GESCHICHTE DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE

Vorlesung: Ausgewählte Kapitel aus der Mathematikgeschichte

WS 13/14

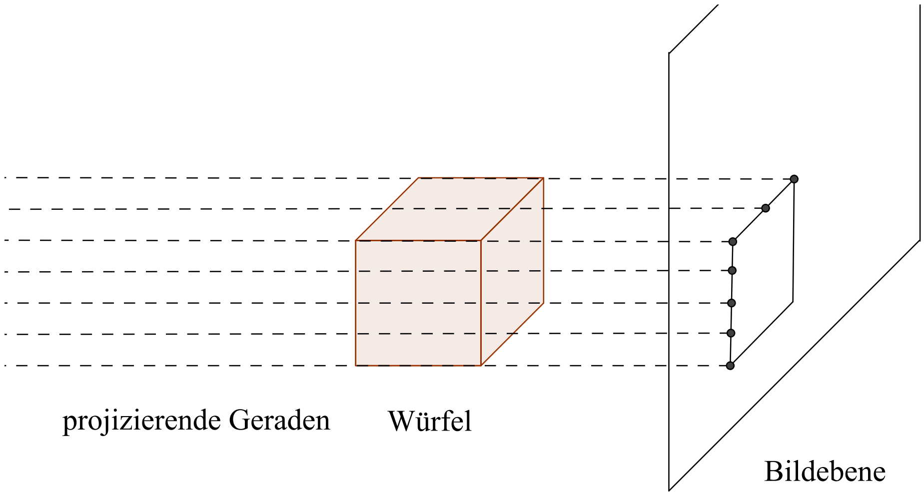
Klaus Volkert

Vorbemerkungen zur Terminologie

Ein aus vielerlei Gründen interessantes und wichtiges Problem ist die zweidimensionale Darstellung von dreidimensionalesn Situationen - im einfachsten Fall eines Körpers, wie beispielsweise ein Würfel. Unter den vielen Möglichkeiten, die es hierzu gibt, sind die **Parallel-** und die **Zentralprojektion** - letztere wird auch oft Perspektive genannt - besonders wichtig.

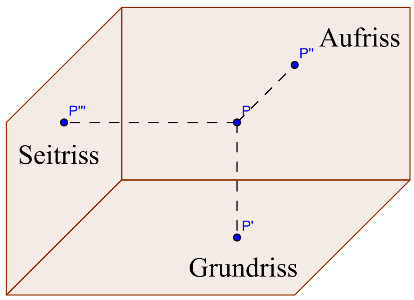
Bei der **Parallelprojektion** verwendet man als projezierende Strahlen (Geraden) solche, die parallel zueinander sind. Dies wird in guter Näherung realisiert durch die Lichstrahlen, die von der Sonne ausgehend die Erde erreichen. Sind nun ein Körper - der Einfachheit halber nehmen wir den Würfel - und eine Bildebene gegebene, in die der Würfel projiziert werden soll, so ergeben sich die Bildpunkte der Würfelpunkte als die Schnittpunkte der projizierenden Geraden mit der Bildebene, welche durch den jeweiligen Würfelpunkt gehen.

Die Seitenfläche des Würfels ist parallel zur Bildebene.



Stehen die projezierenden Strahlen senkrecht auf der Bildebene, so liegt eine orthogonale Parallelprojektion vor, sonst eine schräge. Orthogonale Parallelprojektionen sind in der Technik sehr wichtig, denn sie bilden Strecken, die parallel zur Bildebene liegen, längentreu ab.

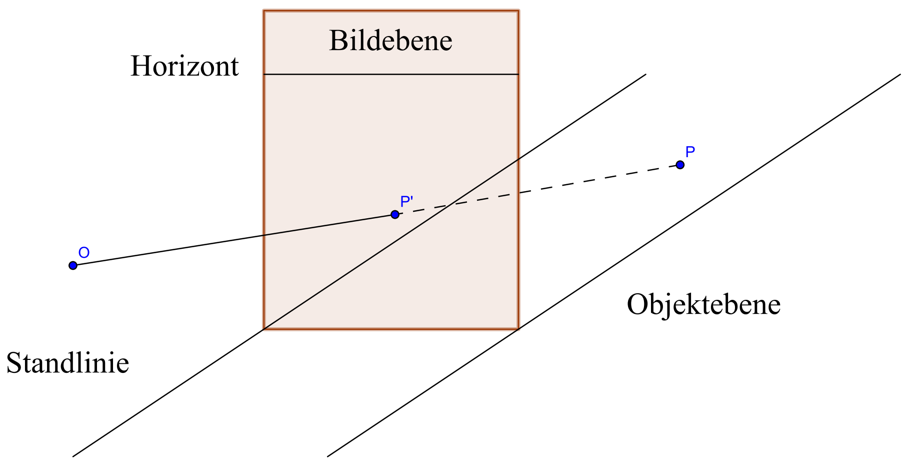
Zwei- und Dreitafelprojektionen (Grundriss, Aufriss, Seitriss).



Die **Zentralprojektion** (Perspektive) gibt in recht guter Näherung das einäugige Sehen und das Abbildungsverhalten von Kameras etc. wieder. Man charakterisiert sie deshalb als *illusionistisch*.

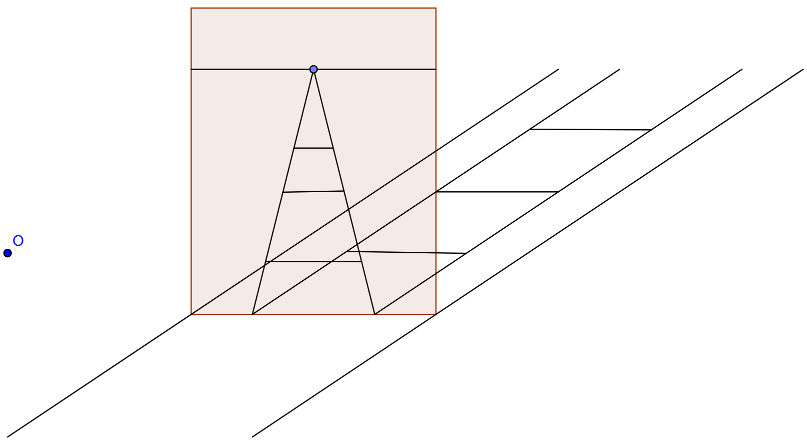
Ersetzt man den abzubildenden Körper durch eine Ebene (Vereinfachung!), so kann man die Zentralprojektion beschreiben als Abbildung der einen Ebene - die **Objektebene** - in die andere Ebene - die **Bildebene**.

Bild- und Objektebene.



Auf dem Horizont - das ist diejenige Gerade in der Bildebene, welche durch den Lotfußpunkt des Lotes von O (das ist der Augpunkt) auf die Bildebene geht und die parallel zur Standlinie (den Durchschnitt von Bild- und Objektebene) ist - liegen Punkte der Bildebene, welche nicht Bildpunkte von Punkten der Objektebene sind: Die projizierenden Geraden verlaufen parallel zur Objektebene. Es gibt aber auch Punkte der Objektebene, welche keine Bildpuntke haben - nämlich Punkte der Geraden, welche Schnitt der Objektebene mit der zur Bildebene parallelen Ebene durch O ist.

Die Zentralprojektion kann eigentlich alle gängigen geometrischen Merkmal verändern: Streckenlängen, Winkelbreiten, Verhältnisse, Flächeninhalte, ... Eine ihrer erstaunlichsten Eigenschaften ist, dass sie Parallelen auf schneidende Gerade abbilden kann:

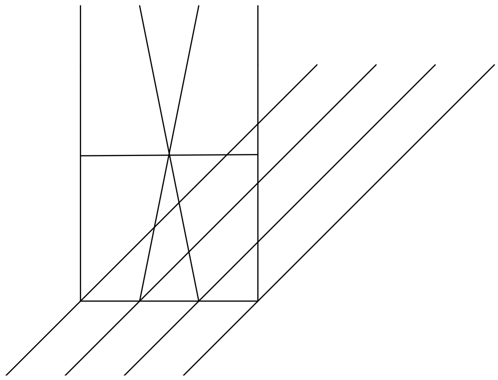


Ausgenommen hiervon sind Parallelen der Objektebene, welche parallel zur Standlinie verlaufen. Diese werden auf parallele Geraden der Bildebene, parallel zur Standlinie, abgebildet.

Konzeptual interessant ist, dass der Augpunkt die Homogenität des Raumes gewissermaßen aufhebt: Die Zentralperspektive zeigt die Sicht *von einem bestimmten Punkt aus* - ein anderer Punkt gibt in der Regel eine andere Sicht. Eine sehr naheliegende Frage ist nun: Was haben zwei perspektivische Bilder ein und desselben Gegenstandes miteinander gemein?

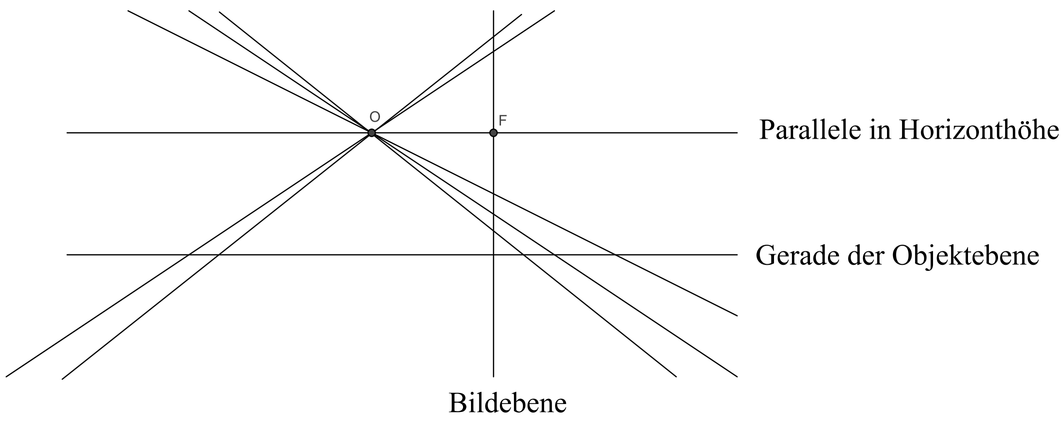
Unendliche ferne Punkte

Betrachten wir nochmals die Situationen von oben, kompletieren diese aber jetzt so, dass wir Bilder von ganzen Geraden bekommen (was künstlerisch natürlich nicht so relevant ist):

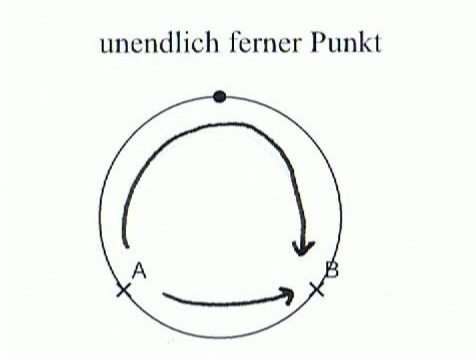


„Oberhalb” des Horizontes liegen die Bilder desjenigen Teils der Geraden, welcher bezüglich des Augpunktes auf derselben Seite liegt wie der Augpunkt (bezogen auf die Bildebene). Genau genommen gibt es eine Lücke, da nicht alle in diesem Teil der Gerade liegenden Punkte Bildpunkte besitzen.

Im Bild hängen die beiden Teile der Geraden durch den mysteriösen Punkt auf dem Horizont miteinander zusammen. Ein ebener Schnitt durch die Gesamtfigur, welcher durch O verläuft und der Einfachheit halber durch die Mittelparallele der beiden gegebenen Parallelen verläuft, würde folgendes Bild ergeben:



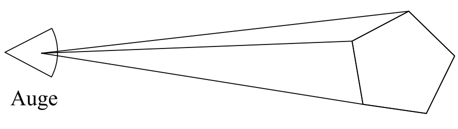
Man sieht: Je weiter die Punkte, die projiziert werden, in der Objektebene sich von der Standlinie entfernen (und das gilt für beide Richtungen gleichermaßen!), desto näher rücken deren Bildpunkte an den Punkt F heran (von „unten” bzw. von „oben”). Der Punkt F selbst entspricht gewissermaßen dem unendlich weit entfernten Punkt der abgebildeten Geraden - einem Punkt, den man zur Gerade „hinzu erfindet”. Es genügt dabei - wie die obige Überlegung zeigt - einen unendlich fernen Punkt zur Gerade hinzu zu fügen (und nicht etwa zwei: auf jeder Seite einer). Die beiden „Enden” der Geraden hängen jetzt über den unendlich fernen Punkt zusammen: Um von A nach B zu gelangen, gibt es zwei Wege: den üblichen „endlichen” und den unüblichen, der über den unendlich fernen Punkt führt.



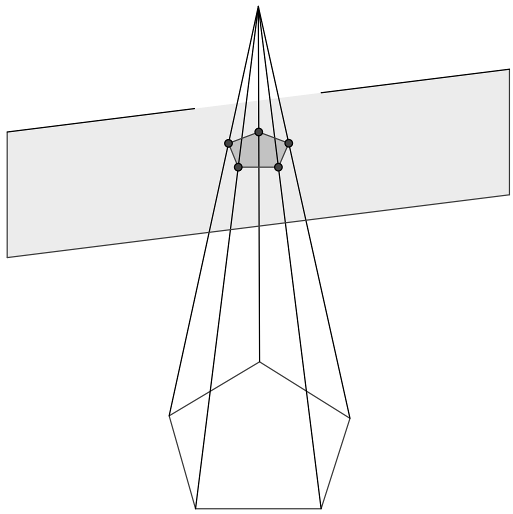
Die Aussage „C liegt zwischen A und B” verliert offensichtlich ihren Sinn, denn die Anordnung von Punkten ist nicht mehr jene von Punkten auf Geraden, sondern die von Punkten auf Kreisen.

Stellen wir uns nun wieder vor, wir projizieren zwei parallele Geraden. So erkennt man sofort, dass der fragliche Punkt F - der ja den unendlichen fernen Punkten der beiden Geraden entspricht - zeigt, dass die beiden Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen.

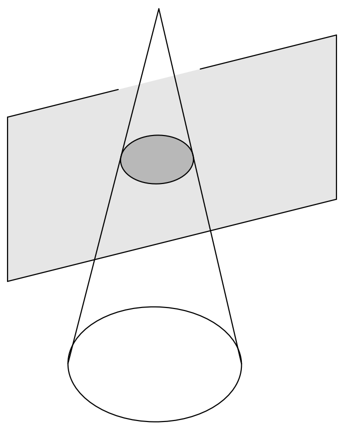
Die Zentralperspektive kann man verstehen als einen ebenen Schnitt durch dir Sehpyramide (Sehkegel):



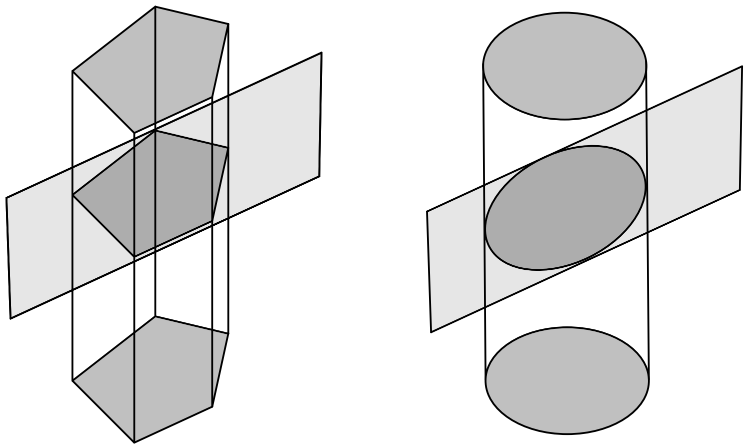
Das perspektive Bild dieses Fünfecks entsteht, wenn die Fünfeckspyramide (ihre Basis ist das Fünfeck, ihre Spitze der Augpunkt) mit einer Ebene schneidet:



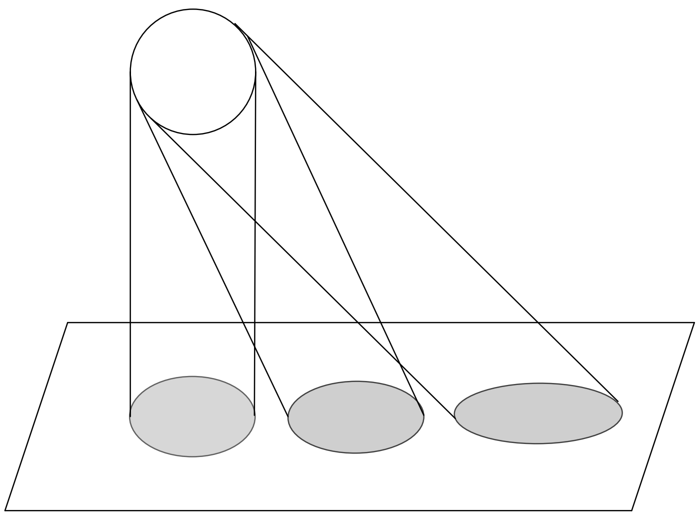
Analog ergeben sich die perspektivischen Bilder eines Kreises als ebene Schnitte von Kegeln: Kegelschnitte.



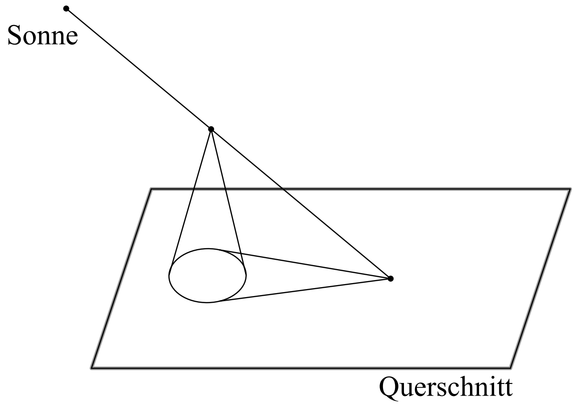
Bei der Parallelprojektion treten an die Stelle von Pyramiden und Kegeln Prismen und Zylinder.



Solche Überlegungen spielen auch bei der Konstruktion von Schatten eine wichtige Rolle:



Hierbei gibt es einen „wirksamen Körperquerschnitt", welcher die Schattenbildung steuert, bei der Kugel ist dies ein Kreis.



Beim Kegel ist der „wirksame Querschnitt" ein Dreieck.

Vergleich Zentral- und Parallelprojektion

	Zentralprojektion	**Parallelprojektion**
Geraden	Bild ist Gerade oder Punkt	
Parallele Geraden	Bilder sind parallel oder kopunktual	Bilder sind parallel oder zwei Punkte
Senkrechte Geraden	Bilder sind i.a. nicht mehr senkrecht	Bilder sind i.a. nicht mehr senkrecht
Längen paralleler Strecken	Ändern sich i.a. nicht mit dem selben Faktor	Ändern sich mit dem selben Faktor
Teilung einer Strecke	Teilverhältnis bleibt i.a. nicht erhalten	Teilverhältnis bleibt erhalten
Mittelpunkt einer Strecke	Wird i.a. nicht auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet	Wird auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet
Quadrat	Kann beliebiges konvexes Viereck sein	Parallelogramm
Kreis	Bild ist ein nicht-entarteter Kegelschnitt	Bild ist Ellipse oder im Sonderfall ein Kreis

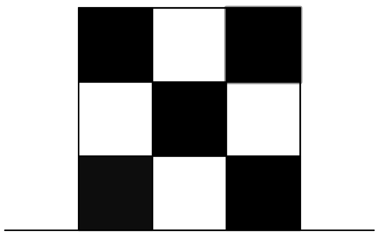
1 Die Entdeckung der Perspektive

Umstritten ist, ob und in welchem Umfang in der Antike schon die Perspektive bekannt war. Die Befürworter dieser These verweisen meist auf die sogenannte Szenographie als eine Technik zur Erzeugung von Bühnenbildern mit *illussionistischer* Absicht.

Unstrittig ist, dass die Geschichte der Perspektive im christlichen Abendland etwa im 14. Jahrhundert in Italien beginnt. Als Motive, die das Interesse der Perspektive förderten, werden genannt (vgl. Andersen 2007, 3-11):

1. **Der Wunsch, eine Ansicht zu malen**.
   Dabei sollen alle abgebildeten Objekte richtig angeordnet sein und zwar so, wie sie sich von einem bestimmten Punkt aus gesehen darboten. Die gemalte Szene liefert die selben visuellen Eindrücke wie die Originalszene. Alberti (1435): Das Gemälde soll dem Betrachter den selben Eindruck vermitteln, wie er ihn hätte, wenn er von einem festen Punkt aus die abgebildete Szene durch ein Fenster betrachten würde.

2. **Die Frage, wie ausgezeichnete Geraden darzustellen seien.**
   Dabei geht es um die konkrete Darstellung von Geraden, die senkrecht zur Standlinie in der Objektebene verlaufen sowie um die zur Standlinie parallelen Geraden der Objektebene. Ein typisches Beispiel hierfür ist ein Schachbrettmuster, wie man es oft auf perspektivischen Gemälden als Plattenmuster auf Böden findet.



(Objektebene)

Standlinie

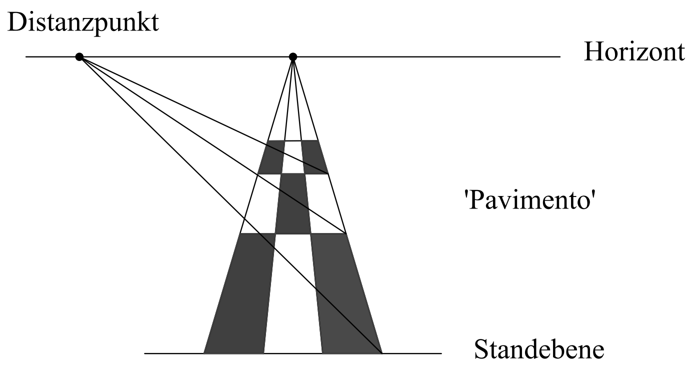
Die fraglichen Geraden - wir nennen sie im Anschluß an Andersen Orthogonalen und Transversalen - fallen als Strukturelemente prägnant ins Auge.

Insofern ist ihre konkrete Darstellung besonders wichtig.
Hierzu braucht man drei Regeln:

(a) Die Bilder der Orthogonalen laufen im Hauptpunkt zusammen.

(b) Die Bilder der Transversalen bleiben parallel.

(c) Die Abstände zwischen den Bildern der Transversalen nehmen gesetzmäßig ab, wenn sie sich von der Standlinie entfernen. Die große Frage ist natürlich: Wie? Alberti kritisierte z.B. einen Vorschlag, der immer den Faktor $\frac{2}{3}$ vorsah. Die richtige Lösung liefert die Idee des Distanzpunktes (Abstand Augpunkt - Bildebene).



3. **Die Suche nach mathematischen Gesetzmäßigkeiten**.
Diese steht in Beziehung zum Wiedererstarken von Pythagoreischen Gedankengut in der Renaissance: Die Welt inklusive ihrer adäquaten Darstellung sollte mathematischen Prinzipien (bei den Pythagoreern: Zahlenverhältnisse) gehorchen

4. **Anregung durch optische Theorien**
Aus der Optik wurde die Theorie übernommen, dass sich Licht geradlinig ausbreitet. Eine wichtige Rolle spielte die Erkenntnis, dass Strecken, die unter gleichgroßem Sehwinkel erfasst werden, gleichlang erscheinen und dass Parallelen konvergent gesehen werden können.

Von Interesse ist hierbei die Frage, ob neben antiken Quellen zur Optik wie Euklid und Vitruv auch der arabische Einfluss - insbesondere der der Optik von Ibn al Haitam - eine Rolle gespielt hat. Eine besonders dezidierte Meinung hierzu findet sich bei H. Belting:

„Es [das Argument, das der Autor in seinem Buch entwickelt] besagt, dass der Kunst der Perspektive eine Theorie arabischen Ursprungs zugrunde lag, eine mathematische Theorie der Sehstrahlen und der Geometrie des Lichts" (Belting 2008, 9)

Das Werk, um das es hier geht, ist al Haitams „Buch der Optik", das im Abendland unter dem Titel „Perspectiva" bekannt war.

Filippo Brunelleschi (1377 - 1446), Goldschmied und Architekt, gilt allgemein als der erste, der perspektivische Bilder gemalt hat: Zum einen ein Bild der Kirche Santo Giovanni in Florenz, zum anderen eines des Palazzo dei Signori dasselbst. Sein Biograph A. Manetti berichtet ca. 1480, Brunelleschi habe eine komplizierte Anordnung mit Beobachter und Spiegel verwendet, um seine Mitmenschen zu überzeugen. Nähere Angaben fehlen und zudem existieren die beiden Bilder von Brunelleschi nicht mehr. Folglich muss man spekulieren.

Ein Vorschlag lautet

1. Brunelleschi malt ein perspektivisches korrektes Bild der Kirche. Dieses versieht er mit einem Guckloch in der Mitte.

2. Ein Beobachter wird exakt an die Stelle positioniert, von der aus Brunelleschi die Kirche gemalt hat.

3. Zwischen Beobachter und Kirche direkt vor dem Beobachter wird das Bild gebracht, so dass der Beobachter auf seine Rückseite schaut.

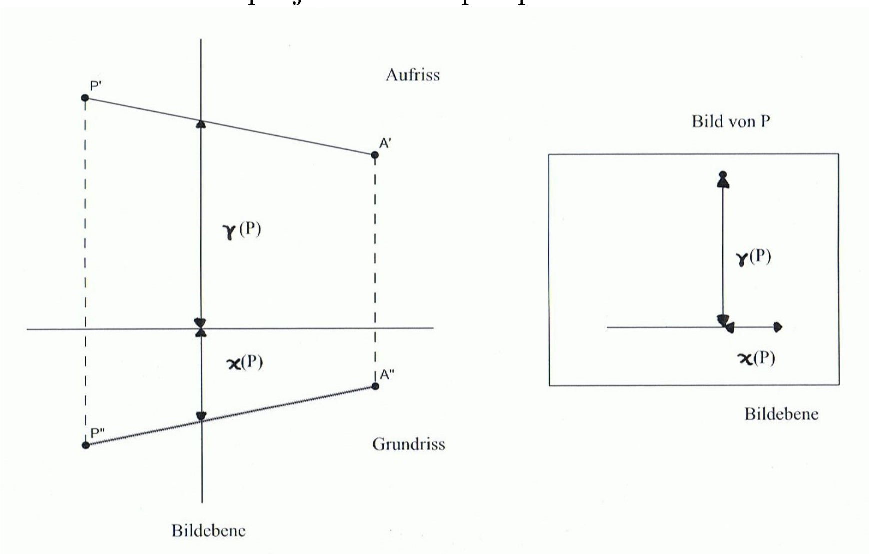
4. Der Beobachter blickt durch das Guckloch und sieht so die Kirche. Brunelleschi hält einen großen Spiegel vor das Bild.

