlen verantwortlich

[12] Kursiv …: im Original als Fußnote 1 auf der gegenüberliegenden Seite.

- 16 -

zu machen, d. h. die Gerade durch andere Gegenstände der Erfahrung zu geben, z. B. Ruhpunkte einer Drehbewegung eines in zwei P[un]kten unterstützten Körpers oder Trägheitsbahnen, und von ihnen zu prüfen, ob sie die Axiome erfüllen. Erkenntnistheoretisch kommt ein solcher Ausweg zur Rettung der eukl[idischen] Geom[etrie] in Frage, erkenntnispraktisch nicht, wegen der ausgezeichnete[n] Rolle, die die Lichtstrahlen in der Astronomie spielen. Jedenfalls besagt die Behauptung, der Raum sei keine eukl[idische] Mannigf[altig]k[ei]t, daß sich die Geraden nicht in der Weise realisieren lassen, daß sie den eukl[idischen] Axiomen genügen. *Zur Prüfung steht {…} nur das Parallelenaxiom, die übrigen Axiome sind unbezweifelbar erfüllt und sofort nachprüfbar*.[13]

Das experimentum crucis ist von Gauss ausgeführt worden – Inselberg, Brocken, Hohen Hagen. Es ist zugunsten der eukl[idischen] Geom[etrie] ausgefallen. ~~Während Einstein aus andern Experimenten die Gültigkeit der euklid[ischen] Geom[etrie] in stellaren Dimensionen widerlegt hat. *streng genommen sogar in jedem Raum überall, wohin Massenwirkung dringt.*~~[14] Auf Erden dagegen steht die eukl[idische] Geom[etrie] außer Zweifel (innerhalb der Fehlergrenzen der Massung).

- 17 -

Ich will noch ein anderes Gedankenexperim[ent] angeben[,] das möglicher Weise gegen die eukl[idische] Geom[etrie] hätte entscheiden können. Es ist Einwänden nicht ausgesetzt, die daraus entstanden sind, daß der Lichtstrahl des Gausschen Experimentes nicht punktweise auf Geradlinigkeit geprüft wird. Wenn Maßstab und Lichtstrahl, Zirkel und Lineal vorhanden sind, so kann man auf Grund der Axiome den rechten Winkel konstruieren, ohne von neuem aus der Anschauung zu schließen und ohne das Parallelenaxiom zu benutzen. Man errichte nun auf einem Lichtstrahl gleichlange Lote. Bilden die Endpunkte wieder einen Lichtstrahl, wie es nach dem Parall[elen]axiom sein muß, so gilt die eukl[idische] Geom[etrie], bilden sie eine krumme Abstandslinie[,] so die hyperbolische.

[13] Kursiv …: im Original als Einfügung auf der gegenüberliegenden Seite.
[14] Durchgestrichen/kursiv: im Original durchgestrichen (inkl. Einfüfung).

Mit dem Gaußschen Experiment ist die euklid[ische] Geom[etrie] innerhalb der Fehlergrenzen auf Erden sichergestellt. Einstein hat nun auf Grund anderer Experimente eine Raumkrümmung in der Nähe großer Massen festgestellt. Sie ist allerdings so klein, daß sie auf Erden innerhalb der Fehlergrenze liegt. Damit ist aber dem Raum die math[ematische] Euklidizität abgesprochen.

Damit habe ich schon die Ferngeometrien verlassen und komme zu dem letzten Stadium des Raumproblems, zu den letzten 25 Jahren, und damit zu einem großen Triumphe der math[ematischen] Wissenschaft, der uns berechtigt zu sagen, daß wir, als Mathematiker u[nd] freilich nur als solche, in einer großen Zeit leben, zur allgemeinen Relativitätstheorie. Ein Lehrbuch der allgemeinen Relativitätstheorie ist ungefähr ein großes Repetitorium der gesamten Kontinuumsmathematik und -physik.

[Im Originalmanuskript auf der gegenüberliegenden Seite:]

$$g_{ij}\,\Gamma^{j}_{kr} + g_{kj}\,\Gamma^{j}_{ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \quad (= \Gamma_{i\,kr} + \Gamma_{k\,ir})$$

Metrischer Fundamentaltensor = (Tensor)potential des Führungsfeldes (der Trägheitskräfte).

Ich will hier nur <u>den</u> Gegensatz der neuen Theorie zur klassischen Raumauffassung hervorheben, der im Übergang von der ~~klassischen~~[15] Ferngeometrie zur relativistischen Nahegeometrie liegt und erläutere diesen Gegensatz, der sich durch die ganze reine Geometrie hindurchzieht an einigen Beispielen.