5. Der Beobachter sieht durch das Loch das Spiegelbild von Brunelleschis Gemälde der Kirche und kann keinen Unterschied erkennen.

Es gibt mehrere Vorschläge dazu, wie Brunelleschi sein Bild konstruiert haben könnte (vgl. Andersen 2007,13).

Einer dieser Vorschläge, der einem Zeugnis von Giorgio Vasari (1511 - 1574) folgt, beruht darauf, dass man aus der Zweitafelprojektion das perspektivische Bild als Schnitt durch den Sehkegel konstruiert („Durchschnittsmethode" - vgl. Seriba/Schreiber 2001, 251):

Zweitafelprojektion und perspektivisches Bild



So kann man theoretisch das perspektivische Bild punktweise konstruieren. Praktisch ist das natürlich sehr aufwendig.

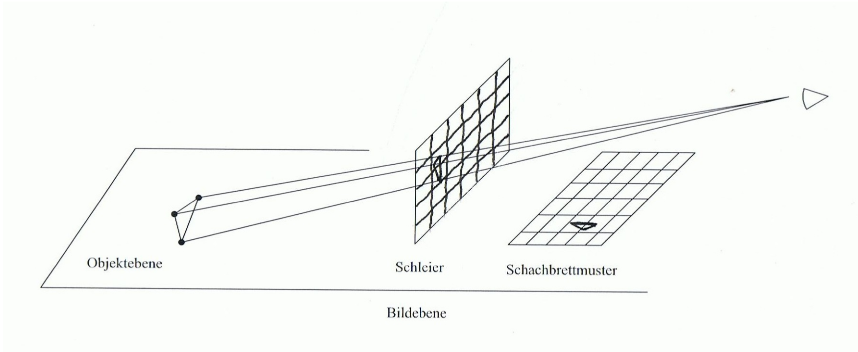
Es dauerte rund 100 Jahre, bis das erste Lehrbuch der Perspektive erschien. Der Autor war Leon Baltista Alberti (1404 - 1472) und der Titel des Buches lautete „De pictura". Etwa 40 Jahre später erschien ein Buch, das ausschließlich der Perspektive gewidmet war: „De perspectiva pingendi" von Piero de la Francesca (~1425 - 1492).

Alberti empfing wesentliche Anregungen während seines Aufenthaltes in Florenz (ab ca. 1430), wo er vermutlich auch Brunelleschi traf. In „De pictura" setzte sich Alberti für die Aufwertung der Maler und ihrer Ausbildung ein. Er entwickelte darin auch die Modellvorstellung, ein perspektivisches Bild sei ein ebener Schnitt durch die Sehpyramide.

Alberti	Modern
Bild ist ebener Schnitt durch die Sehpyramide	Bild ist Bild unter Zentralprojektion auf die Bildebene

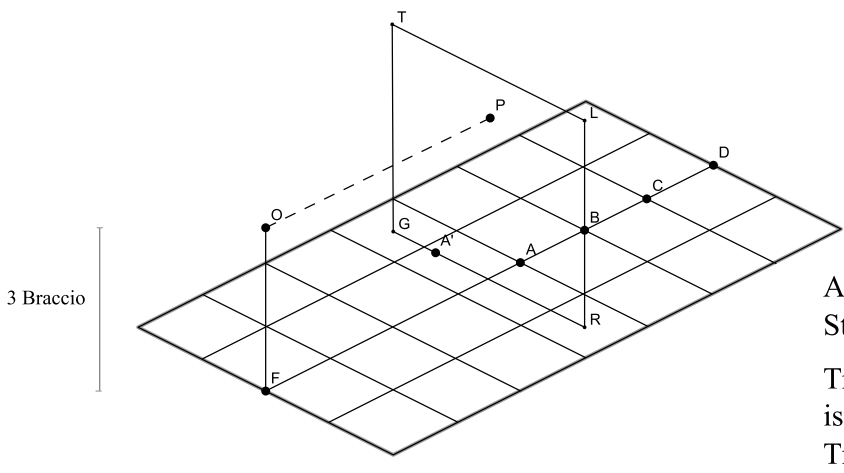
Alberti beschrieb zwei Methoden zur Konstruktion perspektivischer Bilder:

1. **Der „locker gewebte Schleier"** (Fadengitter - vgl. Dürer „Unterweisung")

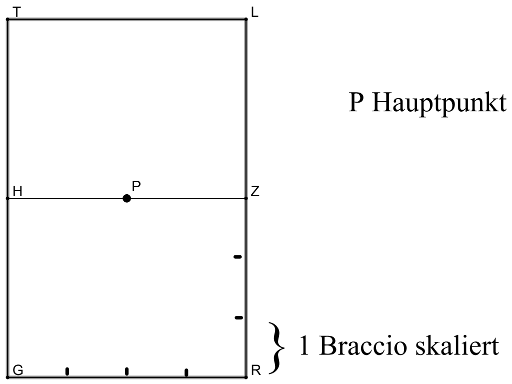


   Der Schleier dient dazu, die Bildpunkte zu lokalisieren. Diese werden in das Schachbrettmuster (Gitter) übertragen. Offensichtlich werden hier implizit Koordinaten verwendet.

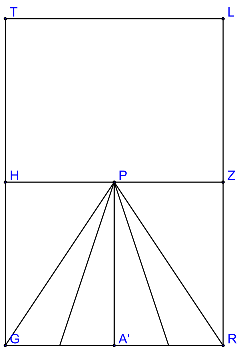
2. **Die „constructione legitima"** (Guckkasten)
   Die Grundidee hierbei ist, ein quadratisches Gitter der Objektebene in die Bildebene abzubilden, wobei diese als Fenster vorgestellt wird, durch das das Muster gesehen wird. Der Maler steht vor dem Fenster:



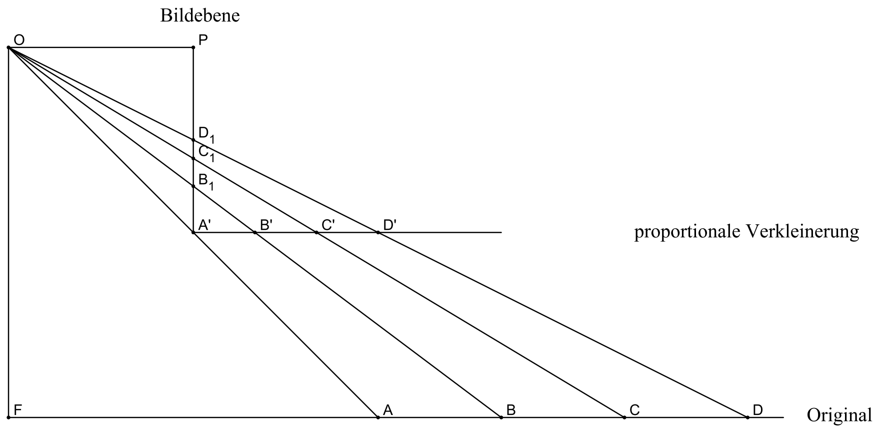
Die Quadrate der Objektebene sind ein Braccio auf ein Braccio groß (ca. 60cm x 60 cm).



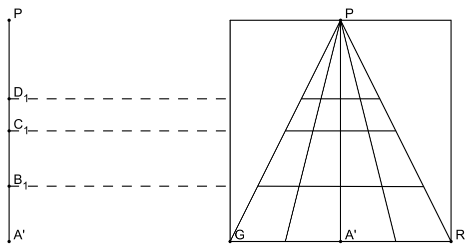
Da der Rahmen - das Bild - i.a. deutlich kleiner ist in seinen Abmessungen als das Muster in der Objektebene, verkleinert („skaliert") man die Einheit (hier „Bracchio") z.B. auf ein Zehntel.
Konstruktion der Bilder der Vertikalen: Laufen im Hauptpunkt P zusammen.



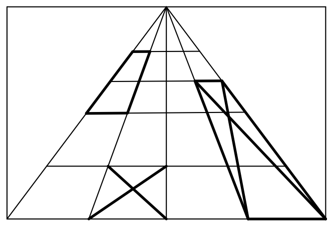
Konstruktion der Bilder der Transversalen: Betrachte Längsschnitt durch O, P und A':



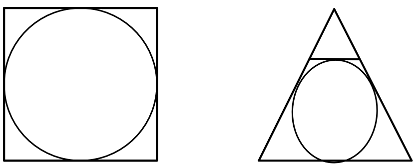
Dabei ist $A'B' : AB = B'C' : BC = C'D' : CD$ der **Skalierungsfaktor**. $A'B_1$, B_1C_1, C_1D_1 sind die Tiefenabstände für die Bilder der Transversalen



Mit Hilfe des Gitternetzes kann man Bilder anderer Figuren konstruieren, z.B. ins Gitternetz eingezeichnete Rechtecke oder den perspektivischen Mittelpunkt eines Quadrats oder Rechtecks.

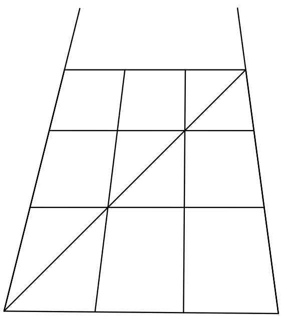


Auch das perspektivische Bild eines Kreises kann man so angenähert erzeugen:

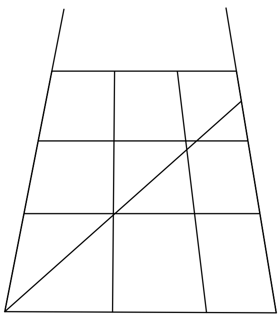


Man beachte die Erhaltung der Tangenteneigenschaft.

Albertis Test: Die Bilder von Quadraten des Schachbrettmusters, welche eine gemeinsame Ecke besitzen, müssen eine gemeinsame Diagonale zulassen.



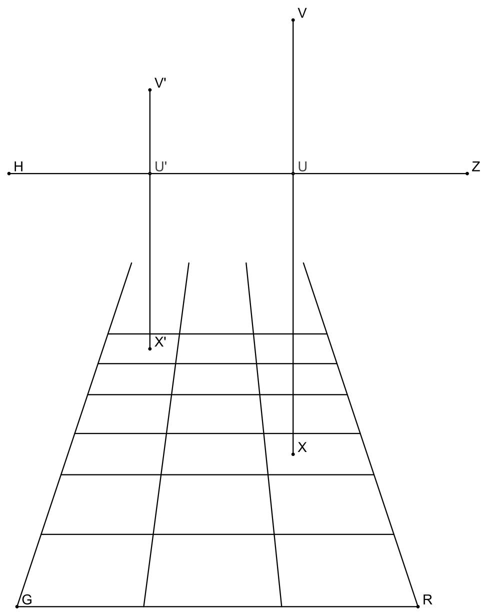
korrekt



nicht korrekt

Damit kann man z.B. feststellen, dass eine Verkleinerung mit einem konstanten Faktor zu keinem korrekten Ergebnis führt. Albertis Test lenkte die Aufmerksamkeit auf die Diagonalen. Diese sollten später - bei P. della Francesca (siehe unten) - eine wichtige Rolle spielen. Im übrigen gibt Alberti keine Begründungen für seine Vorgehensweisen. Es handelt sich um praktisch bewährtes Wissen, das jetzt theoretisch aufgearbeitet wird.

Alberti erklärt auch, wie man vertikale Strecken mit ihren Längen korrekt darstellt. Sei X ein Punkt des Schachbrettmusters. In diesem soll eine senkrechte Strecke der Länge n barccio errichtet werden.



$X'V'$und XVsind in „Wirklichkeit" gleichlang.

Die Strecke XU repräsentiert die Höhe des Augpunktes über der Objektebene, also in unserem Beispiel 3 braccio. Soll z.B. die Strecke 5 braccio abgebildet werden, so muss offensichtlich gelten

$$XV : XU = 5 : 3$$

oder allgemein

$$XV : XU = n : 3.$$

Man sieht schon aus dem obigen Beispiel: Gleiche Längen werden bei Annäherung an den Horizont kürzer dargestellt.

Insgesamt scheint Albertis Wirkung eher begrenzt gewesen zu sein. Man findet selten Zitate seines Buches und es gibt keine konkreten Hinweise, dass seine Methoden in der Praxis tatsächlich Anwendung fanden.

Ein weiterer wichtiger Autor zur Perspektive was der Maler Pierro della Francesca (~1420 - 1492).

P. wurde - wie der Mathematiker Luca Pacioli (1445 - 1517) - in Borgo San Sepolcro geboren, wo er auch aufwuchs. 1439 arbeitete er in Florenz bei D. Veneziano. Später findet er sich in Ferrara, Remini, Arezzo, Rom und Urbino. Er war darüber hinaus immer wieder in der Verwaltung seiner Heimatstadt beschäftigt, wo er auch starb.

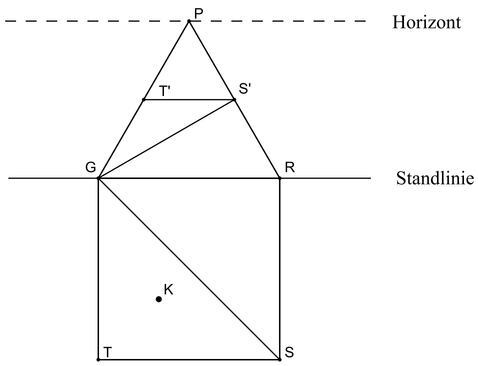
Es gibt von Pierro della Francesca drei mathematische Abhandlungen:

- De perspectica pigendi
- Trattato d'abaco
- Libellus de quinque corporibus regularibus

Umstritten ist, wie viel L. Pacioli, der eine Art Schüler von della Francesca geworden ist, von diesen übernommen hat. Das gilt insbesondere für Paciolis Hauptwerk, die „Summa de arithmetica" (1494 in Venedig gedruckt). Daneben verfasste Pacioli „De devina proportione" (1509), ein Buch, das sich dem Goldenen Schnitt widmete. Die Illustrationen in diesem Werk stammen von Leonardo da Vinci, der bei Pacioli Mathematikunterricht erhalten hatte. Die beiden schrieben 1500 zusammen ein Buch über das Schachspiel.

In seinem Buch über die Perspektive beschreibt della Francesca nicht nur Verfahren, sondern versucht auch, Begründungen zu liefern. Es wurde vermutet (J. Elkins), dass er hierbei von unveröffentlichten Erläuterungen Albertis profitiert habe, wofür es aber keinen wirklichen Beweis gibt.

Della Francesca gibt eine Methode an, wie man den Bildpunkt eines beliebigen Punktes bestimmen kann. Dazu geht er davon aus, dass in der Objektebene ein Quadrat gegeben ist. Der Einfachheit halber - die Zeichnungen werden dann übersichtlicher - liege eine Kante des Quadrats (und folglich eine Seite seines Bildes) auf der Standlinie.

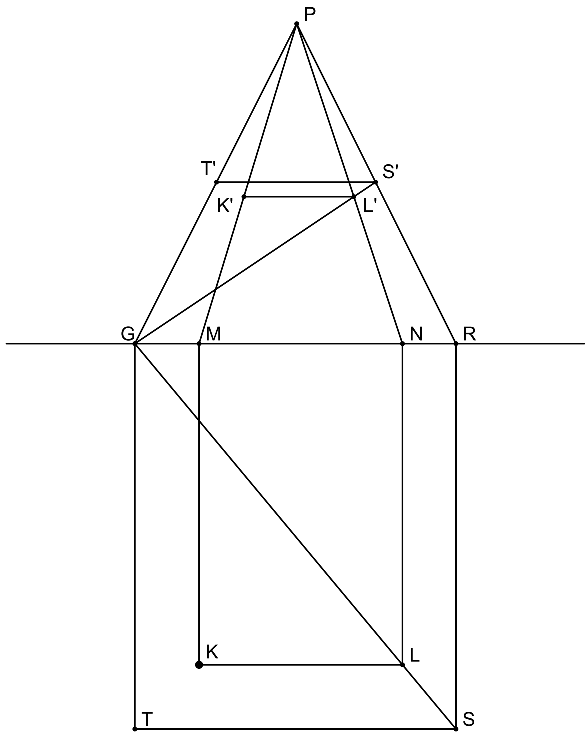


S', T'sind die Bilder von S, T. Gesucht ist K'.

Bemerkung: Die Einführung von Hypothesen ist ein charakteristisches Merkmal vom theoretischen Denken.

Klar ist: Fällen wir das Lot von K auf GR mit Lotfußpunkt M, so muss K'auf der Strecke MP liegen und zwar „unterhalb" von $T'S'$. Die Frage ist nur, wo?

Die entscheidende Idee ist, Punkte als Schnittpunkte von solchen Geraden festzulegen, deren Bilder bekannt oder einfach konstruierbar sind. Hierzu gehören die Kanten des Quadrats, dessen Diagonalen und alle Senkrechten zur Standlinie. Bekannt ist darüber hinaus, dass Parallelen zur Standlinie auf Parallelen zur Standlinie abgebildet werden. Um diese lokalisieren zu können, braucht man allerdings einen Punkt und seinen Bildpunkt.



Konstruktion:

1. Fälle von K das Lot auf GR mit Fußpunkt M.
2. Ziehe Parallele zu GR durch K, Schnittpunkt mit Diagonale GS sei L.
3. Fälle von L das Lot auf GR mit Fußpunkt N.
4. Verbinde M mit P.
5. Verbinde N mit P. Schnittpunkt mit dem Bild der Diagonalen GS' ist L'.
6. Ziehe die Parallele zur Standlinie durch L'.
7. K' ist Schnittpunkt dieser Diagonalen mit MP.

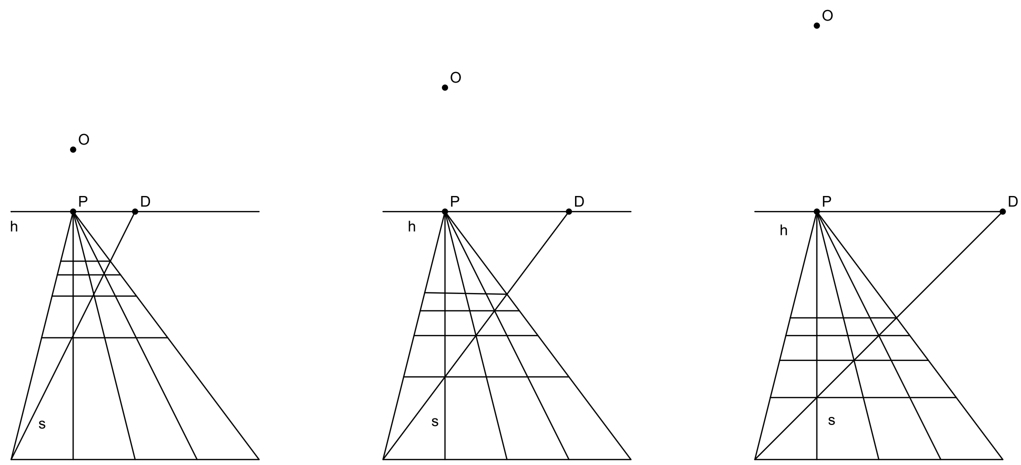
Prinzip: Ist ein Punkt A Schnittpunkt der Geraden g und h, so ist A' der Schnittpunkt von g' und h'.

In der Sprache der modernen Geometrie drückt man das so aus: Bei Zentralprojektionen werden **Inzidenzbeziehungen** erhalten. Deshalb sagt man auch, dass dies die **Geometrie des Lineals** ist - der Zirkel verliert dagegen seine Bedeutung, weil der für die Streckenlängen steht. **Graphische Beziehungen** bleiben erhalten (gemeint: zeichnerisch mit Lineal), **metrische** nicht (Maßbeziehungen).

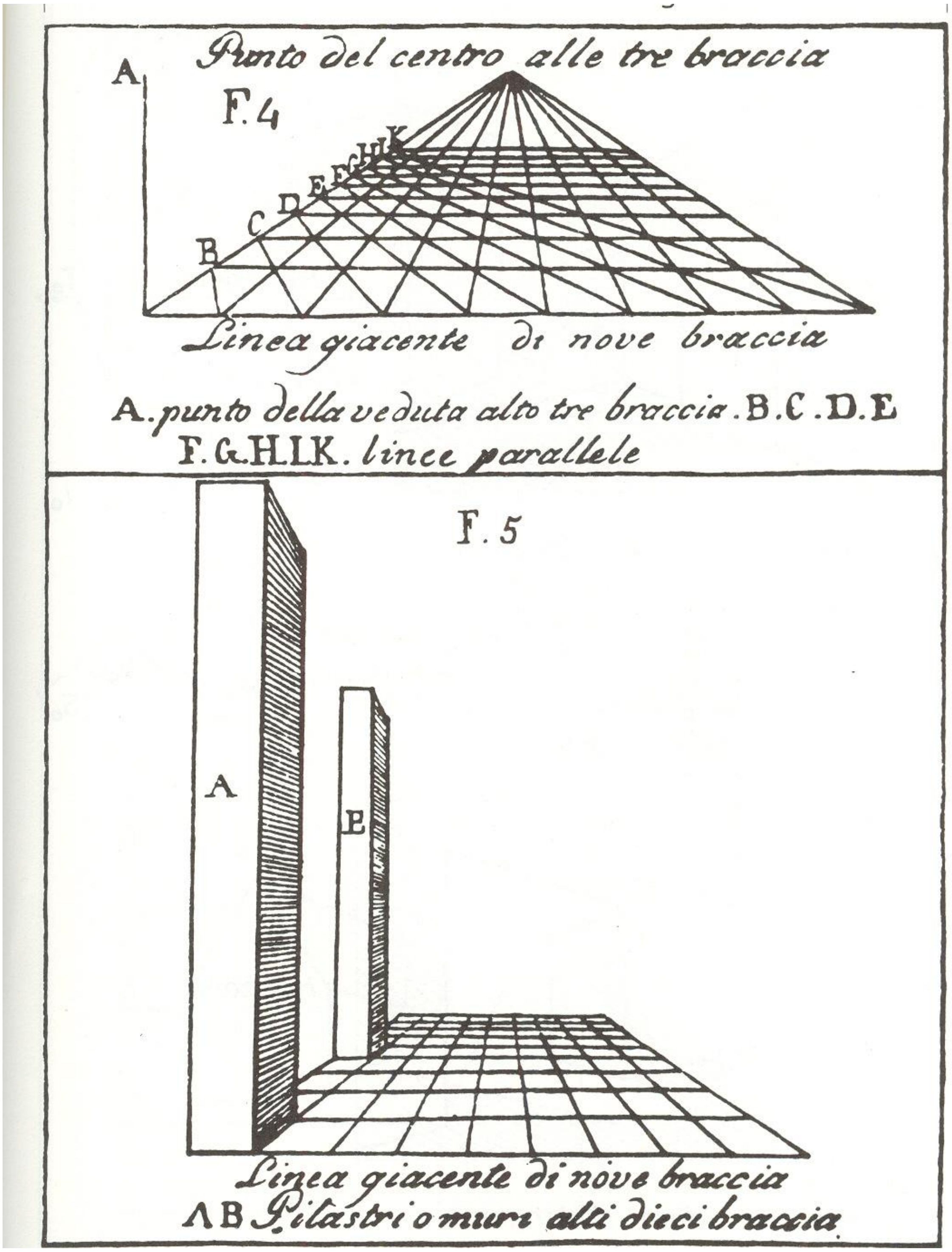
Die oben genannte Konstruktion von K' lässt sich leicht - unter den obigen Voraussetzungen (nämlich, dass das Bildviereck $GRS'T'$ gegeben ist) - auf die Konstruktion des Bildes eines Schachbrettes erweitern.

Wie aber findet man dieses Bildviereck? Hierzu bietet della Francesca die **Methode des Distanzpunktes** an.

Der Distanzpunkt D (genauer gesagt gibt es davon zwei) ist derjenige Punkt auf dem Horizont, dessen Abstand zu P (dem Hauptpunkt) gleich dem Abstand des Augpunktes O von der Bildebene ist.



Es ist $d(O, h) = |PD|$. Der Distanzpunkt ist der Fluchtpunkt der Bilder aller Geraden, welche mit der Standlinie einen 45°-Winkel bilden.

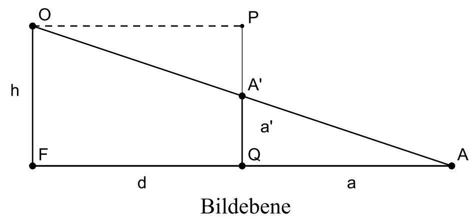


Leon Battista Alberti

Unklar ist, wie P. della Francesca auf den Distanzpunkt gekommen ist, und ob er schon vor ihm bekannt war.

Pierro della Francesca gibt ein Argument an, mit dem er zeigen will, dass die Distanzpunktmethode korrekt ist. Hierzu braucht er einen Hilfssatz, in dem berechnet wird, wie sich bestimmte Strecken (solche auf Vertikalen und Horizontalen gelegene) bei der Perspektive verkürzen.

1. **Strecken auf Vertikalen mit Anfangspunkt auf der Standlinie**. Sei h die Höhe des Augpunktes über der Objektebene, d der Abstand des Augpunktes O von der Bildebene („Distanz"). Die Bildebene stehe senkrecht auf der Objektebene, Bildpunkte werden mit ' bezeichnet. Es bezeichne a die Länge der zugehörigen Bildstrecke.

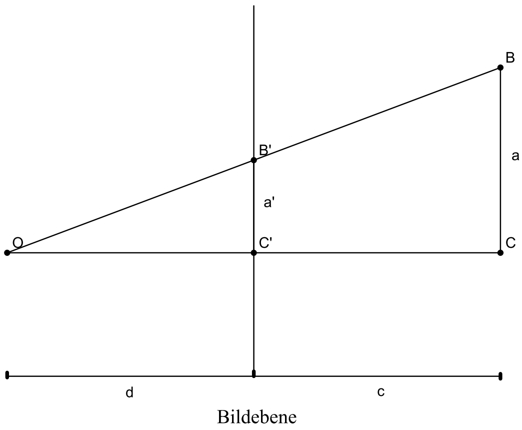


Es ist△A′QA ähnlich△OFA (△A′QA ∼ △OFA nach WW [Winkel bei A gemeinsam, beide Dreiecke sind rechtwinklig]). Also gilt:

$$a' : h = a : (d + a) \tag{1}$$

Für gegebenes a, h und d ist somit a' festgelegt. Insbesondere hängt a' von d ab: Je größer d, desto kleiner a' (bei festem a und h). Dagegen ist a' direkt proportional zu h.

2. **Strecken auf Transversalen**. Dieses Problem wird von della Francesca nur in einem Sonderfall (s. unten) gelöst; die allgemeine Aussage (2) findet sich bei ihm nicht.



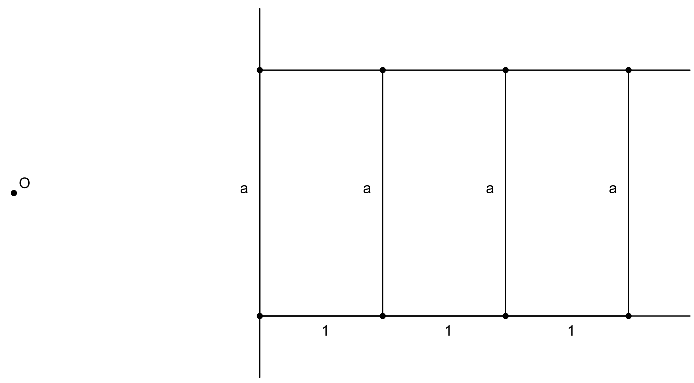
   Es bezeichne c den Abstand der Parallelen zur Bildebene, in der die abzubildende Strecke liegt. Die obige Zeichnung ist ein ebener Schnitt; die Schnittebene ist festgelegt durch O und die Strecke BC. Die Dreiecke OBC und $OB'C'$ sind wieder ähnlich (man könnte auch den Strahlensatz nehmen). Es ergibt sich:

$$a' : a = d : (d + c)$$

   [Man kann d als Höhe des Dreiecks $OB'C'$ realisieren, $d + c$ als Höhe des Dreiecks OBC.]
   Also gilt: Je größer c, d.h. je weiter die abzubildende Strecke von der Bildebene entfernt ist, desto kleiner a'. Die Höhe des Augpunktes spielt diesmal keine Rolle, was ja auch klar ist.

Man sieht, dass sich für vertikale und transversale Strecken unterschiedliche Verkürzungsverhältnisse ergeben. Und für beliebige Strecken kann keine Rede von einem festen Verkürzungsverhältnis sein! Das macht u.a. die Perspektive mathematisch schwierig.

Piero selbst betrachtet einen Spezialfall: vier parallele gleichlange Strecken, deren erste in der Standlinie liegt und deren Abstände jeweils 1 braccio betragen.



Für die Längen der Bilder ermittelte er folgende Verhältnisse (a_i sei die Strecke im Abstand i braccio, a'_i die Länge von deren Bild):

$$a'_3 : a'_2 = 6 : 7 = 60 : 70$$

$$a'_2 : a'_1 = 5 : 6 = 70 : 84$$

$$a'_1 : a'_0 = 4 : 5 = 84 : 105$$

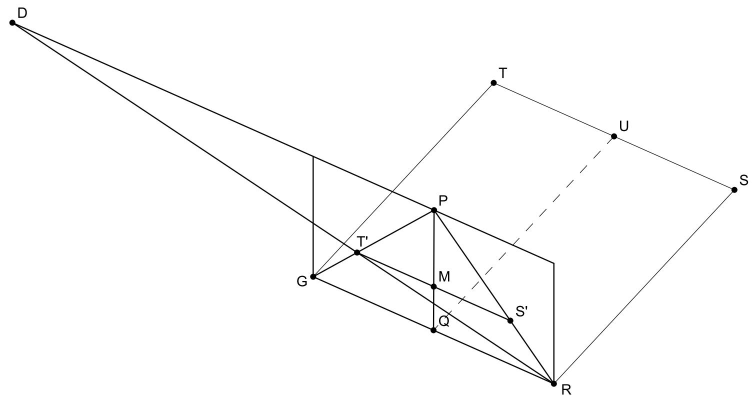
[Es ist $a'_0 = a$!]. Also:

$$a'_3 : a'_2 : a'_1 : a'_0 = 60 : 70 : 84 : 105$$

Foglich ist a'_3 grob gleich $\frac{1}{2}a$.

Mit Hilfe von Aussage (1) ist es möglich, die Korrektheit der Distanzmethode für bestimmte Strecken - solche, die vertikal zur Standlinie sind und ihren Anfangspunkt auf der Standlinie haben - bzw. für entsprechende Quadrate nachzurechnen.

Wir gehen also von folgender Situation aus:



$GRST$ ist ein Quadrat in der Objektebene, wobei die Strecke GR in der Standlinie liegen soll (Objekt- und Bildebene sind senkrecht zueinander angenommen). P ist der Hauptpunkt, d.h. der Lotfußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildebene. D ist der Distanzpunkt. Der Bildpunkt T'von T wird nach der Distanzpunktmethode konstruiert. Man verbinde G und R mit P sowie R mit D. Dann ist T' der Schnittpunkt von $\overline{\mathrm{GP}}$ mit $\overline{\mathrm{RD}}$. Nun ziehe man die Parallele zur Standlinie durch T'. Deren Schnittpunkt mit RP ist S'. PQ sei die Höhe im Dreieck GRP, der Lotfußpunkt sei Q, der Schnittpunkt mit $\overline{\mathrm{T'S'}}$ sei M. Dann ist $\overline{\mathrm{QM}}$ das Bild der Strecke $\overline{\mathrm{QU}}$, wobei U der Schnittpunkt der in Q in der Objektebene errichteten Senkrechten auf GR ist.
Wir rechnen jetzt nach, dass $\overline{\mathrm{QM}}$ zu $\overline{\mathrm{QU}}$ im richtigen Verkürzungsverhältnis steht, nämlich in demjenigen, das wir oben ausgerechnet haben.
Dabei ist $|\overline{PQ}| = h$, die Höhe des Augpunktes über der Objektebene, $d = |\overline{DP}|$ die Distanz und $|\overline{QU}| = a = |\overline{GT}| = |\overline{RS}|$ die Länge der abzubildenden Strecke.
Nach dem Strahlensatz bzw. aufgrund ähnlicher Dreiecke gilt:

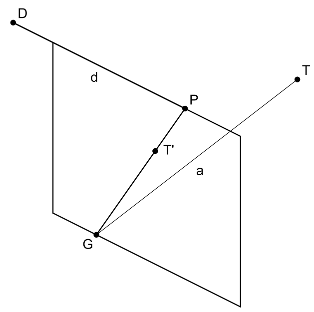
$$MQ : MP = T'G : T'G = GR : PD = GT : PD = a : d$$

Hieraus folgt:

$$MQ : h = MQ : PQ = a : (a + d)$$

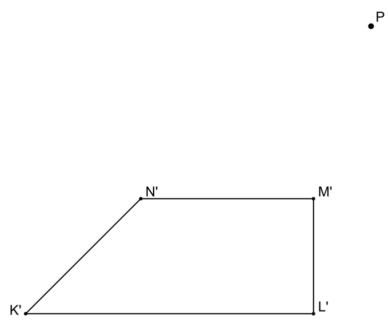
[Benutzt wird eine Rechenregel für Verhältnisse: Aus $r : s = t : u$ folgt $r : (r + s) = t : (t + u)$; aus $MG : MP = a : d$ folgt $MQ : (MQ + MP) = a : (a + d)$ also $MQ : h = a : (a + d)$.]
Das ist aber das richtige Verkürzungsverhältnis.

Aus $T'G : T'P = a : d$ lässt sich eine einfache Regel herleiten (Andersen nennt sie „Teilungsregel"), wie man den Bildpunkt T' eines Punktes T bestimmen kann, der auf der Senkrechten zur Standlinie im Punkt G in der Entfernung a liegt:
Der gesuchte Bildpunkt T' ist derjenige Punkt auf GP, der diese Strecke im Verhältnis a zu d teilt.



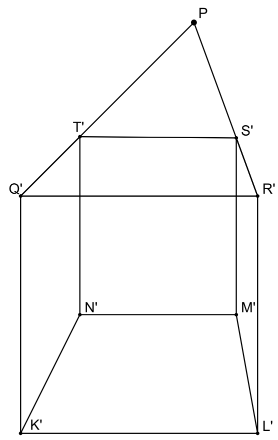
Im zweiten Teil seines Buches behandelt della Francesca räumliche Probleme. Ein Beispiel hierfür: Pieros Konstruktion des perspektivischen Bildes eines Würfels.

Gegeben sei ein Würfel, der auf der Objektebene liegt, wobei eine Seitenfläche parallel zur Bildebene ist. Sei $K'L'M'N'$ das perspektivische Bild der Grundfläche $KLMN$ (das ist das Quadrat, das in der Objektebene liegt). P sei der Hauptpunkt.

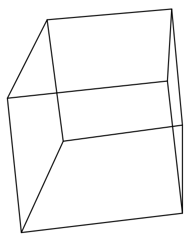


Errichte in K' und L' die Senkrechten auf $K'L'$. Trage hierauf die Länge a der ursprünglichen Würfelkante ab. Endpunkte seien Q' und R' mit P. Errichte in M' und N' die Senkrechten auf $M'N'$. Schnittpunkte mit $Q'P$ und $R'P$ seien S' und T'.

Dann ist $K'L'M'N'Q'R'S'T'$ die gewünschte perspektivische Darstellung des Würfels (mit einem Fluchtpunkt, nämlich dem Hauptpunkt P).



Insgesamt erreicht Piero della Francesca ein hohes Niveau in der perspektivischen Darstellung von Körpern. Eine beachtliche Leistung ist z.B. die Abbildung eines Würfels, bei dem keine Kante parallel oder senkrecht zur Bildebene verläuft - also mit drei Fluchtpunkten.

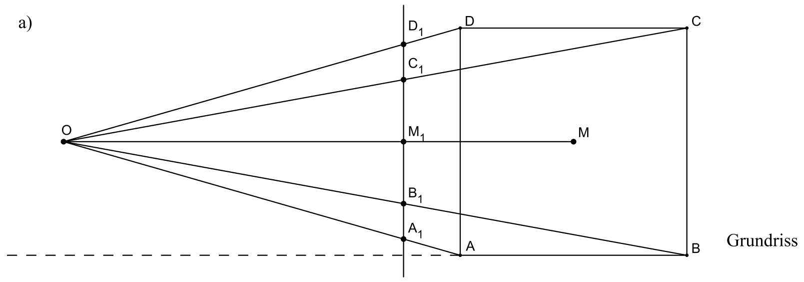


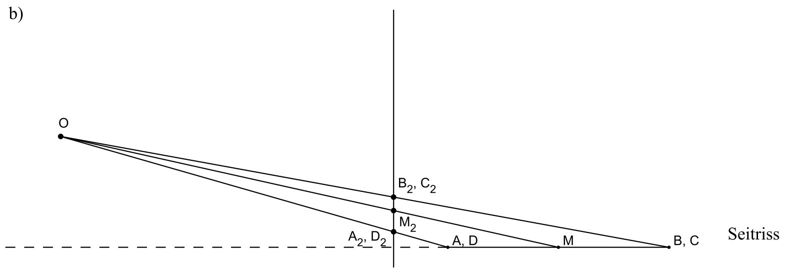
Andersen S.71

Andere Gegenstände, die er abbildet, sind Köpfe und das sog. Mazzocchio, eine Art polyedraler Torus (Ringfläche), der z.B. in der berühmten „Geißelung Christi" als Kopfbedeckung auftritt.

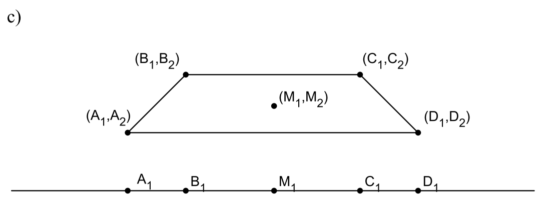
Nachtrag

Konstruktion des perspektivischen Bildes eines Quadrates (mit Kante parallel zur Bildebene, sowie senkrecht auf Objektebene) in Grund- und Seitriss bei P. della Francesca (§45 von „De Perspectiva"; vgl. Gericke 1990, 172 f.):



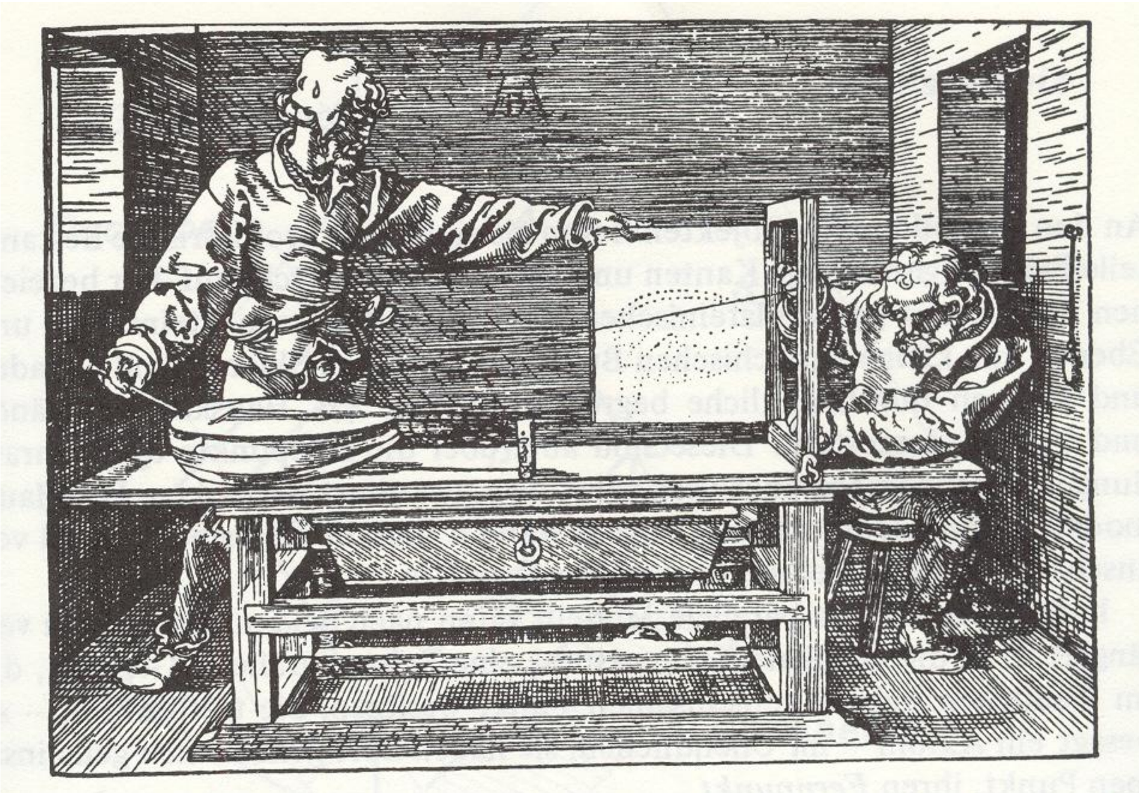


Die „Koordinaten" aus a) und b) werden mit Hilfe eines Streifens, auf dem man Markierungen anbringt, nach c) übertragen:



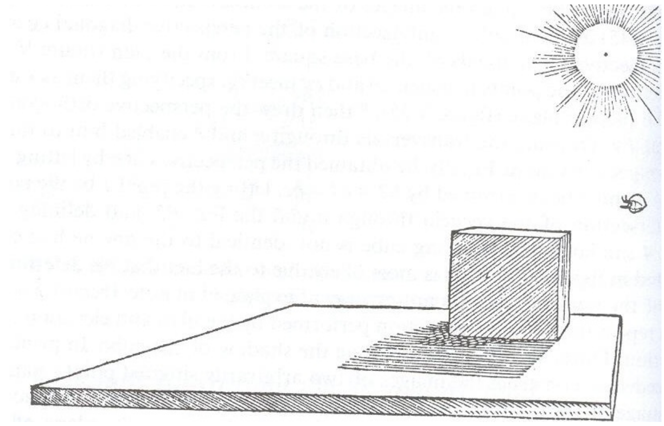
Das Bild von M muss mit dem Schnittpunkt der Diagonalen zusammenfallen.

Im deutschsprachigen Raum hat **Albrecht Dürer** (* Nürnberg 1471, † Nürnberg 1528) viel zur Verbreitung der Perspektive beigetragen. Deren Technik lernte er 1505 während einer Italienreise vermutlich in Bologna. Es gibt mehrere Kupferstiche von Dürer, in denen erläutert wird, wie man mit Hilfe eines Fadengitters ein perspektivisches Bild erhalten kann.



Albrecht Dürer

In seinem Buch „Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheid", das Dürer 1525 veröffentlichte, gibt es auch Ausführungen zur Perspektive. Der Schwerpunkt des Buches liegt jedoch auf den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (ohne Längenskala!) und zwar exakten aber auch näherungsweisen „Messung" ist Dürers Verdeutschung von „Geometrie". Bekannt ist Dürers Darstellung eines Würfels mit seinem Schatten.

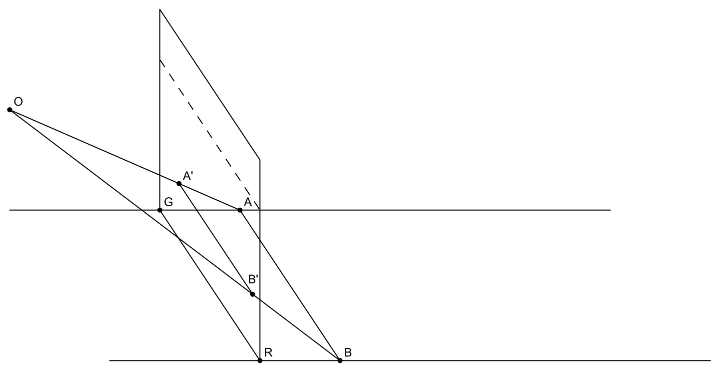


Dürers Würfel im Sonnenschein

Da hier mit dem Sonnenlicht gearbeitet wird, handelt es sich allerdings um eine Parallelprojektion. Die Situation wird aber in einer perspektivischen Darstellung dargeboten - so, wie man sie vom eingezeichneten Auge aus sieht.

Eine tiefere mathematische Durchdringung der Perspektive erfolgte durch **Guidobaldo Marchese del Monte** (1545 - 1607), der bekannt geblieben ist als Förderer Galileis und des Versuchs der späten Renaissance, antike Quellen in Übersetzung gedruckt zugänglich zu machen. Guidobaldo del Monte war kein aktiver Maler, sondern eher Mathematiker (oder - für jene Zeit durchaus zutreffend: Universalgelehrter). Im Jahr 1600 veröffentlichte er sein „Sechs Bücher über Perspektive" (Perspectivae libri sex). Das Titelblatt zeigt ein Fünfecksprisma in perspektivischer Darstellung.

Aus der Vielfalt der von del Monte behandelten Themen werden hier zwei herausgegriffen. Das erste Thema sind zur Standlinie parallele Geraden. Del Monte beweist, dass deren Bilder in der Bildebene wieder parallele Geraden sind, was natürlich schon lange bekannt war und benutzt wurde. Ein erster Schritt besteht darin, zu zeigen, dass eine in der Objektebene zur Standlinie parallele Gerade auf eine zur Standlinie parallele Gerade der Bildebene abgebildet wird. Sei AB die Parallele zur Standlinie GR in der Objektebene, $A'B'$ sei deren Bild in der Bildebene.



Da AB parallel zu GR ist, kann man durch AB eine Ebene e legen, welche parallel zur Bildebene ist. Die von O ausgehenden Strahlen OA und OB werden durch diese Ebene in A, A', B und B' geschnitten. Dann gilt nach einer räumlichen Fassung des Strahlensatzes (XI,17: „Werden zwei Geraden von parallelen Ebenen geschnitten, so müssen sie in denselben Verhältnissen geteilt werden"):

$$OA' : A'A = OB' : B'B$$

Hieraus folgt aber (VI,2: Das ist i.W. der erste Strahlensatz mit Umkehrung), dass AB und $A'B'$ parallel sind. Also ist $A'B'$ auch parallel zur Standlinie (XI,9).

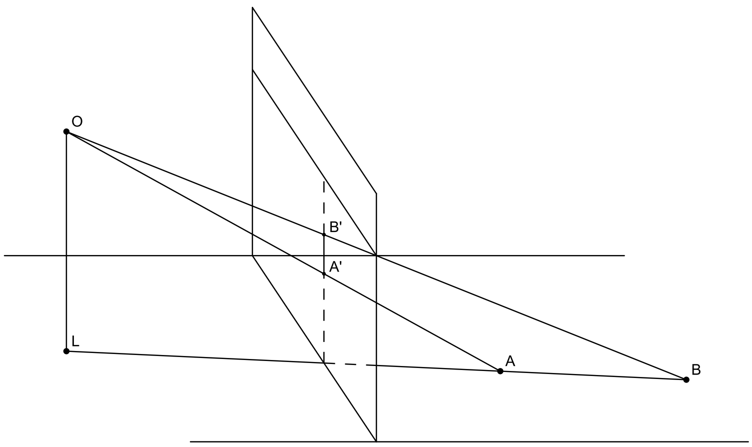
Aufgrund der Transitivität der Parallelrelation folgt hieraus, dass eine Schar von Parallelen zur Standlinie auf eine ebensolche Schar abgebildet wird.

Das obige Argument lässt sich allerdings vereinfachen, wenn man XI,16 heranzieht: Werden zwei parallele Ebenen von irgendeiner Ebene geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel. Die fragliche Ebene ist diejenige, welche durch O, A und B festgelegt wird.

Es geht aber noch einfacher, wie **Willem 's Gravesande** (1688 - 1742) 1711 in seinem „Essai de perspective" feststellte. Angenommen $A'B'$ wäre nicht parallel zur Standlinie. Dann gäbe es einen Schnittpunkt C' dieser beiden Geraden. Dieser Punkt C' liegt aber in der Objektebene, ist also gleich seinem Urbildpunkt C. C muss auf AB liegen, weil es Urbildpunkt ist. Also wäre AB nicht parallel zur Standlinie. Widerspruch!

Neben den Parallelen zur Standlinie in der Bildebene sind auch Senkrechten zur Standlinie in dieser Ebene interessant. Hierzu fand del Monte folgendes Resultat:

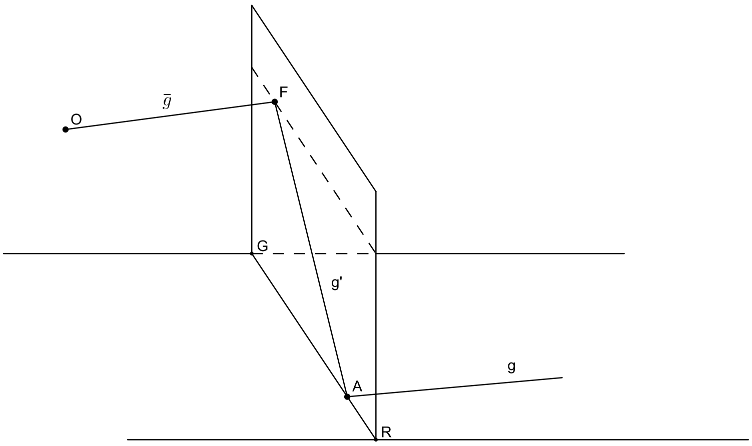
> Jede Gerade in der Objektebene, die durch den Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildebene geht, wird auf eine Senkrechte zur Standlinie in der Bildebene abgebildet.



Die Begründung beruht darauf, dass die Ebene durch O, L und A bzw. B senkrecht auf der Objektebene steht. Da die Bildebene ebenfalls senkrecht auf der Objektebene steht, ergibt sich die Behauptung nach XI,19 („Stehen zwei einander schneidende Ebenen auf irgendeiner Ebene senkrecht, so muss auch ihre Schnittlinie auf derselben Ebene senkrecht stehen").

Guidobaldo del Monte hat auch eine andere interessante Frage geklärt - nämlich diejenige nach den Fluchtpunkten der Bilder von Parallelen in der Objektebene, welche weder Vertikale (deren Fluchtpunkt ist der Hauptpunkt) noch Geraden sind, die mit der Standlinie einen $\pm 45°$-Winkel bilden. („Diagonalen" - deren Fluchtpunkte sind die Distanzpunkte).

Sei also eine Gerade g in der Objektebene gegeben, die weder senkrecht noch parallel zur Standlinie ist und mit dieser auch nicht den Winkel 45° oder 135° (=−45°) einschließt.



Der Fluchtpunkt F, der zur Bildgeraden g' von g gehört, ist natürlich nichts anderes als der Schnittpunkt von g' mit dem Horizont. g' findet man - theoretisch - indem man die Ebene durch O und g legt und diese mit der Bildebene schneidet. Konstruktiv ergibt sich F, indem man durch O in der von O und dem Horizont festgelegten Ebene die Parallele $\overline{g}$ zu g zieht. Deren Schnittpunkt mit dem Horizont ist der gesuchte Fluchtpunkt F.

Ersetzt man g durch eine Parallele h, so muss man dieselbe Gerade $\overline{g}$ erhalten. Anders ausgedrückt: Alle Parallelen zu g bekommt man, indem man alle Ebenen durch $\overline{g}$ legt (mit Ausnahme derjenigen, die parallel zur Objektebene ist) und diese mit der Objektebene schneidet. In der Sprache des 19. Jahrhunderts erhält man so eine Zuordnung zwischen den Ebenen des Ebenenbüschels mit Achse $\overline{g}$ zu den Geraden des Parallelenbüschels zur Gerade g.

Warum geht g' durch F? Sei e die Ebene, welche von g und O festgelegt wird, π bezeichne die Bildebene. Dann liegt $\overline{g}$ nach Konstruktion in e. Der Punkt F ist der Durchschnitt von $\overline{g}$ und π, also ist F ein Punkt in $e \cdot \pi$. Andererseits ist die Bildstrecke g' genau der Durchschnitt von e und π. Also muss F auf g' liegen.

K. Andersen hebt drei wichtige Einsichten hervor, die Guidobaldo zu verdanken sind:

1. Zentral für das Verständnis von perspektivischen Konstruktionen sind Fluchtpunkte.

2. Die antike Mathematik - allen voran Euklids „Elemente" - stellt genügend Mittel bereit, um der Perspektive eine mathematische Grundlage zu verschaffen.

3. Er eröffnete neue Wege in der Theorie der Perspektive.

Weitere wichtige Beiträge zur mathematischen Durchdringung der Perspektive lieferten Simon Stevin (1548 - 1620) und Brook Taylor (1685 - 1731).

Im Hinblick auf die projektive Geometrie ist folgende Frage interessant: Welchen Status schrieben die von uns betrachteten Autoren den Fluchtpunkten zu?

Solange man die Fluchtpunkte nur mit der Bildebene in Verbindung bringt, sind sie eigentlich unproblematisch. Mehr braucht man aber eigentlich in der künstlerischen Praxis nicht; sie sind - wie Guidobaldo es ausdrückte - Punkte des Zusammenlaufens wie andere auch. Schwierig wird es, wenn man einen Fluchtpunkt als Bild eines Punktes betrachten möchte. Dann ist direkt klar, dass dies kein gewöhnlicher Punkt sein kann, sondern eben nur ein „unendlich weit entfernter". In diesem träfen alle Geraden einer Parallelenschar zusammen - ein Widerspruch zu Euklids Def. 23 im ersten Buch, welche festlegt: „Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner einander treffen". Ein Ausweg ist, zwischen „wirklichen" Punkten und „idealen" Punkten zu unterscheiden und Euklids Definition so aufzufassen, dass sie sich nur auf wirkliche Punkte bezieht.