~~*Wenn ich eine Funktion als konstante kennzeichnen will, so kann ich einmal hinschreiben* f(x)~~ [16]

Das einfachste Beispiel ist dies: wenn ich eine Funktion f(x) als konstant kennzeichnen will, so kann ich entweder hinschreiben f(x)=c oder aber ich kann df/dx=0 setzen. Im ersten Falle habe ich die Funktion im Großen charakterisiert, im zweiten Fall Punkt für Punkt im Kleinen. Denn die Eigenschaft eine verschwindende Ableitung zu haben[,] ist eine solche die einem Punkte der Kurve zukommt[,] ohne daß dadurch endlich entfernte Nachbarpunkte gebunden wären. Und nun kann ich hieran den einfachsten Fall eines im allgemeinen sehr schwierigen Integrationsproblems

[15] Im Original durchgestrichen.
[16] Im Original durchgestrichen, kursiver Text stenografiert.

demonstrieren: aus den Eigenschaften der einzelnen Punkte im Kleinen folgt der Verlauf im Großen[:] aus $f_x=0$ folgt f=c. Ein anderes Beispiel hatten wir schon früher kennen gelernt[,] die Charakterisierung der Geraden einmal als kürzeste Verbindung im Großen und dann als Richtung-behaltende Linie differentialgeometrisch.

Ein weniger einfaches Beispiel ist dies: Eine Ellipse kann ich durch ihre Gleichung geben; dann ist jeder Punkt in bezug auf die Hauptachsen festgelegt, ebenso kennt man die Krümmung in jedem Punkt, kurz durch die Gleichung ist die Kurve im Großen starr gegeben. Daneben betrachte ich eine beliebige Eilinie, von der ich nur verlange, daß sie in jedem ihrer Punkte elliptisch gekrümmt sei, d. h. durch diese differentialgeom[etrische] Bestimmung ist die Eilinie im Großen durchaus nicht bestimmt. Und doch läßt sich aus der Eigenschaft im Kleinen eine Eigenschaft im Großen ableiten:

Durch 5 beliebige Punkte der Kurve geht stets eine Ellipse.

Dies ist ein Beispiel für die Schwierigkeit des Problems aus den Eigenschaften einer Mann[igfaltig]k[ei]t im Kleinen auf Eigenschaften im Großen zu schließen.

Nun verhält sich der Raum der klassischen Ferngeometrie zur Welt der Relativitätstheorie wie die starre Ellipse zur Eilinie. In der klassischen Theorie ist die Raumkrümmung im Großen vorgegeben, in den nächsten und fernsten Punkten ist sie konstant. Nach der Relativitätstheorie ist dies eine zu starre Forderung an die Natur. Wir dürfen nicht die Bewegungsfreiheit vom starren Körper auf den ganzen mitgeführten Raum übertragen. Dies ist nur im infinitesimalen Gebiet unserer Laboratoriumserfahrung erlaubt.

An Stelle der gruppentheor[etischen] Voraussetzungen über den starren Körper treten jetzt differentialgeom[etrische] Voraussetzungen

- 22 -

über die Bewegungsgruppe im einzelnen Punkt und die Parallelverschiebung zum infinitesimal benachbarten.

Dem Lie[-]Helmholtzschen Satz, der aus der Bewegungsfreiheit des starren Körpers die Transformationsgruppe des Gesamtraumes ableitete, tritt jetzt der Weylsche Satz gegenüber, der aussagt, daß die Mannigfaltigkeit auf Grund der infinitesimalen Bewegungsgesetze eine pythagoreische ist, d. h. daß die ihr zugeordnete Transformationsgruppe eine quadratische Differentialform[17] invariant läßt *(mit variabeln Koeffizienten)*[18].

Hiermit hat eine allgemeine Entwicklung ihren Abschluß gefunden, die in der Mitte des vorigen Jahrhunderts einsetzte. Mit der Elektrodynamik fing sie an. Da ging man vom Biot-Sav[artschen] Gesetz und den Coulombschen Fernkräften zum Faradayschen Induktionsgesetz und dem elektromag[netischen] Feld mit seinen Maxwellschen Gleichungen

[17] Im Original mit Bleistift unterstrichen.
[18] Kursiv gesetzte Klammer: im Original mit Bleistift geschrieben.

[- 23 -]

über. Dann steht die ganze Lebensarbeit Riemanns unter dem Zeichen der Nahewirkungstheorie. Riemannsche Funktionentheorie ist Nahewirkungstheorie. Die analytische Funktion ist jetzt die Gesamtheit der mit einande[r] zusammenhängenden Funktionselemente[,] und das erwähnte schwierige Problem besteht hier darin, aus den Koeffizienten der Potenzentwicklung auf ~~das Geschlecht~~[19] *die Eigenschaften*[20] der Funktion zu schließen. Riemannsche Geometrie aber ist Nahegeometrie schlechtweg.