2 Anfänge der projektiven Geometrie

Als die Geburtsurkunde der projektiven Geometrie gilt das Buch „Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'une cone avec un plan" („Erster Entwurf eines Versuches über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene"), das 1639 in 50 Exemplaren gedruckt wurde. Sein Verfasser war **Girard Desargues** (* Lyon 1591, † Lyon 1661), der als Ingenieur oder auch Architekt bezeichnet wird. In den 1620er Jahren kam Desargues nach Paris, wo er sich dem Kreis um M. Mersenne anschloß. Dort traf er u.a. auf R. Descartes und auf E. Pascal, den Vater von Blaise Pascal.

Charakteristisch für Desargues ist, dass er sich sowohl für praktische Probleme - wie etwa die Perspektive - als auch für theoretische - hauptsächlich der Geometrie - interessierte. Umstritten ist, wie diese beiden Stränge bei ihm zusammenkamen, insbesondere ob die projektive Geometrie des „Brouillon" Anregungen aus Desargues' Arbeiten zur Perspektive „Exemple de l'une des manières universelles touchant la pratique de la perspective ..." (Paris, 1636) empfingen. Während viele Autoren davon ausgehen, dass die von Desargues eingeführten „unendlich fernen Punkten" ein Versuch seien, etwas in der Objektebene zu finden, was den Fluchtpunkten in der Bildebene entspricht, widerspricht dem K.Andersen. Sie sieht die beiden Stränge weitgehend getrennt - eine Berührung stellen allerdings auch für sie die unendlich fernen Punkte dar (vgl. Andersen 2007, 447).

Desargues' Werk blieb fast ohne Wirkung - obwohl durchaus gelobt von R. Descartes. Man wusste um seine Existenz aus verschiedenen Hinweisen, aber lange Zeit blieb es unauffindbar. Erst 1845 gelang es Michel Charles (1793 - 1880), eine Abschrift des Werkes ausgeführt von Abraham Bosse zu finden. 1950 tauchte sogar noch ein Originaldruck auf. Ein Grund, warum Desargues' Werk eine so geringe Wirkung trotz seines sehr interessanten Inhalts entfaltete, war sicher die von ihm erfundene „Privatsprache", in der er seine Ergebnisse mitteilte. Der deutsche Übersetzer des „Brouillon", der Geometer Max Zacharias (1873 - 1962), hat versucht, diese Eigenart in seiner Übersetzung zu bewahren. Englische Übersetzungen mit Anmerkungen von Auszügen aus Desargues' Buch findet man in Smith (1959, 307 - 314) und Struik (1969, 157 - 163) sowie bei Fields/Grag (1987). Hiervon mag der folgende Abschnitt - es handelt sich um die ersten Abschnitte aus Desargues' Buch - einen Eindruck vermitteln.

(Desargues, G.: Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene. Übersetzt und hg. von M. Zacharias (Leipzig: Akademische Verlagsanstalt, 1922), S. 3 - 5)

Eine solche Verlängerung einer Geraden nach beiden Seiten ins Unendliche wird hier durch eine Folge von Punkten dargestellt, die auf beiden Seiten an jener Geraden aufgereiht werden.

Zuordnung der geraden Linien (ordonnance). Um von mehreren geraden Linien auszudrücken, daß sie alle untereinander entweder parallel oder nach einem und demselben Punkte gerichtet sind, heißt es hier, daß alle diese Geraden dieselbe Zuordnung haben; worunter man bei der einen sowohl wie bei der andern Art der Lage dieser Geraden verstehen wird, daß sie alle nach einem und demselben Punkte streben.[2])

Ziel einer Zuordnung von Geraden. Der Ort, nach dem man sich so mehrere Geraden bei der einen ebensowohl

wie bei der andern Art der Lage strebend denkt, heißt hier Ziel der Zuordnung jener Geraden (but d'une ordonnance).

[105] Um diejenige Art der gegenseitigen Lage mehrerer Geraden auszudrücken, bei der sie alle untereinander parallel sind, heißt es hier, daß alle diese Geraden dieselbe Zuordnung haben, deren Ziel in jeder von ihnen nach beiden Seiten in unendlicher Entfernung liegt.[3])

Um diejenige Art der gegenseitigen Lage mehrerer Geraden auszudrücken, bei der sie alle nach einem und demselben Punkte gerichtet sind, heißt es hier, daß alle diese Geraden dieselbe Zuordnung haben, deren Ziel in jeder von ihnen in endlicher Entfernung liegt.

Also haben zwei beliebige Geraden in einer und derselben Ebene stets zueinander dieselbe Zuordnung, deren Ziel in endlicher oder unendlicher Entfernung liegt.

Jede Ebene wird hier ebenfalls nach allen Richtungen ins Unendliche ausgedehnt gedacht.

Eine solche Ausdehnung einer Ebene nach allen Richtungen ins Unendliche wird hier durch eine Zahl von Punkten dargestellt, die nach allen Richtungen über die Ebene verstreut sind.

Zuordnung von Ebenen. Um von mehreren Ebenen auszudrücken, daß sie alle entweder untereinander parallel oder nach einer und derselben Geraden gerichtet sind, heißt es hier, daß alle diese Ebenen dieselbe Zuordnung haben, worunter man bei der einen sowohl wie bei der andern Art der Lage dieser Ebenen verstehen wird, daß sie alle nach einem und demselben Orte streben.

[106] Ziel einer Zuordnung von Ebenen. Der Ort, nach dem man sich so mehrere Ebenen bei der einen sowohl wie bei der andern Art der Lage strebend denkt, hat hier den Namen Achse der Zuordnung (aissieu).

Um diejenige Art der gegenseitigen Lage mehrerer Ebenen auszudrücken, bei der sie alle untereinander parallel sind, heißt es hier, daß alle diese Ebenen dieselbe Zuordnung haben, deren Achse in jeder von ihnen nach allen Richtungen in unendlicher Entfernung liegt.[1])

Um diejenige Art der gegenseitigen Lage mehrerer Ebenen auszudrücken, bei der sie alle nach einer und derselben Geraden gerichtet sind, heißt es hier, daß alle diese Ebenen dieselbe Zuordnung haben, deren Achse in jeder von ihnen in endlicher Entfernung liegt.

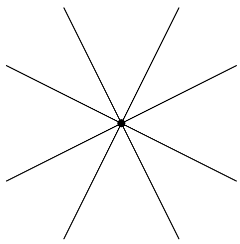
Also haben zwei beliebige Ebenen stets zueinander dieselbe Zuordnung, deren Achse in jeder von ihnen in endlicher oder unendlicher Entfernung liegt.

Wenn man sich vorstellt, daß eine unbegrenzte Gerade, die einen unbeweglichen Punkt besitzt, sich in ihrer ganzen Länge bewegt, so sieht man, daß sie an den verschiedenen Stellen, die sie bei dieser Bewegung einnimmt, sich als verschiedene Geraden derselben gegenseitigen Zuordnung darstellt, deren Ziel ihr unbeweglicher Punkt ist.

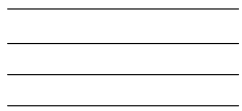
[107] Wenn der unbewegliche Punkt dieser Geraden in endlicher Entfernung liegt, und sie sich in einer Ebene bewegt, so sieht man, daß sie an den verschiedenen Stellen, die sie bei dieser Bewegung einnimmt, sich als verschiedene Geraden einer und derselben gegenseitigen Zuordnung darstellt, deren Ziel — ihr unbeweglicher Punkt — in jeder von ihnen in endlicher Entfernung liegt, und daß jeder von dem unbeweglichen verschiedene Punkt dieser Geraden dabei eine einfache einförmige Linie beschreibt, von der zwei beliebige Teile von derselben Gestalt sind und miteinander übereinstimmen, nämlich eine Linie, die in voller Rundung gekrümmt ist, mit andern Worten die Kreislinie.

Wenn der unbewegliche Punkt dieser Geraden in unendlicher Entfernung liegt, und sie sich in einer Ebene bewegt, so sieht man, daß sie an den verschiedenen Stellen, die sie bei dieser Bewegung einnimmt, sich als verschiedene Geraden einer und derselben gegenseitigen Zuordnung darstellt, deren Ziel (ihr unbeweglicher Punkt) in jeder von ihnen nach beiden Richtungen in unendlicher Entfernung liegt, und daß jeder von dem unbeweglichen verschiedene Punkt dieser Geraden dabei eine einfache einförmige Linie beschreibt, von der zwei beliebige Teile von derselben Gestalt sind und miteinander übereinstimmen, nämlich eine Gerade und Lotrechte auf derjenigen, die sich bewegt. Und als Kern dieser Auffassung erkennt man darin schließlich eine Art von Beziehung zwischen der unendlichen geraden Linie und der krummen Linie gleichförmiger Krümmung, d. h. die Beziehung zwischen der unendlichen geraden Linie und der Kreislinie, dergestalt, daß sie als zwei Arten einer und derselben Gattung erscheinen, deren Entstehung man mit denselben Worten aussprechen kann.

Desargues' Ausgangspunkt ist der Vergleich von Geraden, die durch einen Punkt gehen (heute sagt man „Geradenbüschel"), und von Geraden, die parallel sind („Parallelenbüschel"). Solche Vergleiche finden sich schon in seinem Buch über die Perspektive, insofern kann man hier einen Anknüpfungspunkt sehen.



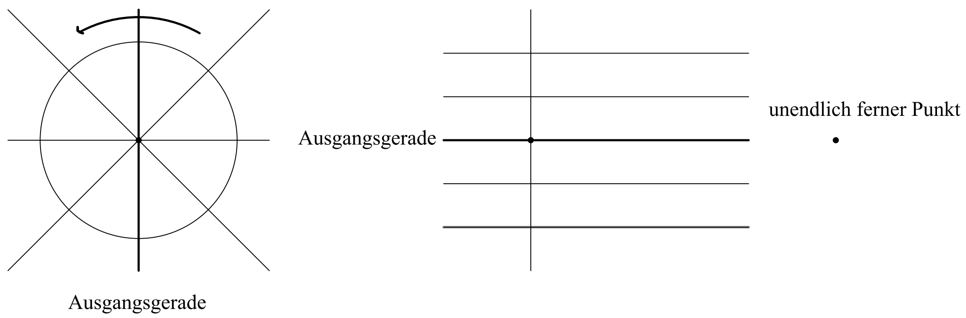
Geradenbüschel



Parallelenbüschel

Offensichtlich haben beide Gebilde eine Struktur („Zuordnung"), die Desargues ausdrückt, indem er schreibt: „... dass sie alle nach einem und demselben Punkt streben." Der fragliche Punkt ist das Ziel der Zuordnung; beim Parallelenbüschel liegt „das Ziel in jeder von ihnen nach beiden Seiten in unendlicher Entfernung". Das will auch sagen, dass es nur ein Ziel, einen unendlich fernen Punkt, beim Parallelenbüschel gibt - was ja nicht unbedingt anschaulich nahe liegt, aber notwendig ist, um die Analogie zum Geradenbüschel aufrecht zu erhalten. Desargues war sich im Klaren darüber, dass diese neue Betrachtungsweise dazu führt, dass Geraden geschlossen sind und dass die Anordnung der Punkte auf ihnen anders ist als im üblichen Fall: Hat man drei Punkte, so liegt jeder Punkt zwischen den beiden anderen - was man natürlich vom Kreis her schon kannte. Beim Geradenbüschel liegt das Ziel in endlicher Entfernung.

Dreht man eine Gerade um einen gewöhnlichen Punkt, so beschreibt ein Punkt auf ihr, der nicht das Drehzentrum ist, einen Kreis. Was passiert, wenn man eine Gerade um ihren unendlich fernen Punkt dreht? Dann ergeben sich Geraden, die alle durch diesen unendlich fernen Punkt gehen (denn als Drehzentrum bleibt dieser fest), sonst aber keinen Punkt gemeinsam haben. Also ergibt sich ein Parallelenbüschel. Ein Punkt im Endlichen beschreibt hierbei eine Gerade senkrecht zur Ausgangsgerade. Die Drehung um einen unendlich fernen Punkt bedeutet für die Geraden eine Parallelverschiebung.



Analoge Begriffsbildungen nimmt Desargues für Ebenenbüschel vor: Hier spricht er von der Achse der Zuordnung. Beim gewöhnlichen Ebenenbüschel ist das eine Gerade, bei parallelen Ebenen liegt die Achse in unendlicher Entfernung.

> „Also haben zwei beliebige Ebenen stets zueinander dieselbe Zuordnung, deren Achse in jeder von ihnen in endlicher oder unendlicher Entfernung liegt."

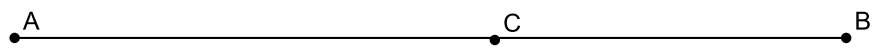
Die Punkte der unendlich fernen Achse - wenn man denn unterstellt, dass diese Puntke enthält - sind unendlich ferne Punkte. Also liegt die Idee nahe, dass die unendlich ferne Achse der geometrische Ort aller unendlich ferner Punkte ist, die zu den Geraden einer Ebene gehören. Diese Achse ist also die unendlich ferne Gerade einer Ebene. Dass es sich tatsächlich um eine Gerade handelt - und das sollte ja so im Sinne der Analogie zum gewöhnlichen Ebenenbüschel sein - wird von Desargues auch damit begründet, dass diese Linie von allen Geraden in genau einem Punkt getroffen wird. Er unterstellt somit: Ist eine Linie gekrümmt, so gibt es stets mindestens eine Gerade, die diese Linie in zwei oder mehr Punkten trifft.

Desargues spricht in seinem Werk viele Themen an, die später zentral für die projektive Geometrie werden sollten. Bei einigen konnte er auf antike Vorbilder zurückgreifen, insbesondere auf die „Mathematische Sammlung" von Pappos (4. Jahrhundert n. Chr.).

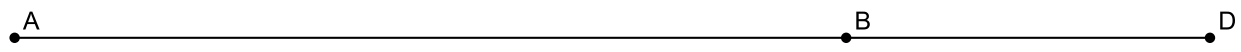
Ich zähle im Folgenden einige Punkt auf, verwende dabei aber durchaus moderne Darstellungsmittel.

Harmonische Punkte: Ist eine Strecke AB gegeben, so kann man diese im goldenen Schnitt teilen. Das ist natürlich ganz klassisch und steht schon bei Euklid (II 11, VI 30).

Dabei gibt es aber zwei Möglichkeiten, die innere und die äußere Teilung:



AB : AC = AC : CB



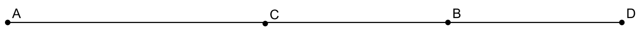
AD : AB = AB : BD

Da beides Mal ein goldener Schnitt (Teilungsverhältnis $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$) vorliegt, sind diese Teilverhältnisse gleich:

$$AB : AC = AD : AB$$

bzw.

$$AB : CB = AD : CD$$



Es gilt: $\frac{AB}{AC} : \frac{AB}{AD} = 1$ bzw. $\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = 1$. Solche Bildungen - das Verhältnis zweier Verhältnisse - nennt man Doppelverhältnis (*cross ratio*). Eingeführt wurde diese Bezeichnung 1827 von August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), der allerding von Doppelschnittsverhältnis sprach, was man später dann vereinfachte zu Doppelverhältnis.

Heute würde man Vorzeichen einführen in obiger Situation. Die besondere Situation, die wir oben einführend betrachtet haben, dass das äußere Teilverhältnis dem inneren gleich ist, führt allgemein auf den Begriff des harmonischen Punktquadrupels.

Seien P_1, P_2, P_3, P_4 vier Punkte auf einer Geraden.

Definition: Das **Doppelverhältnis** $DV(P_1, P_2; P_3, P_4)$ der vier oben angeordneten Punkte P_1, P_2; P_3, P_4 ist definitionsgemäß

$$\frac{P_1P_3}{P_1P_4} : \frac{P_2P_3}{P_2P_4} = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} : \frac{P_1P_4}{P_2P_4} = \frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4}{P_2P_3 \cdot P_1P_4}$$

Bemerkung: Nimmt man auf der fraglichen Geraden einen Ursprung an und ordnet den Punkten $P_1, ..., P_4$ die Koordinaten $x_1, ..., x_4$ zu, so kann man deren Doppelverhältnis auch schreiben als:

$$DV(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

Dabei ergeben sich Vorzeichen in natürlicher Weise, denn die Lage der Punkte $P_1, ..., P_4$ muss ja nicht so sein, dass gilt: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Im Beispiel des goldenen Schnitts von oben ist es natürlich zu setzen: $A = P_1, B = P_3, C = P_2, D = P_4$. Dann ist $x_3 < x_2$, also $x_3 - x_2$ negativ. Man erhält:

$$DV(A, B, C, D) = -1$$

Definition: Vier Punkte auf einer Gerade, deren Doppelverhältnis gleich -1 ist, heißen harmonische Punkte (oder harmonisches Punktequadrupel).

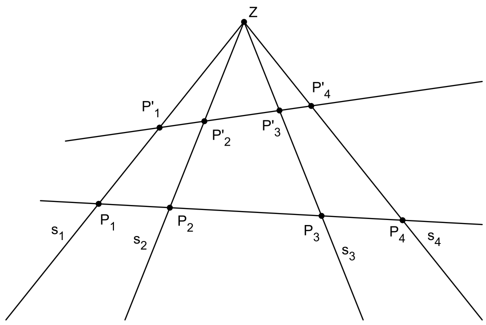
Bemerkung:

1. Es ist dann $P_1P_3 \cdot P_2P_3 = -(P_2P_4 : P_1P_4)$. D.h. das Verhältnis der äußeren Teilung ist reziprok genommen gleich dem der inneren Teilung - bis auf ein Vorzeichen. Allgemein gilt: Wird das Punktepaar P_1, P_2 vom Punktepaar P_3, P_4 getrennt, so ist das Doppelverhältnis negativ. In den beiden anderen Fällen ist es positiv.

2. Weiterhin gilt - daher der Name - P_1P_2 ist das harmonische Mittel zwischen P_1P_3 und P_1P_4.

3. Ist P_3 der Mittelpunkt von P_1P_2, so ist der vierte harmonische Punkt der unendlich ferne Punkt.

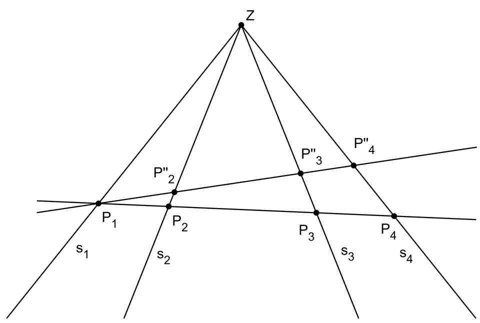
Desargues beweist - wie vor ihm schon Pappos (Collectio Buch VII, Satz 139), dass (modern gesprochen) das Doppelverhältnis bei Zentralprojektion erhalten bleibt:



Es gilt in der obigen Situation $DV(P_1, P_2, P_3, P_4) = DV(P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)$.

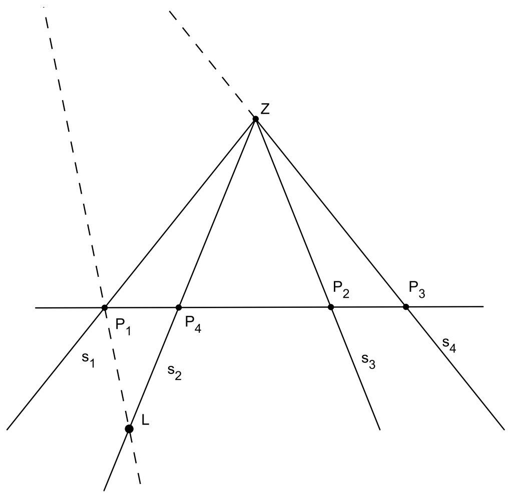
Beweis (i.w. nach Pappos, vereinfacht nach Ostermann-Wanner 2012, 333):

1. Durch Parallelverschiebung entlang s_1 bringen wir P'_1 in die Position von P_1. Nach dem Strahlensatz ändert sich dabei das $DV(P_1, P'_2, P'_3, P'_4)$ nicht. Die Bilder von P'_2, P'_3, P'_4 bezeichnen wir mit P''_2, P''_3, P''_4.

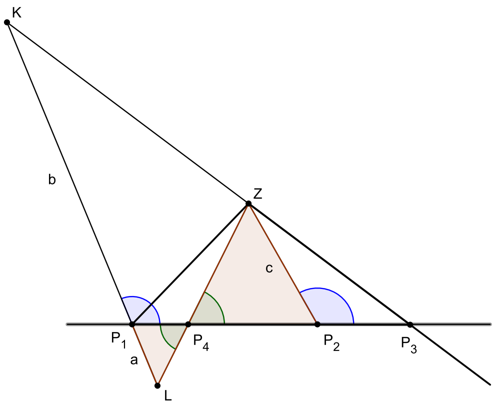


Folglich kann man P_1 für alle zu betrachtenden Doppelverhältnisse festhalten.

2. Wir legen durch P_1 eine Gerade, welche s_2 in P_4, s_3 in P_2 und s_4 in P_3 schneiden soll (wir führen also eine Umbenennung der Punkte durch, wenn man so will).



3. Ziehe die Parallele zu ZP_2 durch P_1. Diese schneide die Gerade ZP_3 in K und die Gerade ZP_4 in L.



Die Dreiecke P_1LP_4 und P_2ZP_4 sowie P_2ZP_3 und P_1KP_3 sind ähnlich (Scheitelwinkel und Wechselwinkel an Parallelen, also WW, bzw. gemeinsame Winkel bei P_3 und Stufenwinkel an Parallelen, also wieder WW). Man erhält hieraus:

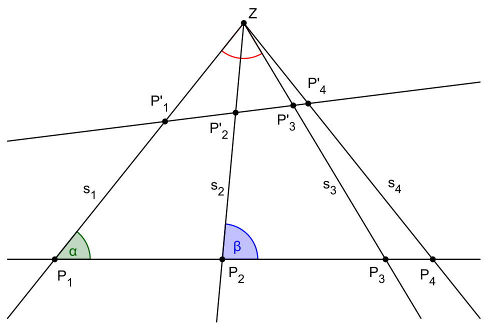
$$P_3P_1 : P_3P_2 = b : c \text{ (Strahlensatz, Zentrum } P_3\text{)}$$

$$P_4P_1 : P_4P_2 = a : c \ (\triangle P_1LP_4 \sim \triangle P_2ZP_4)$$

$$\frac{P_3P_1}{P_3P_2} : \frac{P_4P_1}{P_4P_2} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$$

Das Verhältnis $b : a$ ist unabhängig von der Lage der Geraden, auf der P_2, P_3 und P_4 liegen (und die durch P_1 geht) - solange Schnittpunkte mit s_2, s_3 und s_4 existieren. Also ist das fragliche Doppelverhältnis für alle P_1, P_2, P_3, P_4 gleich, insbesondere (vgl. Teil 1.) für P'_1, P'_2, P'_3, P'_4.

Ein anderer Beweis dieses Satzes, der auf Jacob Steiner zurückgeht, verwendet den Sinussatz. Auffallend in der Ausgangsfigur ist ja, dass die Winkel bei Z für alle Transversalen (mit $P_1, ..., P_4$) dieselben sind. Kann man also die Verhältnisse, die in das Doppelverhältnis eingehen, geeignet mit diesen Winkeln ausdrücken, so hat man gewonnen.



Der Sinussatz liefert für das Dreieck P_1P_3Z:

$$P_1P_3 : ZP_3 = \sin(\angle s_1, s_3) : \sin\alpha$$

Analog ergibt sich für das Dreieck P_2P_3Z:

$$P_2P_3 : ZP_3 = \sin(\angle s_2, s_3) : \sin\beta$$

Also

$$P_1P_3 : P_2P_3 = \frac{\sin(\angle s_2, s_3)}{\sin(\angle s_1, s_3)} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Für die Dreiecke P_1P_4Z und P_2P_4Z ergibt sich:

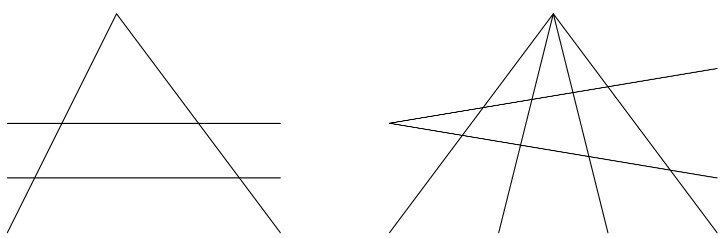
$$P_1P_4 : P_2P_4 = \frac{\sin(\angle s_1, s_4)}{\sin(\angle s_2, s_4)} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Zusammengefasst liefert dies:

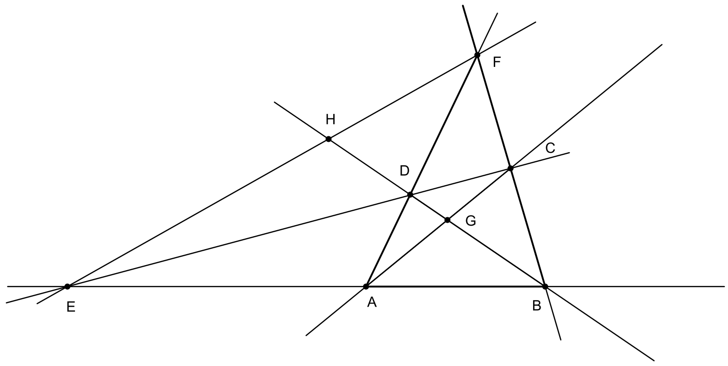
$$\frac{P_1P_3}{P_2P_3} : \frac{P_1P_4}{P_2P_4} = \frac{\sin(\angle s_1, s_3)}{\sin(\angle s_2, s_3)} : \frac{\sin(\angle s_1, s_4)}{\sin(\angle s_2, s_4)}$$

Links steht das Doppelverhältnis, rechts zwei Quotienten, die unabhängig sind von der Lage der Punkte P_i auf den Strahlen s_i.

Bemerkung: Man kann eine Analogie sehen zwischen dem gerade bewiesenen Satz und dem Strahlensatz: Letzterer besagt, dass bei **Parallelprojektion Streckenverhältnisse** erhalten bleiben; ersterer besagt, dass bei **Zentralprojektion** nur noch **Doppelverhältnisse** erhalten bleiben.



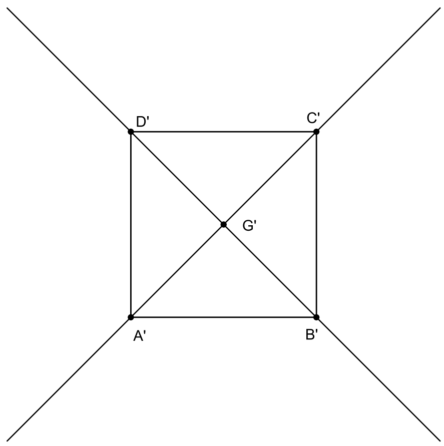
Desargues beschäftigte sich auch mit dem vollständigen Vierseit. Dieses wird gebildet von vier Geraden in „allgemeiner Lage", d.h. keine drei der Geraden gehen durch einen Punkt. Vorläufig nehmen wir auch an, dass keine zwei dieser Geraden parallel sind.



Weiterhin gehören die Diagonalen AC, BD und EF zum vollständigen Vierseit. Jede Diagonale schneidet die beiden anderen, somit liegen auf ihr zwei Punkte des vollständigen Vierseits und zwei Schnittpunkte mit den anderen Diagonalen. Es gilt der Satz:

Diese vier Punkte liegen harmonisch.

Beweis: Eine einfache Möglichkeit, den Satz zu beweisen, besteht darin, das Vierseit $ABCD$ per Zentralprojektion in ein Quadrat zu verwandeln, so dass die Diagonale EF auf die unendlich ferne Gerade fällt („Poncelets Trick" - wird später erklärt [in Kap. 3]). Die Diagonalen AC und BD werden auf die Diagonalen des Quadrates abgebildet, ihr Schnittpunkt auf den Diagonalenschnittpunkt des Quadrats.



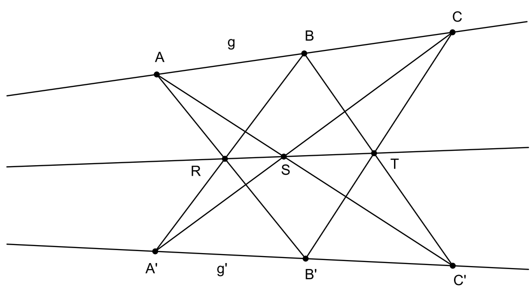
Der Schnittpunkt mit dem Bild von EF ist jeweils ein unendlich ferner Punkt. Da G' Mittelpunkt von $A'C'$ und $B'D'$ ist, hat man folglich mit dem entsprechendem unendlichen Punkt ein harmonisches Punktequadrupel. ■

Desargues hat zwei weitere später wichtig gewordene Sätze betrachtet. Der erste hiervon findet sich schon bei Pappos (Collectio Buch VII, Proposition 139 und 143); da er ein Spezialfall des später von Pascal bewiesenen Satzes ist, wird er manchmal **Satz von Pappos-Pascal** genannt. Die Bezeichnungen, die sich in der Literatur finden, sind allerdings uneinheitlich.

Satz: Gegeben seien zwei sich schneidenden Geraden g und g' und Punkte A, B, C auf g sowie A', B', C' auf g'. Dann liegen die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AB', BA' und AC', CA' sowie BC', CB' auf einer Geraden.

Bemerkung: Ein analoger Satz gilt für den Fall, dass die Geraden g und g' parallel sind.

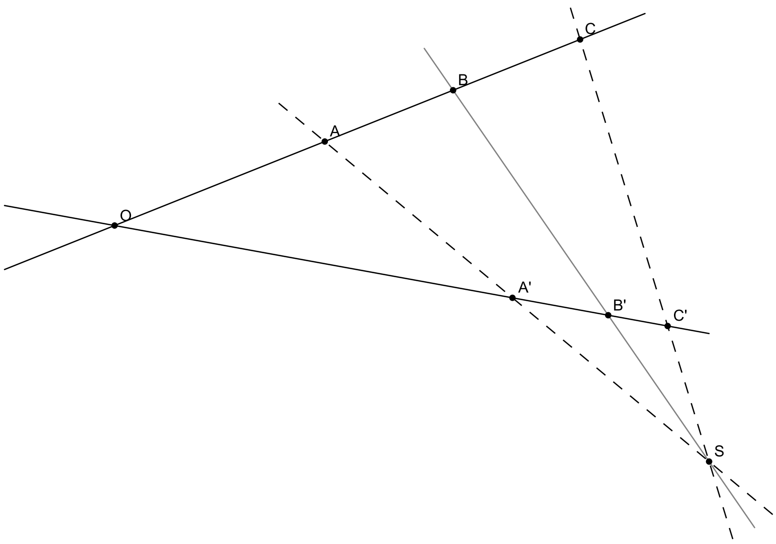
Der Satz von Pascal macht eine analoge Aussage für Sechsecke, welchen einen Kegelschnitt einbeschrieben sind. Da Geradenkreuzung und parallele Geraden entartete Kegelschnitte sind, ist Pappos Satz ein Spezialfall von Pascals Satz.



Der Satz gilt auch, wenn g und g' parallel sind. Eine andere Formulierung, die oft als Satz von Pappos bezeichnet wird ist folgende (Voraussetzungen und Bezeichnungen wie oben): Ist AC' parallel zu $A'C$ und $B'C$ parallel zu BC', so ist auch AB' parallel zu $A'B$.

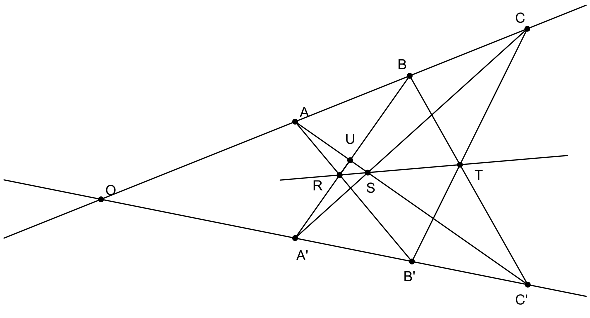
Die Umkehrung des Satzes von Pappos gilt ebenfalls. Liegen die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden auf einer Geraden, so liegen die sechs Ausgangspunkte jeweils zu dreien auf einer Geraden.

Der Beweis, den Pappos für seinen Satz gibt, beruht wesentlich auf folgendem Hilfssatz (Proposition 136 bei Pappos), der eine Verbindung herstellt zwischen Gleichheit von Doppelverhältnissen und Kollinearität von Punkten: Sind zwei Geraden g und g' gegeben, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiter seien A, B, C Punkte der Geraden g, S ein Punkt, der weder auf g noch auf g' liegt, und $A'.B', C'$ Punkte auf g':

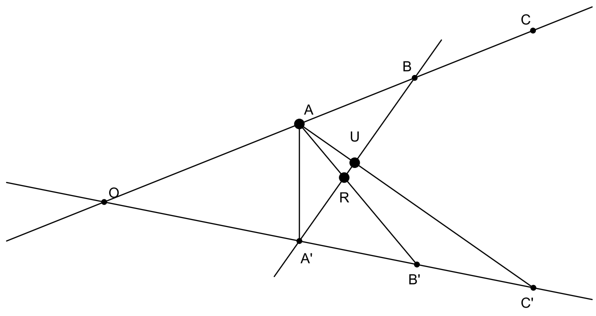


Gilt nun $DV(O, A; B, C) = DV(O, A'; B', C')$, so liegen die Punkte B, B', S auf einer Geraden.

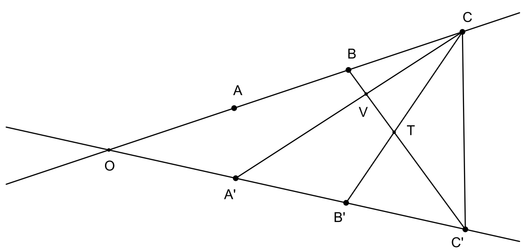
Diesen Hilfssatz beweist Pappos i.w. mit ähnlichen Dreiecken. Auf der Basis des Hilfssatzes ist der Satz von Pappos relativ einfach zu beweisen.



Es muss gezeigt werden, dass $DV(B, U; R, A') = DV(B, V; T, C')$ ist. Hierzu projiziert man zuerst die Gerade BA' von A aus auf die Gerade OC'. Dann gilt (Prop. 129 bei Pappos):



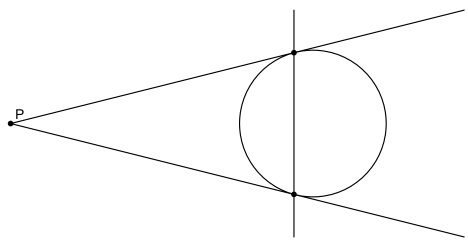
$DV(B, U; R, A') = DV(O, A'; B', C')$ [das Doppelverhältnis bleibt bei Zentralprojektion erhalten!]
Im nächsten Schritt wird die Gerade BC' von C aus auf OC' projiziert.:



Dann gilt wieder nach Prop. 129: $DV(B, V; T, C') = DV(O, A'; B', C')$. Also insgesamt: $DV(B, U; R, A') = DV(B, V; T, C')$. ■

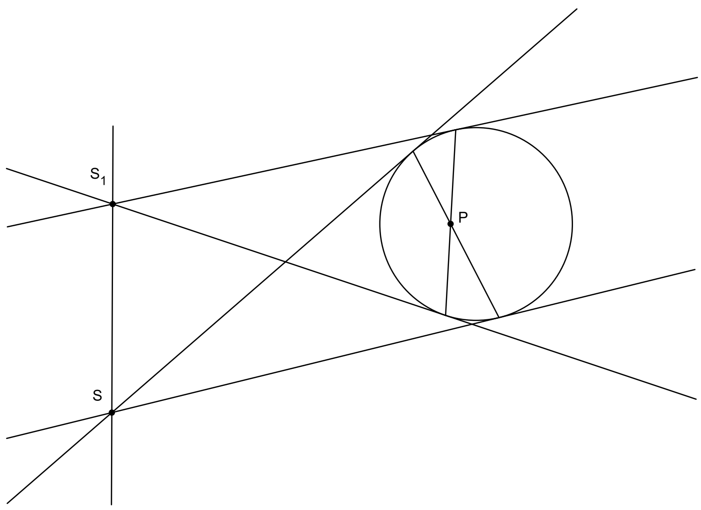
Wie der Titel von Desargues' „Brouillon" schon andeutet geht es ihm wesentlich um Kegelschnitte. Diese lassen sich auffassen als perspektivische Bilder von Kreisen etwa. Beweist man einen Satz der Kreisgeometrie nur mit den Mitteln des „Schneidens und Verbindens" - modern: mit inzidenzgeometrischen Mitteln -, so erhält man einen Satz für die anderen Kegelschnitte. Man wird so geradezu automatisch darauf geführt, über die beim Beweis verwendeten Hilfsmittel nachzudenken sowie über Eigenschaften, die bei Zentralprojektion erhalten bleiben. Das ist gewissermaßen ein Schritt aus der Geometrie heraus und in eine Metaebene hinein.

Ein Beispiel hierfür ist die Theorie der Pole und Polaren. Als Kegelschnitt nehmen wir einen Kreis. Sei P ein Punkt in der Ebene des Kreises außerhalb desselben. Dann gibt es von P aus zwei Tangenten an den Kreis; die Gerade durch diese Berührpunkte heißt die **Polare** zum **Pol** P.



Liegt P auf dem Kreis, so ist die Tangente an den Kreis in P die Polare zu P.

Liegt P innerhalb des Kreises, so wird die zugehörige Polare vermutlich außerhalb desselben liegen. Wie findet man diese?



Zieht man eine Sehne durch P und legt man die Tangenten an den Kreis in den beiden Endpunkten der Sehne, so schneiden sich diese in einem Punkt S. Nimmt man eine andere Sehne und führt dieselbe Konstruktion durch, so erhält man einen anderen Schnittpunkt S_1. Das Erstaunliche ist nun, dass alle analog erhaltenen Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, die man natürlich als **Polare** von P nimmt. Diese Polare besteht aus allen Polen von Polaren, die durch den Punkt P gehen. Umgekehrt gilt: Durchläuft ein Punkt die Polare zum Punkt, so drehen sich die Polaren dieses Punktes um P.

Ist also ein Kreis gegeben, so kann man jedem Punkt der Ebene eine Gerade zuordnen: Der fragliche Punkt ist der Pol und die fragliche Gerade dessen Polare. Ersichtlich lassen sich die obigen Konstruktionen umkehren: So erhält man zu jeder Geraden (als Polare) einen Punkt (den Pol).

Es gelten Sätze wie: Liegt der Punkt P_1 auf der Polaren von P_0, so liegt P_0 auf der Polaren von P_1. Die Zuordnung Pol/Polare ist involutorisch.

Offensichtlich lassen sich diese Überlegungen vermöge Zentralprojektion auf andere Kegelschnitte - am einfachsten natürlich auf die Ellipse - übertragen.

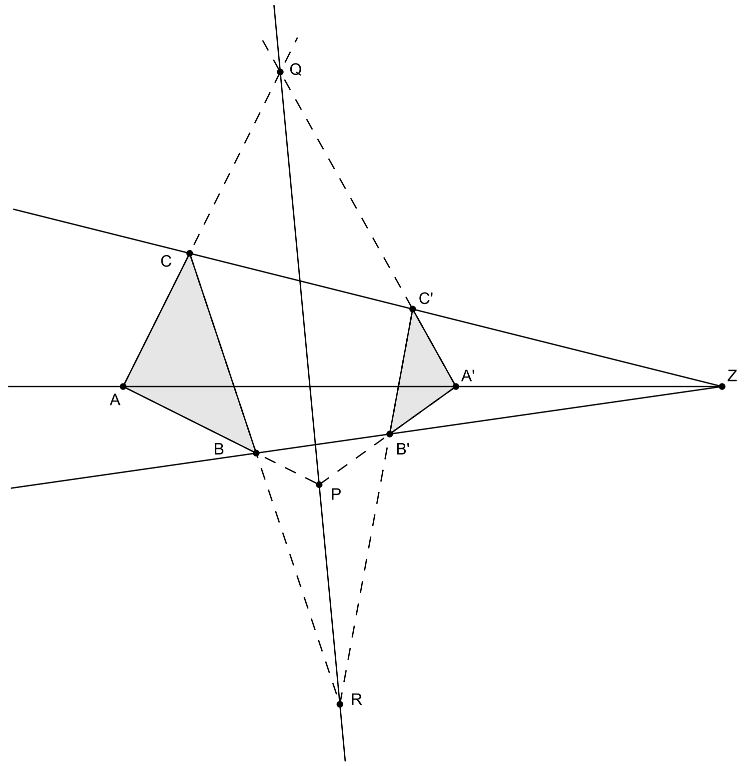
Bemerkung: In der sphärischen Geometrie hat man auch eine natürlich Zuordnung von Großkreisen und Punkten (Polen, allerdings stehen heir zwei zur Auswahl).

Die Theorie der Polaren und Pole wird im 19. Jahrhundert - schon bei Poncelet 1822 - zu einem wichtigen Bestandteil der projektiven Geometrie. Ihr Interesse liegt z.T. darin, dass sie Punkte und Geraden (im Falle der ebenen Geometrie) austauscht, also eine Art „Dualität" beinhaltet.

Der bekannteste, heute noch nach ihm benannte Satz von Desargues, findet sich nicht im „Brouillon", sondern erst in einer Schrift von Abraham Bosse (1605 - 1678) mit dem Titel „Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective" (Paris, 1648) [etwa: „Die universelle Methode des Herrn Desargues zur Anwendung der Perspektive"]. A. Bosse war fast der einzige Anhänger von Desargues' Ideen; sein Buch - eine Art zweite Auflage von Desargues' „Brouillon" - wollte diese populär machen. Von Beruf war Bosse Graveur und Zeichner, entstammte also einer jener Professionen, die Desargues mit seinem Buch erreichen wollte.

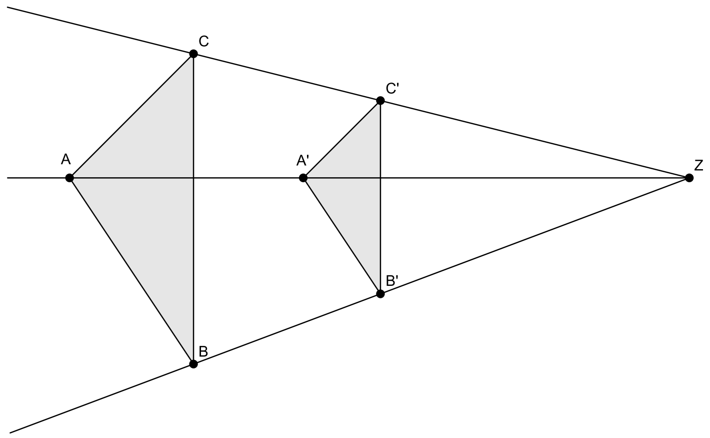
Der Satz von Desargues gibt eine Antwort auf die Frage „Wann liegen zwei Dreiecke perspektivisch?".

Satz: Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Dann treffen sich die Geraden AA', BB' und CC' genau dann in einem Punkt Z, wenn die Schnittpunkte der Geraden AB, $A'B'$; AC, $A'C'$ und BC, $B'C'$ auf einer Geraden liegen.



Beim Satz von Desargues muss man allerlei Ausnahmen berücksichtigen, etwa solche, wenn Geraden wie AB und $A'B'$ parallel sind oder wenn die projizierenden Geraden parallel sind (also die Zentralprojektion zu einer Parallelprojektion geworden ist). Deshalb ist er ein Paradebeispiel für die Vorteile, die die projektive Geometrie bietet. Diese werden auch schon von Desargues selbst genutzt, der eine einheitliche Formulierung seines Satzes - also ohne Fallunterscheidungen - verwendet.

Das möge ein Sonderfall verdeutlichen: Sind $AB, A'B'$ und $AC, A'C'$ parallel, so muss auch $BC, B'C'$ parallel sein.



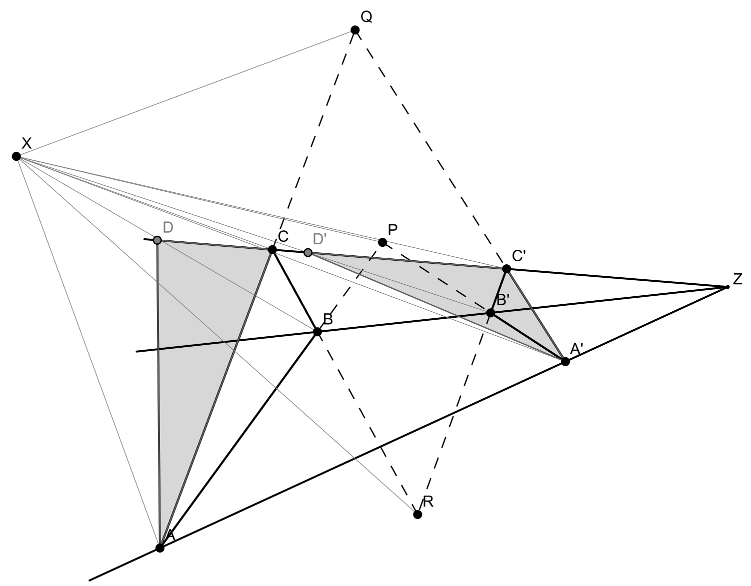
Folglich liegen die Ebenen, in welchen sich ABC und $A'B'C'$ befinden, parallel. Nicht-projektiv erscheint dies nicht als ein Sonderfall des Satzes von Desargues, sondern als eine Art von unabhängiger Ergänzung. Projektiv gesehen ist der Zusammenhang klar, denn wenn $AB, A'B'$ und $AC, A'C'$ parallel sind, heißt dies, dass die Schnittpunkte auf der unendlich fernen Gerade liegen, in der sich die beiden parallelen Ebenen, festgelegt durch die Puntke A, B, C bzw. A', B', C', schneiden. Im Sinne der Aussage des Satzes muss dann auch der dritte Schnittpunkt auf dieser Ferngeraden liegen.

Beweis (nur für eine Richtung):

1. Angenommen, die durch die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ festgelegten Ebenen e und e' sind verschieden. Dann liegen die Schnittpunkte P von AB und $A'B'$, Q von AC und $A'C'$ sowie R von BC und $B'C'$ alle drei sowohl in e (denn sie gehören zu den in e liegenden Geraden AB, AC bzw. BC) als auch in e' (denn sie gehören zu den in e' liegenden Geraden $A'B'$, $A'C'$ und $B'C'$). Also liegen sie im Schnitt dieser Ebenen - und das ist eine Gerade (vgl. XI 3 bei Euklid: Zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, schneiden sich genau in einer Geraden).

2. Angenommen, die beiden Dreiecke liegen in ein und derselben Ebene. Dann führt man dies auf Teil 1 zurück, indem man außerhalb dieser Ebene einen

Punkt X wählt und diesen mit den Punkten $A, B, C, A', B', C', P, Q, R$ verbindet. Wähle auf XB einen Punkt D verschieden von X und B und betrachte den Schnittpunkt D' von ZD und XB'.



Dann liegen die Dreiecke ADC und $A'D'C'$ perspektivisch bezüglich X. Weiterhin liegen sie nicht in einer Ebene. Also liegen die Schnittpunkte P' (von $AD, A'D'$), Q (von $AC, A'C'$) und R' (von $DC, D'C'$) auf einer Geraden nach Teil 1. Bei Zentralprojektion von X aus werden aber P', Q, R' auf P, Q, R abgebildet. Also liegen auch die letztgenannten drei Punkte auf einer Geraden. ■

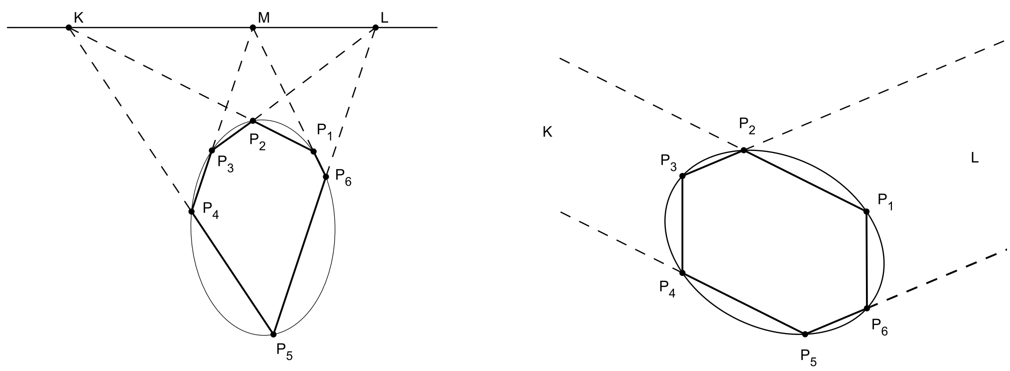
Obwohl es sicher naheliegend ist, den Satz von Desargues „räumlich" zu sehen (Z als Lampe, $A'B'C'$ als Dreieck auf einer Folie, ABC als dessen Bild an der Wand), ist er eigentlich ein ebener Satz. Deshalb ist es erstaunlich, dass man ihn räumlich beweist. Man hat lange nach einem ebenen Beweis gesucht; die (negative) Lösung wurde kurz vor 1900 von David Hilbert (1862 - 1943) gefunden und in systematische Zusammenhänge gebracht.

Die Situation, die im Satz von Desargues betrachtet wird, ist in einer verblüffenden Weise symmetrisch: Man hat 10 Punkte und 10 Geraden, durch jeden Punkt gehen 3 Geraden und auf jeder Gerade liegen 3 Punkte. Jeder der 10 Punkte kann als Projektionszentrum dienen (dann muss man natürlich die Dreiecke entsprechend bilden). Seit Theodor Reye (1838 - 1919) nennt man solche Gebilde „Konfigurationen”.

Damit wollen wir unseren Überblick zu Desargues beenden. Rückblickend fällt auf, dass der später so genannte Begründer der projektiven Geometrie kaum projektive Methoden verwendete: Seine Sätze und Beweise sind noch stark vom Euklidischen Vorbild geprägt. So kann man beispielsweise die Sätze von Pappos und Desargues einfach und in voller Allgemeinheit beweisen, wenn man einen typisch projektiven „Trick” verwendet, indem man eine Gerade auf die unendlich ferne Gerade projiziert. Das wird erst im 19. Jahrhundert Schule machen in Anknüpfung an **Jean Victor Poncelet** (1788 - 1867), den eigentlichen Begründer der projektiven Geometrie.

Wie bereits bemerkt blieb Desargues’ Werk weitgehend unbeachtet. Eine Ausnahme hiervon im Sinne einer produktiven Weiterentwicklung gab es dennoch: **Blaise Pascal** (1623 - 1662). Wie bereits erwähnt gehörten dessen Vater Etienne, nach dem übrigens die Pascalsche Schnecke benannt ist, und Desargues dem Kreis um M. Mersenne an. Pascal junior verfasste mit 16 Jahren nach autodidaktischen Studien der Mathematik - hauptsächlich erfand er seiner Schwester zufolge Euklids „Elemente” neu (sein Vater hatte ihm mathematische Lektüren untersagt) - eine kleine Abhandlung über Kegelschnitte: „Essay pour les coniques” (1640). Übersetzungen dieses Textes (mit Anmerkungen) findet man bei Smith 1959, 326 - 330 und Struik 1969, 163 - 168. Darin findet sich der heute so genannte **Satz von Pascal:**

> Sind $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ die sechs Eckpunkte eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks. Dann liegen die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden P_1P_2, P_4P_5 genannt K, P_2P_3, P_5P_6 genannt L und P_3P_4, P_6P_1 genannt M einander gegenüber liegende Ecken auf einer Geraden.



Das „mystische Sechseck"

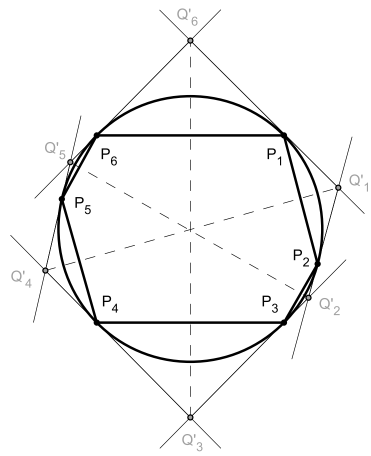
Ein **Beweis** im Stile des 19. Jahrhunderts verläuft so (bei Pascal gibt es Andeutungen, keinen ausführlichen Beweis, die in etwa in diese Richtung gehen). Auch der Satz selbst tritt bei Pascal nur implizit auf, allerdings in einer allgemeinen - auch die Geradenkreuzung enthaltenden (Satz von Pappos) - Form):

> Vermöge einer Zentralprojektion können wir den Kegelschnitt auf einen Kreis abbilden und damit das einbeschriebene Sechseck, derart dass die Seiten P_2P_1 und P_4P_5 sowie P_3P_2 und P_6P_5 parallel sind (also die Schnittpunkte K und L auf der Ferngerade liegen). Der erste Teil hiervon ist klar, der zweite keineswegs. Er ist eine Entdeckung von J.V. Poncelet (1814); wir kommen später hierauf zurück. Die Kreisbögen $P_2P_3P_4$ und $P_1P_6P_5$ sind gleichlang, denn sie werden von parallelen Sehnen ausgeschnitten. Dann sind die zugehörigen Sehnen P_2P_4 und P_1P_5 gleichlang und somit die zugehörigen Peripheriewinkel $\angle P_2P_3P_4$ bzw. $\angle P_1P_6P_5$ gleichgroß (III,21). Also bilden die Geraden P_3P_4 und P_6P_1 mit den parallelen Geraden P_3P_2 bzw. P_5P_6 gleichgroße Winkel, sind also selbst parallel. Also ist M auch ein unendlich ferner Punkt und somit K, L und M kollinear. ■

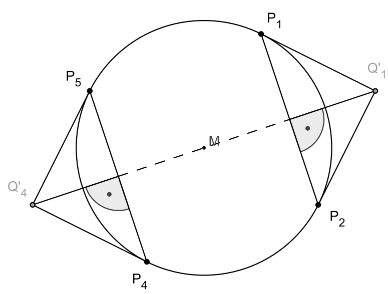
Erst im Jahre 1806 bewies der französische Mathematiker **Charles-Julian Brianchon** (1783 - 1864) einen Satz, der mit dem von Pascal eng verwandt ist:

> Es sei $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ ein einem Kegelschnitt umbeschriebenes Sechseck. Dann schneiden sich die Diagonalen Q_1Q_4, Q_2Q_5 und Q_3Q_6 in einem Punkt.