Nur eine Theorie wollte sich nicht in eine Nahewirkungstheorie verwandeln lassen, die Gravitationstheorie. Die Newtonsche Grav[itations]theor[ie] ist eine typische Fernwirkungstheorie. Die allgemeine Relativitätstheorie hat sie vermöge des Äquivalenzsatzes durch eine Nahewirkungstheorie ersetzt.

Das erwähnte schwierige Problem ist hier nun das der curvatura integra: Eigenschaften im Kleinen mit Eigenschaften im Großen, Differential-

[19] Im Original mit Bleistift durchgestrichen.
[20] Kursiv gesetzter Text: im Original mit Bleistift eingefügt.

[- 24 -]

geometrie mit Topologie in Zusammenhang zu bringen. Das Problem ist deshalb von phantastischer Schwierigkeit, weil man nur die rohesten topolog[ischen] Inv[arianten] mehrdim[ensionaler] Mann[igfaltig]k[ei]t[e]n und nur eine rohe Integralinvar[iante], das Integral des zweimal verjüngten Krümmungstensors kennt. Ich habe manche Stunde mit Vorarbeiten dafür verloren und bin von hier aus auch auf meine Habilitationsschrift gekommen.

An eine Lösung ist nicht zu denken, und doch wäre sie nötig, wenn man bindende Schlüsse auf die Kosmologie ziehen wollte[,] ohne sich auf triviale Fälle zu beschränken.

[- 25 -]

Wohin man blickt, ungelöste Probleme, groß genug[,] um Gelehrtengenerationen in Anspruch zu nehmen. Und dabei sind das nur die formalen Fragen der Mathematik. Verlassen wir die reine Mathematik, so erheben sich dahinter die bangen philosophischen Fragen, die sich durch die Jahrhunderte hinziehen.

So erlebt der naive Mathematiker, wenn er zum ersten Mal von der klassischen, Newtonschen Mechanik zur Relativitätstheorie geführt wird, eine große Beglückung; es geht ihm ein Licht auf, ähnlich wie in den Kindertagen, als das Planetensystem verständlich wurde, oder als man später in der Schule zum ersten Mal von inkommensurablen Größen hörte. Nach einiger Zeit aber vergeht der Erkenntnisrausch und es meldet sich der Zweifel: Ist es nicht nur eine neue Betrachtungsweise? Neue willkürliche apriorische Voraussetzungen, Änderung der Probleme, nicht der Lösungen. Früher hieß es: Erklärt

[- 26 -]

die Natur auf Grund der euklidischen Geom[etrie] und der Newtonschen Mechanik, jetzt auf Grund der Riemannschen Geometrie und der Elektrodynamik. Einstein kann auf die Experimente verweisen, Perihelbewegung, Lichtstrahlkrümmung, Rotverschiebung, das ist ein großer Erfolg. Und doch erholt sich neben der Relat[ivitäts]theor[ie] der neue Wolkenkratzer, die Quantentheorie.

Sagte doch Einstein selbst einmal resigniert: Die Relativitätstheorie? Nur ein Mittel, dem schwersten Feind des theor[etischen] Physikers, dem embarras de richesse zu steuern; eine neue, überlegene, aber konventionelle Voraussetzung physikalischer Forschung.

Was kommt da auf Rechnung des Subjekts, was ist individuell aber absolut, was allgemeingiltig, aber relativ? Steht nicht die Richtigkeit im umgekehrten Verhältnis zur Wichtigkeit? Ist es nicht doch notwendig, zwischen die logisch-mathem[atischen] Konstruktionen des Mathematikers

[- 27 -]

und das Experiment des Physikers eine reine Anschauung[,] oder in moderner Wendung das Wesen {ein}zuschalten und darin die Wahrheit zu veranke[r]n? Ich glaube wohl, daß so etwas ~~nötig~~[21] unumgänglich ist, wenn man nicht in Sinnlosigk[ei]t verfallen will. Aber wie erfassen wir das Wesen des Raumes? Welches sind die exemplarischen Anschauungen[,] die uns seiner versichern? *Wankt nicht {……} geometrische Erkenntnis {……} sich die {Aufklärung geklammert} hatte, {nachdem} die Kirchenautorität in Trümmer gegangen ist*?[22]

Wer solchen ungeduldigen Fragen nachdenkt, beginnt den Lord Newton zu verstehen, der auf der Höhe seiner Entdeckerfreude in sein Tagebuch notierte: Wie ich vor der Welt erscheine, weiß ich nicht, mir selbst aber komme ich wie ein Knabe vor, der am Strande spielt und hier einen glatteren Kiesel, dort eine schönere Muschel aufliest, während der weite Ozean der Wahrheit ganz unentdeckt vor seinen Augen liegt.

---

[21] Im Original durchgestrichen.
[22] Kursiv …: im Original stenografiert, nachträglich eingefügt. Daher schwer lesbar.