Der Beweis ergibt sich durch Zurückführung auf den Satz von Pascal, indem man die Berührpunkte $P_1, ..., P_6$ des umbeschriebenen Sechsecks nimmt und diese durch Kanten $P_1P_2, ..., P_6P_1$ verbindet. Dann entsteht ein einbeschriebenes Sechseck $P_1, ..., P_6$. Wenn man nun wieder die Zentralprojektion aus dem Beweis des Satzes von Pascal anwendet, ergibt sich der Kreis mit einbeschriebenem Sechseck und drei Paaren paralleler Seiten. Seien $Q'_1, ..., Q'_6$ die Bilder der Punkte $Q_1, ..., Q_6$ bei dieser Projektion. Diese sind Eckpunkte eines dem Kreis umbeschriebenen Sechsecks.



Zu zeigen ist, dass die Geraden $Q'_1Q'_4$, $Q'_2Q'_5$ und $Q'_3Q'_6$ durch einen Punkt gehen. Alle Dreiecke der Form $P_1Q'_1P_2, ..., P_6Q'_6P_1$ sind gleichschenklig (das folgt z.B. über den Satz über die Tangentenabschnitte III,37), die Höhen stehen also senkrecht auf den Grundseiten $P_1P_2, ..., P_6P_1$ und halbieren diese, folglich gehen sie alle durch den Kreismittelpunkt. Da P_1P_2 und P_4P_5 parallel sind, muss die Höhe auf P_1P_2 die Höhe auf P_4P_5 in M geradlinig fortsetzen (dies ist dann nichts anderes als die Gerade $Q'_1Q'_4$). Analoges gilt paarweise für die anderen Höhen. Folglich schneiden sich $Q'_1Q'_4$, $Q'_2Q'_5$ und $Q'_3Q'_6$ im Mittelpunkt des Kreises.

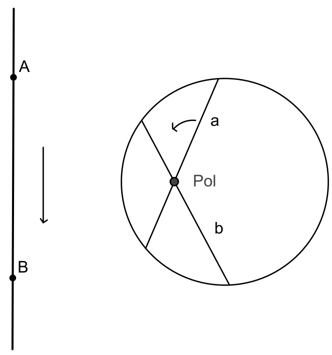


Satz von Pascal	Satz von Brianchon
einbeschriebenes Sechseck	umbeschriebenes Sechseck
Kanten	Eckpunkte
drei Schnittpunkte auf einer Geraden	drei Geraden durch einen Punkt

Das ist ein typisches Beispiel für das, was man später im 19. Jahrhundert duale Sätze nennen wird. Ein wichtiges Ziel war es dann erstens, zu versuchen, dieses Prinzip von Dualität zu verstehen, und zweitens, sicherzustellen, dass durch Dualisieren bewiesener Sätze wieder wahre Sätze entstehen. Damit erreicht man a) eine große Allgemeinheit (ein wichtiges Thema in der Geometrie des 19. Jahrhunderts) und b) eine erhebliche Arbeitsersparnis.

Neben Pascal und Bosse muss noch der Maler **Philippe de la Hire** (1640 - 1718) als Anhänger Desargues' erwähnt werden. Er beschäftigte sich hauptsächlich mit der Theorie der Kegelschnitte, in der er systematisch die Methode des Projizierens und Schneidens verwandte („Sectiones Conicae", 1685). In diesem Kontext benutzte er auch die Definitionen von Ellipse und Hyperbel über die Brennpunktabstände. Bemerkenswert ist folgendes Resultat von ihm:

> Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich die Polare dieses Punktes um den Pol der Ausgangsgeraden.



Nach La Hire gerieten die Ergebnisse von Desargues, Pascal und ihm selbst weitgehend in Vergessenheit, um erst im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts wieder entdeckt zu werden. Eine Ursache für diese Verdrängung war sicherlich, dass in anderen Bereichen der Mathematik - allen voran Algebra und Analysis - nach 1700 eine stürmische Entwicklung einsetzte, die die Aufmerksamkeit der Mathematikergemeinschaft auf sich zog. In der Geometrie selbst dominierte die analytische Geometrie (damals genannt: Anwendung der Algebra auf die Geometrie), die einen ungehören Zuwachs an Erkenntnis versprach und auch lieferte.

Rückblickend kann man drei wichtige Aspekte benennen (vgl. Kline 1972, 299 - 301), die bei den Pionieren der projektiven Geometrie auftraten und die später wichtig werden sollten für das Forschungsprogramm „projektive Geometrie”:

1. Die systematische (stetige) Veränderung von Figuren, wie beispielsweise in La Hires Resultat. Ein Vorläufer hierfür war **Johannes Kepler**, der in einer Schriftzur Optik („Ad Vitellionem Paralipomena quibus Astronomine pars Optica Traditur” (1604)) beobachtet hatte, dass man durch Veränderung der Brennpunkte (und Variation der Exzentrizität) aus dem Kreis (hier fallen die Brennpunkte im Mittelpunkt zusammen) die Ellipse, aus dieser die Parabel (ein Brennpunkt verschwindet im Unendlichen) und dann die Hyperbel (der verschwundene Brennpunkt kehrt auf der anderen Seite wieder) und schließlich die Geradenkreuzung (Brennpunkte fallen im Schnittpunkt zusammen) bekommen kann.

2. In Gestalt von Projizieren und Schneiden treten die Ideen Transformation (Abbildung) und Invarianten auf. Dies führt zu einem vertieften Bewusstsein von den verwandten Methoden und zur Frage von deren Tragweite.

3. Eine Geometrie zeichnet sich ab, die auf den Beziehungen zwischen Punkte, Geraden und Ebenen beruht ohne Streckenlängen oder Winkelgrößen zu betrachten. Später sprach man von der „Geometrie der Lage” (im Gegensatz zur „Geometrie des Maßes”), um diesen Aspekt zu betonen. Das Hilfsmittel ist nur noch das Lineal, der Zirkel entfällt.

Bei solchen rückblickenden Einschätzungen ist allerdings immer Vorsicht geboten.

3 Die Entstehung der projektiven Geometrie

Es gibt so eine Art „Geburtsurkunde" der projektiven Geometrie. Das ist Jean Victor Poncelet's Buch „Traité des propriétés projectives des figures" (etwa: Lehrbuch der projektiven Eigenschaften von Figuren) von 1822. Bevor wir uns mit diesem und Poncelet's Vorarbeiten hierzu beschäftigen, müssen wir noch auf **Gaspard Monge** (1746 - 1818) und seine darstellende Geometrie eingehen. Diese war sowohl in systematischer Hinsicht ein wichtiger Schritt in Richtung projektiver Geometrie als auch in persönlicher: Poncelet und viele andere französische Geometer der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts waren nämlich entweder direkte Schüler von Monge oder aber von der von Monge an der neugegründeten „École polytechnique" (1794) begründeten Lehrtradition derselben nachhaltig beeinflusst.

3.1 Monge und die darstellende Geometrie

Gaspard Monge (1746 - 1818) gehört vielleicht zu den interessantesten Gestalten der Mathematikgeschichte, nicht zuletzt weil er in turbulenten Zeiten tief in die Politik seines Landes verstrickt war. Ein anderer Mathematiker, für den das ebenfalls gilt, war Lazare Carnot (1753 - 1823), Schüler von Monge. Er organisierte die berühmte „Levée en masse" und wurde damit zum militärischen Retter der Französischen Revolution.

Aus bescheidenen bürgerlichen Verhältnissen stammend gelang es Monge 1765 eine Anstellung an der Militärschule in Mézière (Ardennen) als Zeichner und Gehilfe zu erlangen. Eine Professur blieb ihm, da nicht adlig, vorerst verwehrt. Gefördert durch den Mathematikprofessor Charles Bossut (1730 - 1814) wurde er dann zu dessen Nachfolger ernannt (1769), 1770 erhält er auch die Professur für Physik. 1780 wurde er Mitglied der Pariser Akademie, 1783 wurde er Prüfer für die Marineschulen und unternahm als solcher zahlreiche Reisen durch Frankreich. Nach Ausbruch der Revolution engagierte er sich für deren Sache und wurde 1792/93 Marineminister für etwa ein halbes Jahr, 1794 war er an der Gründung der „École polytechnique" und der „École normale" beteiligt. Er begleitete später Napoleon nach Ägypten und Italien. 1816 verlor Monge alle Ämter und Auszeichnungen im Zuge der Restauration. Monge gilt als der Vater der École polytechnique, die im 19. Jahrhundert eine zentrale Rolle - gewissermaßen als Zenith - im französischen Bildungssystem spielen sollte (Militärs, Ingenieure).

Neben Beiträgen zur Analysis, insbesondere auch zur Differentialgeometrie, gilt Monge als der Begründer der darstellenden Geometrie (er sprach von deskriptiver Geometrie), also desjenigen Gebiets, in dem man die zweidimensionale Darstellung dreidimensionaler Körper untersucht. Das hat eine stark technisch geprägte Komponente, gab aber auch rein geometrischen Forschungen einen beträchtlichen Anstoß. Im Folgenden möchte ich einige Ausführungen zu Monge's Buch „Géométrie descriptive - Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la République" (Paris, an VII = 1799) machen. Monge war übrigens auch an der Ausarbeitung des Revolutionskalenders wesentlich beteiligt. Diese Vorlesungen wurden von Monge's Assistenten Hachette ausgearbeitet; sie enthalten 132 Seiten Text und 25 aufwändige Figurentafeln. Monge führte zwei Neuerungen in seiner Lehre ein: Erstens verwandte er materiale Modelle, um geometrische Sachverhalte zu veranschaulichen, und zweitens legte er großen Wert auf die eigenständige Aktivität seiner Schüler: Das praktische Ausführen von Zeichnungen machte einen erheblichen Teil des Studiums aus.

Den Vorlesungen geht ein „Programme" voraus, in dem wesentliche Anliegen der Vorlesungen - und allgemein der neugegründeten Hochschulen - formuliert werden.

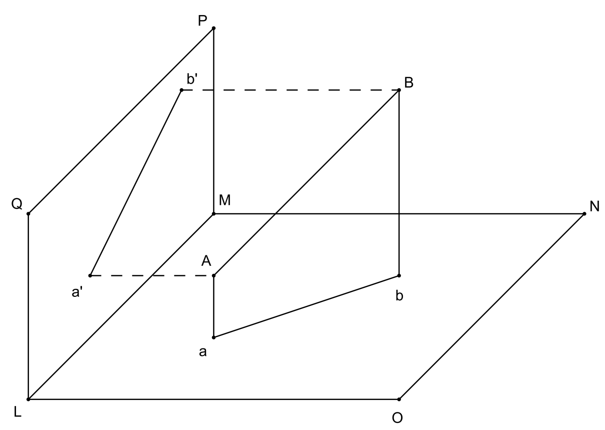
> „Um die französische Nation aus der Abhängigkeit von der ausländischen Industrie zu befreien, in der sie bis zur Gegenwart gefangen war, muss erstens das nationale Bildungswesen auf die Kenntnisse derjenigen Gegenstände hin orientiert werden, die Genauigkeit verlangen. Diese wurden bis auf den heutigen Tag vollkommen vernachlässigt. Weiterhin müssen die Hände unserer Handwerker an die Bedienung mannigfaltiger Instrumente gewöhnt werden, die dazu dienen, in die Produkte Präzision hinzutragen und deren unterschiedliche Ausprägung zu messen. Dann können die für die Genauigkeit sensibel gewordenen Abnehmer diese für die verschiedenen Produkte verlangen und den erforderlichen Preis bezahlen; unsere Handwerker aber, die von früher Jugend an an die Genauigkeit gewohnt sind, werden in der Lage sein, diese zu erreichen.
>
> Zweitens ist es erforderlich, die Kenntnis einer großen Zahl von Naturphänomenen zu verbreiten, denn diese ist unverzichtbar für die Fortschritte der Industrie, ...
>
> Schließlich muss unter unseren Handwerkern die Kenntnis derjenigen Vorgehensweise der Künste und diejenige der Maschinen verbreitet werden, die zum Ziel haben, entweder die Handarbeit zu verringern oder aber den Produkten, die diese Arbeit hervorbringt, mehr Gleichförmigkeit und Präzision zu verleihen. In dieser Hinsicht, so ist zuzugeben, können wir viel bei den fremden Nationen entlehnen.
>
> Alle diese Punkte lassen sich nur erfüllen, wenn man dem nationalen Erziehungssystem eine neue Richtung gibt.
>
> Hierzu gilt es zuerst einmal all die jungen Leute, die über Intelligenz

verfügen, mit der Verwendung der deskriptiven Geometrie vertraut zu machen,..." (Monge 1799, 1)

Das Wesen der darstellenden Geometrie beschreibt Monge folgendermaßen:

> „Die deskriptive Geometrie hat zwei Ziele: Das erste ist, Methoden bereitzustellen, mit denen man auf einem Zeichenblatt von nur zwei Dimensionen - nämlich Länge und Breite - alle Körper der Natur, die deren drei besitzen - Länge, Breite und Tiefe - darstellen kann, vorausgesetzt allerdings, dass sich diese Körper in strenger Weise definieren lassen.
>
> Das zweite Ziel ist, eine Art und Weise bereitzustellen, die es erlaubt, aufgrund einer exakten Beschreibung die Formen der Körper wieder zu erkennen und hieraus alle Wahrheiten abzuleiten, die sich sowohl aus ihrer Form als aus ihren entsprechenden Längen ergeben." (Monge 1799, 5)

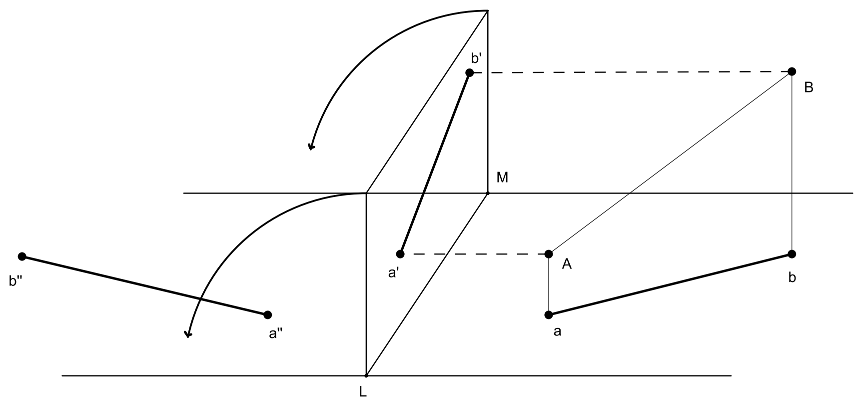
In der ersten Vorlesung erläutert Monge zunächst einige Möglichkeiten, die Lage eines Punktes im Raum zu beschreiben. Schließlich kommt er im §7 auf sein eigentliches Thema zu sprechen - die sogenannte Zweitafelprojektion. Hierzu betrachtet er zwei orthogonale Ebenen $LMNO$ und $LMPQ$ mit der gemeinsamen Geraden LM und projiziert senkrecht in diese eine Gerade, die im Raum liegt:

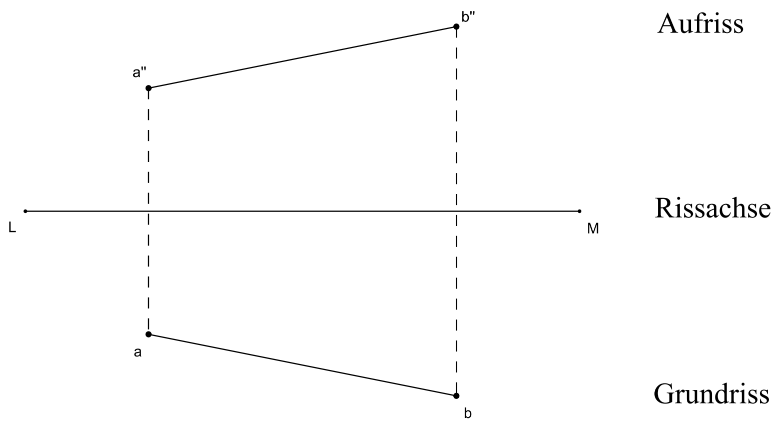


(vgl. Figur 2 in Monge 1799, Tafel 1)

Umgekehrt lässt sich die Gerade AB rekonstruieren, indem man in ab bzw, $a'b'$ senkrechte Ebenen auf $LMNO$ und $LMPQ$ errichtet. Deren Schnitt ist die gesuchte Gerade AB. In Gestalt der beiden Projektionen verfügt man also über alle erforderlichen Informationen.

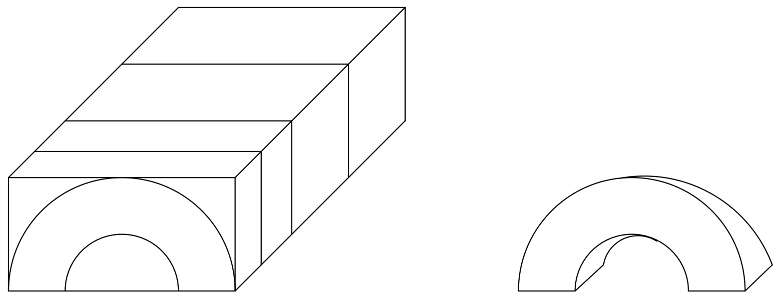
Da zwei Punkte genügen, um eine Gerade festzulegen, muss man nur die Punkte A und B betrachten sowie deren Projektionen a (in $LMNO$), a' (in $LMPQ$), b und b'. Aus praktischen Gründen - so Monge - ist es sinnvoll, sich vorzustellen, dass die vertikale Ebene um die Achse LM in die Ebene $LMNO$ gedreht wird:





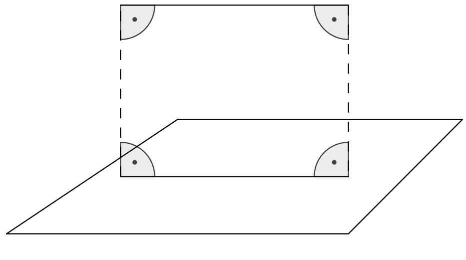
Bemerkung zur Terminologie: Die Aufrissebene liegt eigentlich „hinten"; was Monge zeichnet wird heute Seitrissebene genannt. Standardmäßig betrachtet man Grund- und Aufrissebene; prinzipiell könnte man auch Grund- und Seitrissebene nehmen.

Das geschilderte Verfahren hat natürlich viel mit der Einführung von Koordinaten im Raum zu tun; das Ziel ist allerdings hier kein rechnerisches. Vorläufer findet man in gewissen Praktiken der Perspektive (vgl. den „Schleier" im Kapitel 1 oben), aber auch in der Praxis des Steinschnittes. Dort geht es darum, aus einem etwa quaderförmigen zugehauenen Stein ein bestimmtes Element - z.B. ein Stück eines Bogens - herauszumeißeln:

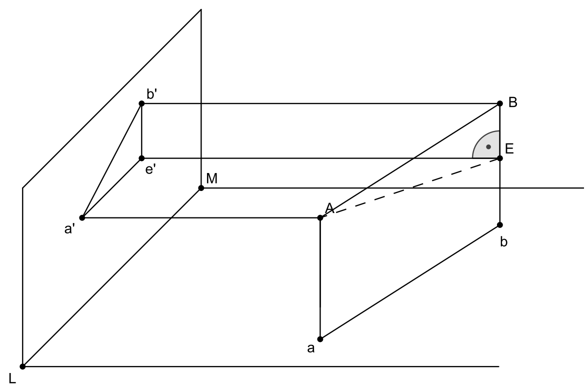


Um zum gewünschten Ergebnis zu gelangen, muss man sich das Element als Durchdringung von seitlichen Aussichten vorstellen - ganz ähnlich wie Monge's Zweitafelprojektion. Im §9 wendet sich dann Monge der Frage zu, wie man aus Grund- und Aufriss einer Strecke deren wahre Länge ermitteln kann. Es ist klar, dass dies für Anwendungen außerordentlich wichtig ist, wobei hier natürlich noch eine maßstäbliche Verkleinerung benutzt werden muss.

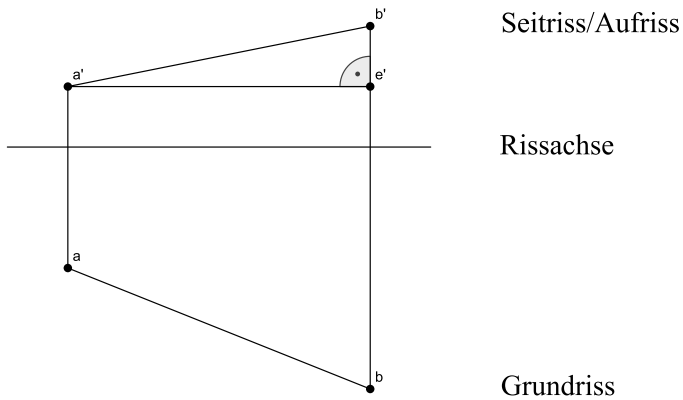
Klar ist: Liegt die fragliche Strecke parallel zur Grundrissebene/Aufrissebene, so kann man ihre wahre Länge der fraglichen Projektion entnehmen. Die Strecke und ihre Projektion bilden zusammen mit den projizierenden Geraden des Anfangs- und Endpunkts ein Rechteck.



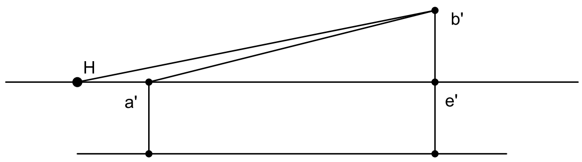
Ist die Strecke nicht parallel zu einer Rissebene, so hat man die Situation von oben (Monge folgend zeichnen wir wieder die Seitrissebene):



Monge erinnert seinen Leser ausdrücklich daran, dass die obige Abbildung nichts mit der Längenbestimmung zu tun haben kann, da sie perspektivisch ist (Monge 1799, 15). Sie erläutert aber, wie man auf die Lösung kommt.
Man fälle von A das Lot auf die Gerade bB; Fußpunkt sei E. Dann ist AE parallel zur Grundrissebene, also ist AE gleichlang mit ab.
Die Idee ist nun, mit Hilfe der beiden Projektionen das Dreieck AEB zu konstruieren; dieses liefert die wahre Länge AB.
Hierzu projizieren wir den Punkt E in die Seitrissebene. Sein Bildpunkt sei e'. Da BE parallel zur Seitrissebene ist - es steht ja senkrecht auf der Grundrissebene - ist $b'e'$ gleichlang BE. Der Punkt e' aber lässt sich in der Seitrissebene konstruieren: Er ist der Lotfußpunkt des Lotes von a' auf das Lot von b' auf die Rissachse LM.
Konkret geht man so vor:



Zuerst konstruiert man in der Seitrissebene den Punkt e' und damit die Strecke $b'e'$. Von e' aus trägt man auf der Geraden $a'e'$ in Richtung a' die Strecke ab aus der Grundrissebene ab. Deren Endpunkt sei H. Dann verbinde man H mit b'. Die Länge der Strecke Hb' ist gleich der Länge der Strecke AB.



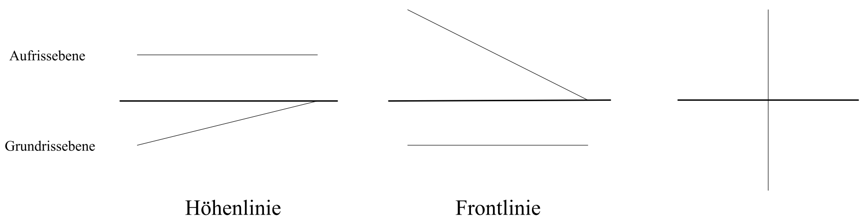
■

Hat man ein Polyeder nebst seinen beiden Projektionen in der Rissebene, so kann man mit Hilfe des eben geschilderten Verfahrens aus den Rissen die wahren Längen seiner Kanten rekonstruieren.

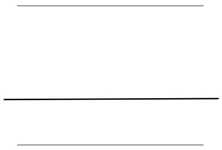
Auffallend ist, dass Monge recht wenig zum Thema Geraden sagt, sondern schnell weitergeht zur Darstellung von Flächen, insbesondere der Ebene.

Er erwähnt einen Sonderfall, nämlich denjenigen, dass die darzustellende Gerade senkrecht zu einer Rissebene ist: Dann ist ihr Bild klarerweise ein Punkt.

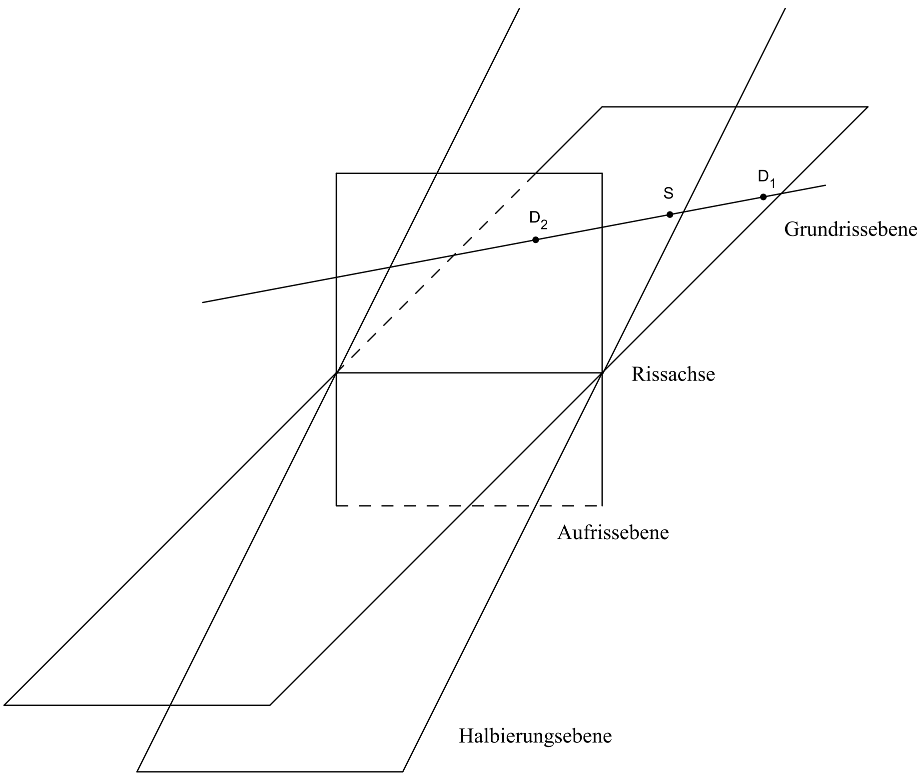
Läuft die Gerade parallel zur Grundrissebene, so ist ihr Bild in der Aufrissebene eine Parallele zur Rissachse („Höhenlinien"), läuft sie parallel zur Aufrissebene, so ist ihr Bild in der Grundrissebene eine Parallele zur Rissachse („Frontlinien"). Interessant sind auch Geraden, deren Bilder in den beiden Rissebenen sich geradlinig fortsetzen; diese liegen in Ebenen, welche die Rissachse senkrecht schneiden.

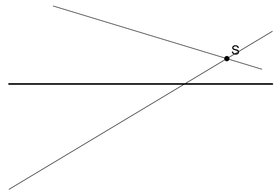


Eine Gerade schließlich, deren beiden Projektionen parallel zur Rissachse sind, ist eine, die selbst parallel zur Rissachse ist. Sie ist sowohl Höhen- als auch Frontlinie.

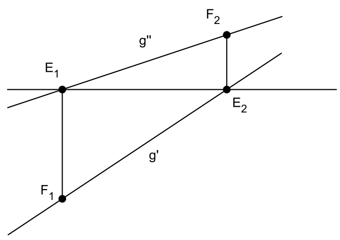


Um die Zwei-Tafel-Darstellung vollständiger zu machen, ist es oft sinnvoll, die Projektionen über die Rissachse fortzusetzen. Dann stehen die Punkte der Aufrissebene auch für solche der Grundrissebene und umgekehrt. Projektionen von Punkten der Halbierungsebene (d.i. die Ebene, welche den rechten Winkel zwischen den Rissebenen halbiert) fallen dann zusammen.





Spurpunkte sind die Punkte, in denen eine Gerade („in allgemeiner Lage”) die Rissebene schneidet (D_1 und D_2 oben). Aus der Zwei-Tafel-Darstellung einer Geraden kann man die Spurpunkte rekonstruieren.



Bezeichnung: ’ steht für das Bild in der Grundriss-, ” für das Bild in der Aufrissebene.

In E_1 schneidet das Bild g'' der Geraden g die Rissachse; senkrecht über diesem Punkt muss folglich der eine Spurpunkt - nämlich der Schnittpunkt mit der Aufrissebene - liegen. Also ist E_1F_1 die Länge des Lotes vom Spurpunkt auf die Aufrissachse. Analog argumentiert man für E_2. Die Spurpunkte sind die Punkte F_1 und F_2 (es sind wirklich diese Punkte, denn diese liegen ja in der Rissebene selbst [genauer: in der gedrehten Aufrissebene]). Bei Höhen- und Frontlinien gibt es jeweils nur einen Spurpunkt; bei Höhenlinien, die auch Frontlinien sind, gar keinen.

Das nächste Thema, das Monge selbst behandelt, ist die Darstellung von Flächen. Er betont, dass es für diese schwierige Aufgabe kein Patentrezept gibt und dass die Erfahrung eine große Rolle spielt.

Er betrachtet Flächen mit einer einfachen Struktur. Seine Behauptung, alle Flächen hätten eine derartige Struktur, ist vermutlich etwas zu optimistisch (Monge

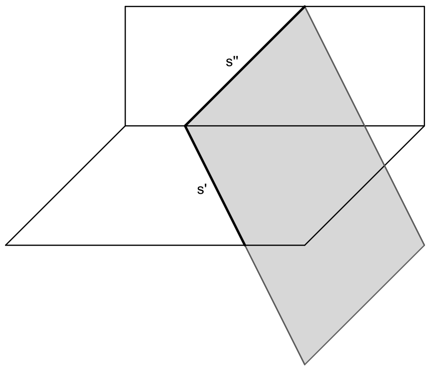
1799, 19). Eine Kurve bewegt sich - eventuell unter stetiger selbstähnlicher Veränderung - entlang einer anderen Kurve.
Beispiele:

1. Zylinder: Kreis entlang Gerade (oder umgekehrt)

2. Kegel: Kreis entlang Gerade, wobei aber der Kreis bis zum Punkt schrumpft

3. Ebene: Gerade entlang Gerade

Die Idee ist, für die Zwei-Tafel-Darstellung diese Struktur zu nutzen. Für die Ebene ist das einfach, denn diese schneidet i.a. beide Rissebenen in Geraden. Diese Geraden nennt man Spuren der Ebene.



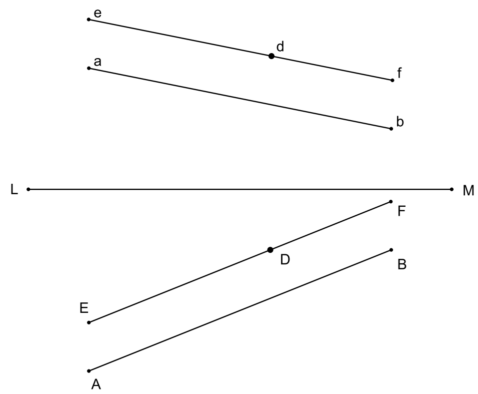
s' ist die Grundrissspur; s'' die Aufrissspur

Auch hier gibt es Sonderfälle: Eine Ebene, welche parallel zu einer Rissebene ist, besitzt nur eine Spurgerade. Bei einer Ebene, die senkrecht auf der Rissachse steht, setzen sich die Spurgeraden geradlinig fort (genau genommen fallen sie zusammen). Steht eine Ebene senkrecht auf einer Rissebene, so steht eine ihrer Spurgeraden senkrecht auf der Rissachse.

Monge stellte Aufgaben, die seine Studenten in den Zeichenstunden bearbeiten mussten. Auch hier sieht man, dass Monge das aktive Moment in der Ausbildung sehr wichtig nahm (was zu seiner Zeit völlig unüblich war!). Die **erste Aufgabe** lautet:

> „Es sei ein Punkt gegeben, dessen Projektionen D und d sein mögen, sowie eine Gerade mit den Projektionen AB und ab. Zu konstruieren sind die Projektionen einer zweiten Geraden, die der ersten parallel ist und durch den gegebenen Punkt geht." (Monge 1799, 21)

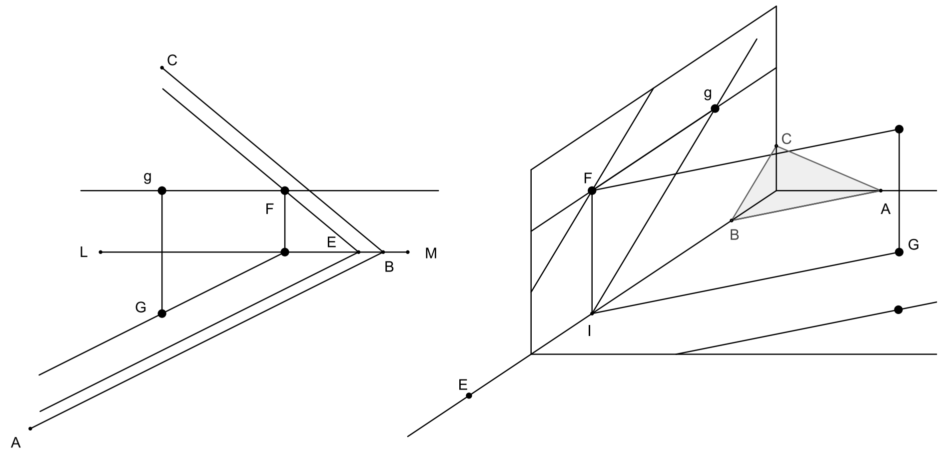
Die Lösung ist einfach, wenn man folgendes eingesehen hat: Die Projektionen paralleler Geraden sind parallel. Nehmen wir beispielsweise die Grundebene und zwei parallele Geraden g, h. Die Projektionen g', h' dieser Geraden sind die Schnitte derjenigen Ebenen mit der Grundrissebene, die durch die fraglichen Geraden gehen und senkrecht auf der Grundrissebene stehen. Diese enthalten aber zwei Paare paarweise paralleler Geraden: g und h nach Voraussetzung und jeweils eine Senkrechte auf die Grundrissebene (Senkrechte auf ein und dieselbe Ebene sind immer parallel, vgl. XI). Somit sind die Ebenen nach XI parallel, also auch ihre Schnitte mit der Grundrissebene (XI,???).
Die **Lösung** besteht also darin, durch d die Parallele ef zu ab zu zeichnen und durch D die Parallele EF zu AB.



Die zweite Aufgabe ist das analoge Problem für Ebenen: Es sei eine Ebene gegeben, deren Spurgeraden AB, BC seien und ein Punkt mit den Projektionen G, g. Es sollen die Spurgeraden derjenigen Ebene konstruiert werden, die durch den Punkt geht und parallel zur ersten Ebene ist (Monge 1799, 22).

Klar ist: Spurgeraden paralleler Ebenen sind parallel. Das Problem besteht aber darin, diejenige Ebene aus der Schar paralleler Ebenen zu finden, die durch den gegebenen Punkt geht. Naheliegend ist, die Parallelen zu AB und BC durch G bzw. g zu ziehen. Dann erhält man i.a. aber keine Ebene durch den gegebenen Punkt! Das ist nur dann der Fall, wenn die fragliche Ebene senkrecht auf der Rissachse - also senkrecht auf der Grundriss- und senkrecht auf der Aufrissebene - steht.

Es sei I der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch G mit der Rissachse. Dann ist gI parallel zur Spurgeraden in der Aufrissebene. Die gesuchte Ebene geht nicht durch I (siehe oben), wohl aber durch einen Punkt F auf der Senkrechten zur Rissachse im Punkt I in der Aufrissebene. Dieser Punkt F muss „über" der Grundrissebene liegen in der „Höhe” von g und damit in der „Höhe” des gegebenen Punktes. Dieser Punkt F ist der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch den gegebenen Punkt mit der Aufrissebene. Folglich findet man die gesuchte Ebene, indem man durch F die Parallele zu BC zieht. Diese schneide die Rissachse in E. Durch E lege man die Parallele zu AB in der Grundrissebene. Das ist dann die zweite Spurgerade der gesuchten Ebene; FE ist die andere.

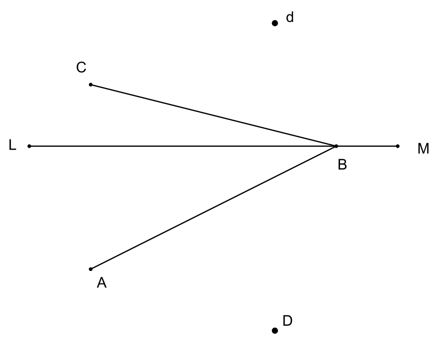


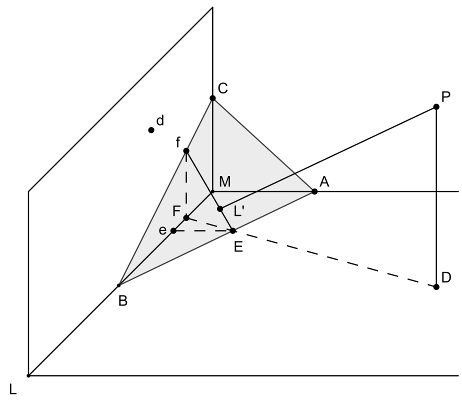
Eine symmetrische Lösung ergibt sich, wenn man durch G die Parallele zur Rissache zieht. Dann legt man durch g die Parallele zu BC, erhält deren Schnittpunkt H mit der Rissachse und errichtet in H die Senkrechte auf der Rissachse in der Grundrissebene. Deren Schnittpunkt mit der Parallelen durch G sei D. D legt dann die Spurgeraden fest.■

Die nächste Aufgabe, die Monge stellt lautet so:

> „Sei eine Ebene [e] mit ihren beiden Spurgeraden AB, BC gegeben sowie ein Punkt [P] mit seinen beiden Projektionen D, d. Zu konstruieren sind 1. die Projektionen des Lotes von diesem Punkt auf die Ebene; 2. die Projektionen des zugehörigen Lotfußpunktes [L'].”

Die Projektionen von L' seien G (Grundrissebene) und g (Seitrissebene).





Analysis: Sei PL' das gesuchte Lot. Betrachte die Ebene durch L', P und D. Diese steht senkrecht auf der Grundrissebene und senkrecht auf der gegebenen Ebene. Der Schnitt der Grundrissebene mit der Ebene durch L, P und D sei ED. Dann ist ED die Projektion von LP in die Grundrissebene. Analog findet sich die andere Projektion.

Um den Lotfußpunkt zu finden, betrachte man den Schnitt der Ebene durch L, P und D mit der gegebenen Ebene. Dieser sei Ef (E auf AB, f auf BC). L muss auf Ef liegen. Sei F die Projektion von f in die Grundrissebene; F liegt dann auf der Rissachse LM. Dann betrachte man die Projektion e von E auf die Seitrissebene; e liegt auf der Rissachse LM.

Andererseits muss die Projektion des Lotfußpunktes auf dg liegen - der Projektion des Lotes in die Seitrissebene: dg steht senkrecht auf BC. Kurz: Es muss dg mit ef geschnitten werden. Beachte: ef ist die Projektion von EF in die Seitrissebene.

Wie man findet man ef? e ergibt sich als Projektion von E, des Lotfußpunktes des Lotes von D auf AB (alles in der Grundrissebene). f liegt senkrecht über F in der Seitrissebene; dabei ist F der Schnittpunkt des Lotes DE mit der Rissachse.

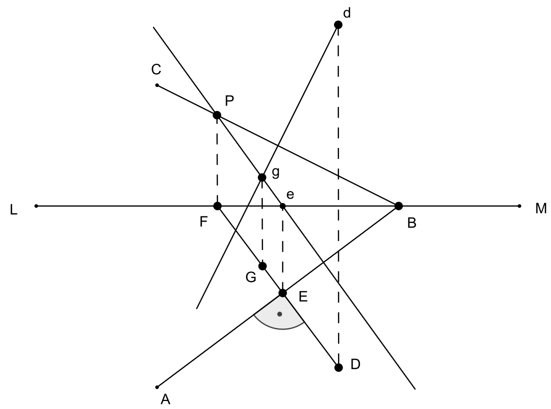
Konstruktion:

1. Fälle das Lot von D auf AB, Fußpunkt sei E. Verlängere DE bis zum Schnittpunkt F mit LM.

2. Fälle das Lot von d auf BC, es heiße dg (aufgefasst als Gerade).

3. Projiziere E auf LM, Bildpunkt sei e.

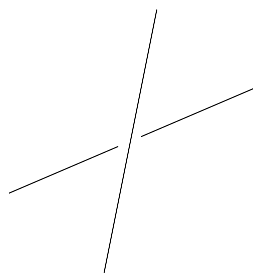
4. Errichte in F die Senkrechte auf LM in der Seitrissebene. Schnittpunkt mit BC sei f.
5. Verbinde e mit f.
6. Schnittpunkt von ef und dg ist die Projektion des Lotfußpunktes in die Seitrissebene.
7. Um die Projektion in die Grundrissebene zu finden, bestimme man den Schnittpunkt des Lotes von g auf LM in der Seitrissebene



g und G müssen auf einem Ordner liegen!

Folgerung: Der Punkt P liegt auf der gegebenen Ebene, wenn seine Projektion D mit E und seine Projektion d mit dem Lotfußpunkt des Lotes von d auf BC in der Seitrissebene zusammenfallen.

Ein kleines Glanzstück von Monge ist das vierte Problem der zweiten Vorlesung: Gegeben seien zwei windschiefe Geraden. Zu bestimmen ist deren gemeinsames Lot sowie die Größe ihres Abstandes.



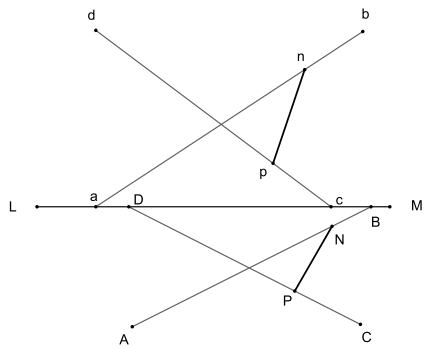
Monge war es auch, der erkannte, dass bei Rotation einer Geraden um eine zu ihr windschiefen Achse ein Hyperboloid entsteht. Dieses ist also eine Regelfläche; sie lässt zwei Scharen von Erzeugenden zu.

Insgesamt fällt es schwer, Monge's Einfluss genau zu fassen. Das liegt teilweise daran, dass er selbst relativ wenig geschrieben hat, man aber viele seiner Ideen aus Äußerungen von Zeitgenossen, insbesondere Schüler, rekonstruieren muss. Andererseits muss seine Wirkung durch seine Vorlesungen enorm gewesen sein - Genaueres weiß man aber nicht.

Monge's darstellende Geometrie hat sicherlich das Interesse an Projektionen gefördert, denn diese werden ja in Gestalt von Parallelprojektionen massiv benutzt. Auch die Frage, welche Eigenschaften bei Projektionen erhalten bleiben und welche nicht, ist immer präsent. Schließlich scheint Monge das Interesse an der Raumgeometrie nachhaltig gefördert zu haben, wobei ihm auch rechnerische Verfahren durchaus nicht fremd waren. Seine wichtigsten Forschungsgebiete neben der darstellenden Geometrie waren die Differentialgeometrie und die Analysis. Allerdings beschäftigte er sich auch intensiv mit Physik und Chemie... und sammelte fleißig erbeutete Kulturgüter in Italien und Ägypten unter Führung eines befreundeten Generals namens Napoléon Bonaparte.

Exkurs: Monge's Konstruktion des gemeinsamen Lots zweier windschiefer Geraden (Monge 1799, 37-39).

Seien zwei windschiefe Geraden gegeben. Die Projektionen in die horizontalen Ebenen dieser Geraden seien AB und CD, diejenigen in die vertikale Ebene ab bzw. cd.



PN bzw. pn seien die Projektionen des gesuchten gemeinsamen Lots in die horizontale und in die vertikale Rissebene.

Die Lösung findet Monge mit Hilfe folgender Überlegung: Wir können eine Ebene konstruieren, die die gegebene „erste" Gerade (er spricht gerne von „Achse") enthält - deren Projektionen, sind AB und ab, - und die parallel zur „zweiten" Geraden (mit den Projektionen CD und cd) ist. Konstruktion wird unten angegeben.

Denkt man sich nun um die zweite Gerade einen Zylinder, dessen Radius gerade gleich der Länge des gesuchten gemeinsamen Lotes ist, so wird die eben konstruierte Ebene eine Tangentialebene an diesen Zylinder sein. Zylinder und Ebene haben genau eine Gerade gemeinsam. Der Schnittpunkt der Projektion dieser Geraden in die horizontale Ebene mit der Projektion AB der ersten Geraden in diese Ebene liefert den Lotfußpunkt: Genauer gesagt dessen Projektion in die horizontale Ebene. Der Schnittpunkt des zugehörigen Ordners mit ab ergibt die andere Projektion des Lotfußpunktes.

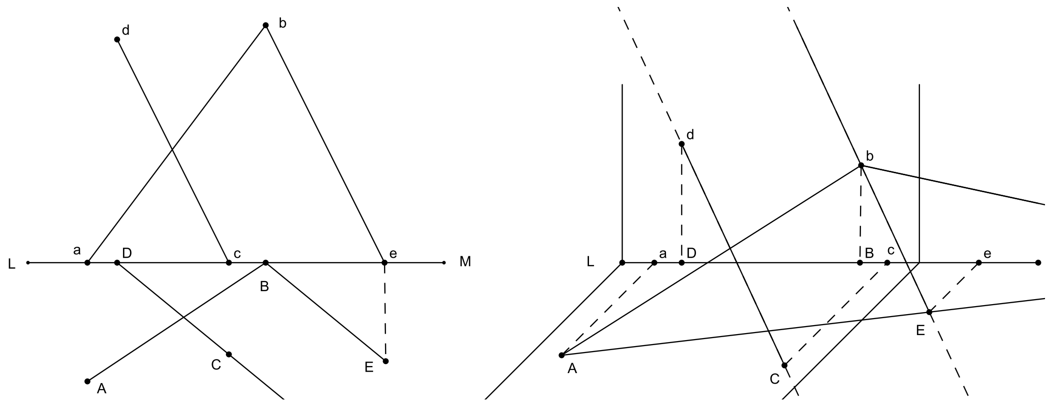
Jetzt muss man nur noch vom Lotfußpunkt das Lot auf die zweite Gerade fällen, was aber bereits bekannt ist.

Die eigentliche Konstruktion zerfällt in mehrere Schritte:

1. Schritt: Konstruktion der Parallelebene
2. Schritt: Konstruktion der Berührgeraden
3. Schritt: Konstruktion des gemeinsamen Lots
4. Schritt: Bestimmung der Länge des Lots

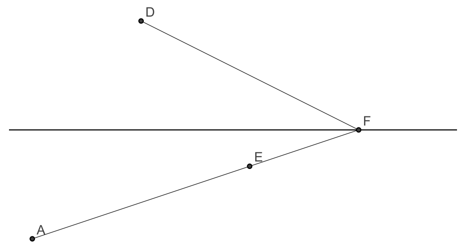
1. Schritt Zugrundeliegende Idee: Parallele Ebenen haben parallele Spurgeraden.

Sei A der Schnittpunkt der ersten Geraden mit der horizontalen Ebene, a dessen Projektion auf die vertikale Ebene. Aufgrund der Voraussetzung liegt a sogar in LM. Analog seien B und b die Projektionen des Punktes, in denen die erste Gerade die vertikale Ebene schneidet. Dann liegt auch B auf LM. Durch den zu B, b gehörigen Punkt wird die Parallele zur zweiten Gerade konstruiert



Die zweite Gerade und der Punkt, in dem die erste die vertikale Ebene schneidet (mit den Projektionen B und b) legen eine Ebene fest. In dieser konstruiert man die Parallele zur zweiten Geraden durch den fraglichen Punkt. In den Projektionen bedeutet das folgendes: In der Horizontalebene ziehen wir die Parallele BE zu CD (E ist ein Punkt, der momentan nur der Bezeichnung dient). Analog zieht man in der Vertikalebene durch b die Parallele be. Wir wählen E so, dass das derjenige Punkt ist, in dem die Parallele die horizontale Ebene trifft; dann ist die zugehörige vertikale Projektion e ein Punkt von LM.

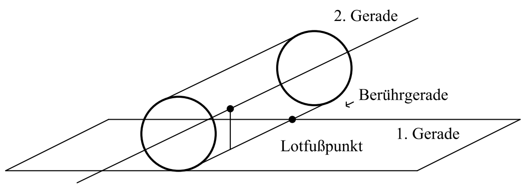
Sei F der Schnittpunkt der Geraden AE mit LM, weiter verbinde man F mit b. Dann sind AF und Fb die Spurgeraden der gesuchten Parallelebene.



Im Raum festgelegt ist die Ebene durch die Punkte A, E und b. F braucht man, weil man die Spurgeraden von Ebenen so festgelegt hat, wie man das gemacht hat.

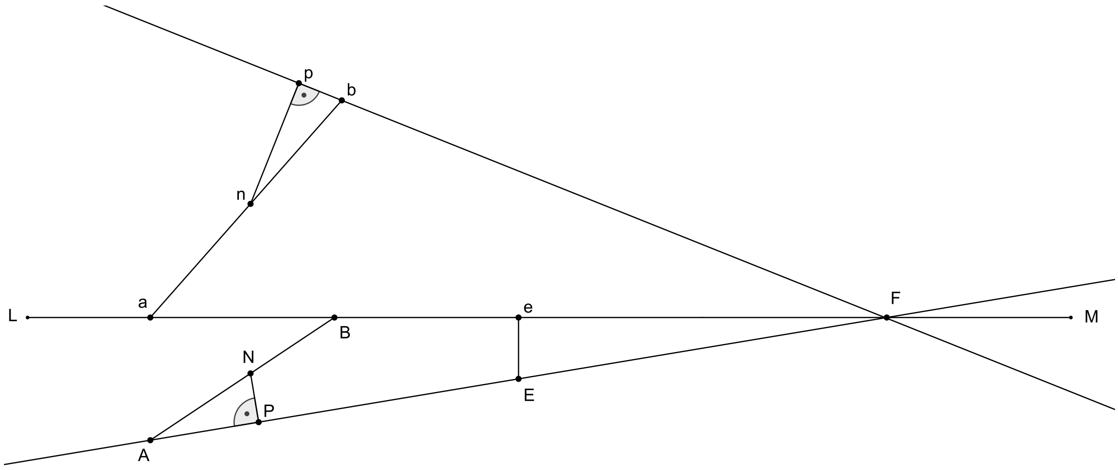
2. Schritt Konstruktion der Berührgeraden

Dabei spielt der Zylinder eigentlich gar keine Rolle. Er dient nur der besseren Vorstellung. Klar ist: Die Berührgerade ist eine Parallele zur zweiten Geraden (als Gerade im Mantel des Zylinders) und sie liegt in der in Schritt 1 konstruierten Parallelebene.



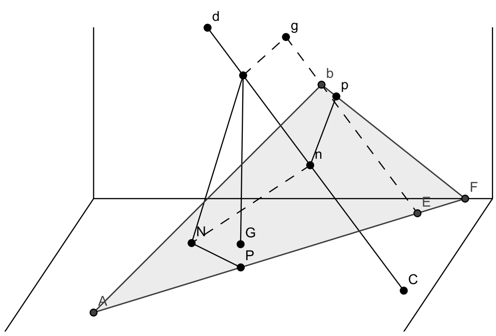
Nimmt man einen beliebigen Punkt (G, g) der 2. Geraden und fällt man von diesem das Lot auf die Parallelbene aus Schritt 1, so ist der Lotfußpunkt ein Punkt der Berührgeraden. Diese Konstruktion haben wir oben schon durchgeführt. Die Projektionen des Lotfußpunktes seien I, i. Zieht man nun durch I die Parallele IN zu CD und durch i die Parallele zu cd, so erhält man die beiden Projektionen der Berührgeraden. Wir können dabei N und n so wählen, dass sie die Schnittpunkte der Parallelen mit AB bzw. ab sind. Dann ist der Punkt mit den Projektionen N, n der Punkt, in dem das gemeinsame Lot die erste Gerade trifft.

3. Schritt



Um die Projektionen des gemeinsamen Lotes zu bekommen, fälle man in der Horizontalebene das Lot von N auf AE $(= AF)$, Fußpunkt sei P. Analog fällt man das Lot in der Vertikalebene von n auf fb, Fußpunkt sei p. Dann sind NP und np die Projektionen des gemeinsamen Lotes.

4. Schritt Aus den beiden Projektionen NP und np lässt sich wie wir oben gesehen haben, die „wahre" Länge der Strecke ermitteln.



3.2 Jean-Victor Poncelet

Als eigentlicher Begründer[1] der projektiven Geometrie gilt der aus Metz gebürtige Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867), ehemaliger Student der École polytechnique und damit Hörer von Vorlesungen über darstellende Geometrie im Stile Monge's (Poncelet hat Monge allerdings nicht persönlich gehört, denn als er in das zweite Studienjahr eintrat, war Monge - der üblicherweise die Vorlesung über darstellende Geometrie für das zweite Studienjahr hielt - erkrankt und wurde durch Jean Nicolas Pierre Hachette (1769 - 1834) vertreten (November 1809)). Poncelet schloss die École polytechnique 1810 ab, besuchte danach die École d'Application in Metz - eine auf die École polytechnique aufbauende Spezialhochschule für zukünftige Genieoffiziere. Diese verließ er 1812, um bei Befestigungsarbeiten in Walcheren (Fort Rammekens) eingesetzt zu werden. Doch schon kurze Zeit später wurde er der Napoleonschen Russlandarmee als Leutnant zugeteilt. Am 18.11.1812 geriet er nach der Schlacht bei Krasnoi (bei Smolensk) in russische Gefangenschaft, nachdem man ihn unter einem toten Pferd auf dem Schlachtfeld zurückgelassen hatte. Von Märze 1813 (in der Zwischenzeit absolvierte er einen etwa 1300 km langen Fußmarsch von Krasnoi nach Saratow) bis September 1814 war er Kriegsgefangener in Saratow an der Wolga. Nach seiner Rückkehr nach Frankreich war Poncelet als Professor an der bereits genannten Hochschule in Metz tätig; er blieb damit im Militär, wo er bis zum General aufstieg (in seiner Eigenschaft als Kommandant der École polytechnique (1848)).

Poncelet's Hauptwerk ist der „Traité des propiétés projectives des figures", das 1822 in Paris erschien. In Teilen beruht dieser Traité auf Aufzeichnungen, die Poncelet 1813/14 in Kriegsgefangenschaft gemacht hatte. Um sich der Kritik zu erwehren, er habe vieles von anderen Autoren übernommen, ohne dies kenntlich gemacht zu haben, veröffentlichte Poncelet 1862 seine Aufzeichnungen aus Saratow. Diese sollten belegen, dass er seine Ideen ohne Kenntnis anderer Autoren in vollkommener Isolation entwickelt hatte. Im Vorwort zu den Heften aus Saratow heißt es:

> [Nach schwerer Krankheit beschloss er in Saratow], „sich durch geistige Arbeit zu zerstreuen und genaustens, sozusagen Schritt für Schritt, die Grundlagen, die für das Studium der Mathematik notwendig sind, zu wiederholen. Dabei verfügte er über keinerlei Literatur und keine Präzisionsinstrumente, die in der Stadt Saratow, die übrigens über keine wissenschaftliche Bibliothek verfügte, schwierig zu beschaffen waren." (Poncelet 1862, IX)

[1] Meine Ausführungen über Poncelet stützen sich hauptsächlich auf den sehr empfehlenswerten und höchst informativen Artikel Friedelmeyer 2010.

Zu seinen Motiven, die ihn zur Veröffentlichung seiner Hefte veranlassten, schreibt Poncelet:

> „Ich habe bereitwillig die einzige günstige Gelegenheit ergriffen, die sich mir nach 30 Jahren bot, einige Punkte der 1822 im „Traité des Propriétés projectives des figures" dargelegten Lehre oder Theorie einzufordern. Man hat sich allzusehr in der nachfolgenden Zeit daran gewöhnt, diese anderen Berechnungen oder wissenschaftlichen Betätigungen zuzuschreiben - zweifellos aus Vergesslichkeit." (Poncelet 1862, XII)

Im Folgenden möchte ich einige Ergebnisse aus dem ersten Heft „Lemmata der synthetischen Geometrie: Über die Systeme von in einer Ebene gelegenen Kreise", begonnen im April 1813 zu Saratow, vorstellen. Zu deren Bedeutung für die projektive Geometrie (von der Poncelet 1813 noch keine Vorstellung hatte), heißt es in einer 1862 eingefügten Fußnote:

> „Der Leser, den den „Traité..." etwas kennt, wird sofort bemerken, ohne das dies im Text explizit gesagt würde, dass es sich hierbei um Eigenschaften und um Aussagen handelt, die sich i.a. auf Systeme von beliebigen Kegelschnitten mit einer gemeinsamen Sekante oder Sehne - sei sie reell oder ideal - vermöge der Perspektive oder der Zentralprojektion ausdehnen lassen." (Poncelet 1862, 1 n. *)

Damit spricht Poncelet einen für seinen „Traité" zentralen Punkt an, der ja schon in dessen Titel durchscheint: Nämlich diejenigen Eigenschaften von und Aussagen über Figuren zu untersuchen, welche bei Zentralprojektionen erhalten bleiben. Dies ist für ihn u.a. ein sehr nützliches Prinzip, um Beweise zu erleichtern. Diesen Aspekt erkäutert er auch schon in seinen „Heften". Zu Beginn des dritten Heftes erfahren wir:

> „Diese Methode [...] besteht darin, die Geometrie zu verwenden, um die vorgelegte Frage auf eine andere, die viel einfacher ist, zurückzuführen. Obwohl letztere ein Spezialfall ist, erhält sie dennoch dank der Erweiterung, welche sie dank eines Hilfssatzes oder einer geometrischen Hilfskonstruktion erfahren kann, die Lösung zur ersteren." (Poncelet 1862, 116).

Das Paradebeispiel liefern die Kegelschnitte, von Poncelet als Kurven zweiten Grades (d.h. vom Typus $aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f = 0$, wobei wenigstens $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sein soll) aufgefasst:

> „Erstes Prinzip. - Jede Kurve zweiten Gerades kann aufgefasst werden als Schnitt eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Grundfläche und einer Ebene; deshalb kann man allgemein sagen, diese Kurve sei die Projektion des Grundkreises auf die schneidende Ebene; umgekehrt kann man den Grundkreis seinerseits als die konische oder Zentralprojektion der erwähnten Kurve betrachten.
>
> Jede Tangente an diese Kurve kann verstanden werden als die Projektion einer Tangente an den Grundkreis oder eines beliebigen anderen ebenen Schnittes des Kegels. Im Allgemeinen bleiben die Projektionen von Tangenten; bei den Normalen ist das aber nicht der Fall." (Poncelet 1862, 117)

Poncelet erklärt dann, dass die Geradenkreuzung auch eine Projektion des Grundkreises sei, dass sich hier aber bei der Übertragung von Eigenschaften gewisse Schwierigkeiten ergäben:

> „Zweites Prinzip. - Die Projektion zweier paralleler oder zweier sich schneidender Geraden auf eine beliebige Ebene sind zwei andere sich schneidende Geraden. Umgekehrt lassen sich zwei Geraden, die sich schneiden, auf unendlich viele unterschiedliche Arten auf zwei parallele Geraden projizieren." (Poncelet 1862, 117)

Daraus folgt für ein beliebiges System von Geraden:

> „Jede allgemeine Eigenschaft eines derartigen Systems, die sich auf die unbestimmte Richtung der Linien bezieht und nicht auf deren Maß, lässt sich anwenden auf dessen konische oder Zentralprojektion auf eine beliebige Ebene." (Poncelet 1862, 117).
>
> „Drittes Prinzip. - Die Projektion mehrerer verschiedener Systeme von parallelen Geraden sind gleichviele Systeme von sich in verschiedenen Punkten schneidenden Geraden, wobei alle Schnittpuntke auf einer Geraden liegen. Die Umkehrung hiervon ist auch wahr.
>
> Bemerkung. - Diese Sätze oder Prinzipien der Zentralprojektion sind nichts anderes als die Sätze oder Prinzipien der Linearperspektive: Ihr Beweis ist einfach und vollkommen elementar." (Poncelet 1862, 117)

Diese Prinzipien sind beschränkt auf Kegelschnitte und Geraden; man bemerkt aber schon hier deutlich Poncelets Tendenz, übergeordnete Gesichtspunkte einzunehmen. Im „Traité" wird seine Formulierung allgemeiner:

> „5. Figuren, deren Teile untereinander nur solche Abhängigkeiten aufweisen, die ihrer Natur nach so wie die oben geschilderten sind, das heißt, die Abhängigkeiten sind, die nicht durch Projektionen zerstört werden, heißen im Folgenden projektiven Figuren.
>
> Diese Abhängigkeiten selbst und allgemein alle Beziehungen oder Eigenschaften, welche sowohl in der gegebenen Figur als auch in ihren Projektionen gegeben sind, werden ebenfalls projektive Beziehungen oder Eigenschaften genannt. [...]
>
> 6. Was die projektiven Eigenschaften anbelangt, die sich auf die Größenbeziehungen stützen und die wir metrisch nennen werden, so ist gewiss, dass nichts apriori andeutet, ob diese in allen Projektionen der zugehörigen Figure gegeben sind [...]" (Poncelet 1822, 5)

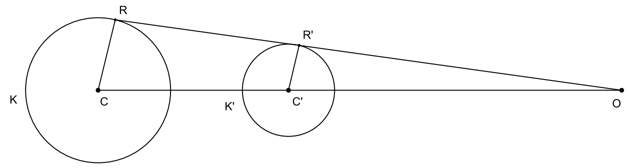
Die letztere Aussage will sagen, dass es durchaus metrische Eigenschaften gibt, die projektiv sind. Ein Beispiel hierfür ist das Doppelverhältnis (das bei Poncelet so nicht vorkommt: Vgl. aber §34 des „Traité").

Poncelet unterscheidet im Traité „metrische" und „graphische" Eigenschaften; letztere beziehen sich auf das Ziehen von Linien und die Relationen „Punkt liegt auf Linie" oder „Linie geht durch Punkt" (heute würde man von Inzidenzen reden). Graphische Eigenschaften sind immer projektiv, aber nicht alle projektiven Eigenschaften sind graphisch. Weil das Metrische keine - oder nur eine untergeordnete - Rolle spielt in der projektiven Geometrie, hat man diese auch „Geometrie der Lage" (im Gegensatz zu: des Maßes) genannt und sie als qualitative Geometrie gekennzeichnet.

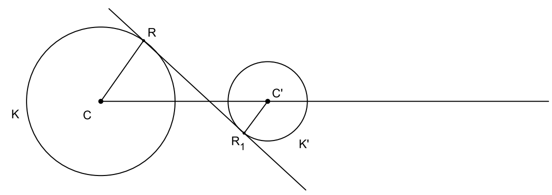
Ein großer Verdienst Poncelets war es gerade, solche später für die projektive Geometrie leitenden Gesichtspunkte herausgestellt zu haben.

Doch nun zurück zum ersten Heft aus Saratow. Poncelet beginnt mit einer eher einfachen Eigenschaft aus der Kreisgeometrie; das Scholium jedoch, das er diesem Satz beigibt, hat es in sich!

Satz 1: Es seien zwei Kreise K und K' gegeben mit den Mittelpunkten C und C'. Dann geht die Verbindungsgerade der Endpunkte zweier paralleler und gleichsinnig gelegener Radien R und R' von K bzw. K' durch einen Punkt O, der festbleibt, wenn man sich die beiden Radien so um die Mittelpunkte C und C' drehen lässt, so dass sie parallel bleiben. Der Punkt O liegt auf der Gerade durch die beiden Kreismittelpunkte.



Die Aussage gilt auch, wenn R und R' parallel aber gegensinnig gelegen sind. Dann erhält man aber einen anderen Punkt O'.



Beweis:

a) CR parallel $C'R'$ und gleichsinnig gelegen. Dann gilt nach dem Strahlensatz:

$$CR : C'R' = OC : OC'$$

Nach einer Rechenregel für Verhältnisse folgt dann (beachte: $CR = r$, $C'R' = r'$):

$$(r - r') : r' = (OC - OC') : OC'$$

$$(r - r') : r' = CC' : OC'$$

Nun sind aber r, r' und CC' fest, aber auch OC'. Somit ist O ein fester Punkt.

b) CR parallel CR_1 aber gegensinnig gelegen. Dann gilt: $\triangle CRO' \sim C'R_1O'$ (Scheitelwinkel bei O', Wechselwinkel bei R und R_1 bzw. C und C'):

$$CR : C'R_1 = CO' : C'O'$$

$$(r + r') : r = (CO' + C'O') : C'O'$$

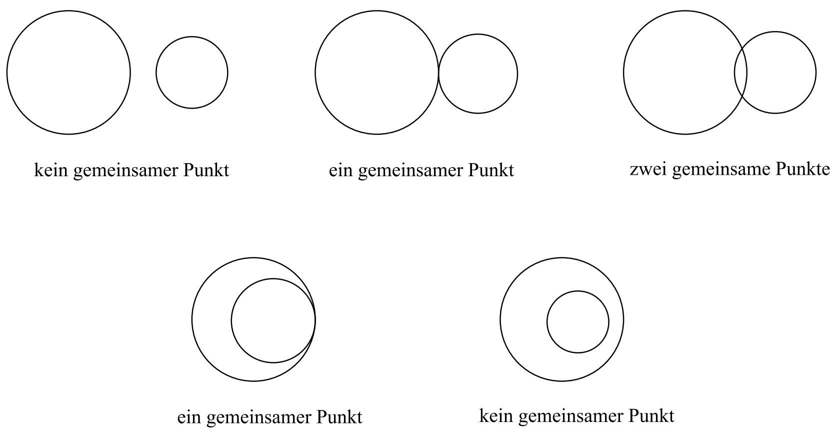
$$(r + r')r = CC' : C'O'$$

Wieder sind r, r' und CC' feste Größen, also auch $O'C'$. Somit ist O' ein fester Punkt.■

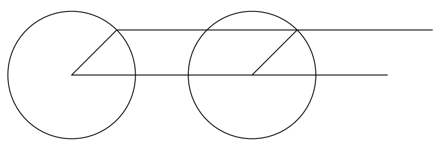
Bemerkung:
a) Insbesondere gehen die gemeinsamen Tangenten von K und K' durch O bzw. O'.
b) [Hinweis von Poncelet]: O heißt nach Euler-Monge äußerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise K und K', O' innerer Ähnlichkeitspunkt. Das kommt daher, dass man K' auf K abbilden kann vermöge einer zentrischen Streckung mit Zentrum O bzw. O'.

> „Scholium. - Man muss anmerken, dass die beiden Punkte O und O' existieren, wie auch immer die relative Lage der beiden Kreise (K) und (K') beschaffen sein mag. Diese Punkte werden immer durch die eben beschriebene Konstruktion geliefert." (Poncelet 1862, 3)

Denkt man ein bisschen über die relative Lage nach, so wird einem deutlich, dass es verschiedene Fälle gibt (ich deute hier nur einige an, die anderen ergeben sich symmetrisch):

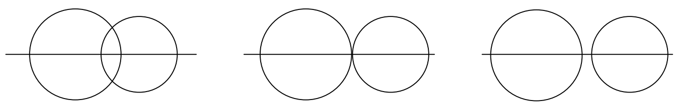


Zudem entsteht ein Sonderfall, wenn die beiden Radien gleichgroß sind:



Poncelet ging davon aus, dass in Fällen, in denen keine Schnittpunkte im gewöhnlichen Sinne (er sprach von „reellen" Punkten) existieren, diese „ideal" werden. Ein solcher Fall liegt vor, wenn die fraglichen Geraden parallel sind - der Schnittpunkt also im Unendlichen liegt. Aber in vielen anderen Fällen hilft auch das nicht. Poncelet sprach vom „Kontinuitätsprinzip"; sein Festhalten an diesem hat ihm viel Kritik eingebracht (z.B. von Cauchy) und vermutlich auch seinem wissenschaftlichen Ruf geschadet.

Ein Beispiel möge das Problem illustrieren: Zwei Kreise mit zwei Schnittpunkten seien gegeben. Variiert man diese Situation stetig, indem man den Mittelpunkt des einen Kreises auf der Zentralen vom Mittelpunkt des anderen fortwandern lässt, so erhält man schließlich die Grenzlage der Berührung (die beiden Schnittpunkte fallen zusammen). Variiert man weiter, so verschwinden die Schnittpunkte.



a) b) c)

Das aber kann nach Poncelet nicht sein. Im vorliegenden Fall könnte man an eine Rettungsstrategie denken: Im Fall a) ergeben sich die beiden Schnittpunkte durch reelle Lösungen quadratischer Gleichungen, in b) hat diese eine reelle Doppellösung, in c) aber keine reelle Lösung. Also rechnen wir komplex! So gelangt man von einer analytischen Geometrie in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ unversehens zu einer in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ - man „komplexifiert" die Geometrie. Diesen durchaus schwierigen Übergang hat man in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts näher untersucht. Poncelet war aber prinzipiell gegen solche „analytischen" Argumente, weshalb sein Kontinuitätsprinzip reichlich mystisch bleibt.

Bei Satz 1 von oben lassen sich allerdings die Ausnahmefälle mit Hilfe der unendlich fernen Punkte oder aber mit ganz gewöhnlichen Punkten erledigen. Dennoch drückt das Scholium eine prinzipielle Tendenz von Poncelet aus: Er wurde nicht müde zu betonen, dass die Geometrie genau so volle Allgemeinheit erlangen müsse wie die Analysis. Das heißt nichts anderes als: Ausnahmefälle müssen in die Regelfälle integriert werden.

Im ersten Heft aus Saratow beweist Poncelet als nächstes einen Fall des Satzes von Desargues, den er als „allgemeines Lemma” bezeichnet:

> „Seien zwei Dreiecke ABC und abc gegeben, deren Seiten paarweise parallel sind. Verbindet man die homologen Ecken also A mit a, B mit b, C mit c durch Geraden, so treffen sich diese drei Geraden in einem Punkt.” (Poncelet 1862, 3)

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ergibt sich die Proportion

$$AB : ab = BC : bc = AC : ac$$

Da BC parallel zu bc ist, gilt ferner (dabei ist O der Schnittpunkt von Bb und Cc) nach Strahlensatz

$$BO : bO = BC : bc = AB : ab$$

und damit nach einer Rechenregel für Proportionen

$$(BO \mp bO) : BO = (AB \mp ab) : AB$$

oder

$$(*)\ Bb : BO = (AB \mp ab) : AB$$

Sei O' der Punkt, in dem sich Aa und Bb schneiden. Dann gilt analog:

$$BO' : bO' = Ab : ab$$

und damit

$$(BO' \mp bO') : BO' = (AB \mp ab) : AB$$

also

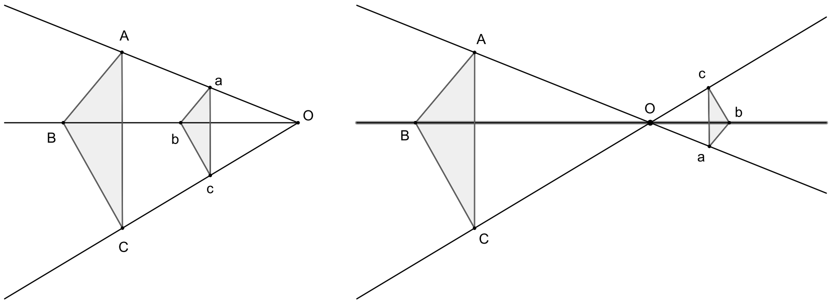
$$(**)\ Bb : BO' = (AB \mp ab) : AB$$

Somit ist ((*)=(**)):

$$Bb : BO' = Bb : BO$$

also $BO' = BO$ und damit $O' = O$. Das gilt nur, weil O und O' auf derselben „Seite” bezogen auf B liegen, nämlich auf der Halbgeraden Bb.

Die Vorzeichen beziehen sich auf die folgenden beiden möglichen Situationen:



(Vorzeichen +) (Vorzeichen -)

In der Proposition III beschäftigt sich Poncelet mit drei Kreisen. Da es zu je zwei dieser drei Kreise gemäß Satz 1 zwei Ähnlichkeitspuntke gibt, hat man es hier mit insgesamt sechs Ähnlichkeitspunkten zu tun. Er zeigt dann, dass je drei von ihnen (geeignet gewählt) auf einer Geraden liegen.

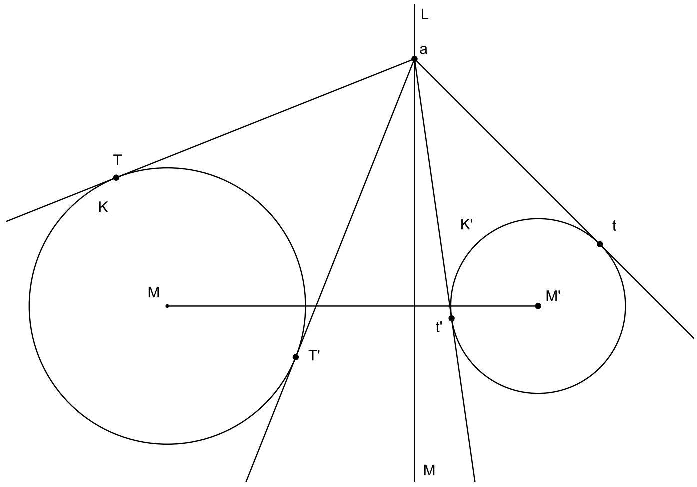
Genauer: Sind die Kreise K, K', K'' gegeben und sind O, O_1 die Ähnlichkeitspunkte von K und K' (äußere und innere), O', O_1' diejenigen von K' und K'' sowie O'', O_1'' diejenigen von K und K'', so liegen die Punktetripel O, O', O''; O, O_1', O_1''; O', O_1, O_1'' und O'', O_1, O_1' jeweils auf einer Geraden.

Ein Scholium erinnert wieder daran, dass die Proposition für alle relativen Lagen der Kreise gilt.

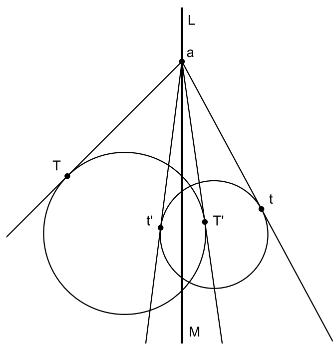
Dem in der Geschichte der Geometrie etwas Bewanderten erinnert die Proposition II von Poncelet sofort an das Apollinische Berührungsproblem. Dieses wird von Poncelet ausführlich als Problem II (Poncelet 1862, 30 - 41) gelöst - und zwar auf zwei unterschiedliche Arten.

Einen wichtigen Sachverhalt formuliert Poncelet im siebten Satz: Gegeben sind zwei Kreise K und K'.

> „Der Ort aller Punkte a mit der Eigenschaft, dass die vier von a an die Kreise gezogenen Tangenten aT, aT', at, at' gleichlang sind [gemeint: Tangentenabschnitte] ist eine Geraden LM, die senkrecht auf der Zentralen MM' steht und die die gemeinsame Sekante dieser Kreise ist im Falle, dass sie sich schneiden." (Poncelet 1862, 12)



LM heißt heute die **Radikalachse** der beiden Kreise K, K'.



Bemerkung:

1. Nach dem Satz über Tangentenabschnitte (III 36) ist klar, dass $aT = aT'$ und $at = at'$ gilt. Der Punkt in Poncelets Satz ist folglich $aT = at$.

2. Im Sinne seines bereits erwähnten Kontinuitätsprinzips betrachtet Poncelet LM auch dann als gemeinsame Sekante, wenn sich die Kreise nicht schneiden, weil gewissen Eigenschaften der gemeinsamen Sekante erhalten bleiben (vgl. Poncelet 1862, 15).

Beweis: Wir verbinden a mit M und mit M' sowie die Mittelpunkte mit den Berührpunkten ($MT, MT', M't, M't'$). Dann gilt nach Pythagoras:

$$(Ma)^2 = (MT)^2 + (Ta)^2, (M'a)^2 = (M't)^2 + (at)^2$$

Es soll sein: $Ta = ta$.
Setzt man $MT = R, M't = r$, so ergibt sich wegen $Ta = ta$:

$$(*)\ (Ma)^2 = R^2 + (Ta)^2 \text{und } (M'a)^2 = r^2 + (Ta)^2$$

Fällt man von a das Lot auf die Zentrale MM' mit Fußpunkt D, so gilt im Dreieck MaM' nach II 12/13 (aus moderner Sicht ist Euklids Satz nichts anderes als der Kosinussatz):

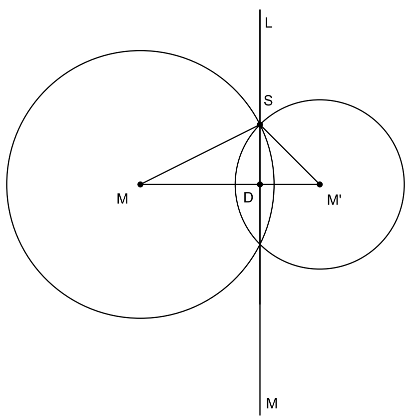
$$(Ma)^2 = (MM')^2 + (M'a)^2 + 2(MM')(M'D)$$

oder

$$R^2 = (MM')^2 + r^2 - 2(MM')(M'D)$$

Die einzige Größe, die in dieser Gleichung vorkommt und die nicht fest ist, ist $M'D$. Folglich muss $M'D$ selbst konstant sein und damit alle Punkte a so geartet, dass der Lotfußpunkt D gemeinsam ist. Das heißt, sie liegen alle auf der Senkrechten zu MM' im Punkte D.■

Schneiden sich die beiden Kreise, so kann man nachrechnen, dass die gemeinsame Sekante der Ort der gesuchten Punkte ist:



Sei S einer der Schnittpunkte und D der Lotfußpunkt des Lotes von S auf MM', so gilt im Dreieck MSM':

$$(MS)^2 = (MM')^2 + (M'S)^2 - 2(MM')(M'D)$$

also

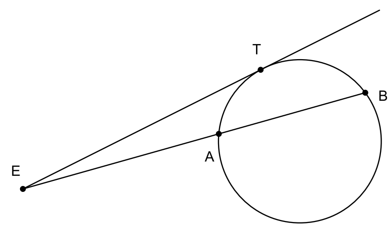
$$R^2 = (MM')^2 + r^2 - 2(MM')(M'D)$$

Also stimmt der Punkt D und damit die Senkrechte in ihm auf MM' mit dem oben gefundenen Punkt D und der obigen Senkrechten überein. Folglich haben alle Punkte auf der Geraden durch S und S' die gewünschte Eigenschaft.

Im Sonderfall, dass die beiden Kreise sich berühren, wird die gesuchte Gerade LM zur gemeinsamen Tangente. Für ihre Punkte ist die gewünschte Eigenschaft aber aufgrund des Satzes über die Tangentenabschnitte klar.

Im Prinzip kann man nun ausrechnen, in welchem Verhältnis der Punkt D die Zentrale MM' teilt und so für vorgegebene Kreise bzw. Radien die Radikalachse konstruieren (vgl. Ostermann-Wenner 2012, 100).

Exkurs: Jacob Steiner (1796 - 1863), ein weiterer wichtiger Geometer in der Geschichte der projektiven Geometrie, publizierte 1826 in der ersten Nummer der neugegründeten mathematischen Fachzeitschrift „Journal für die reine und angewandte Mathematik" - nach ihrem Gründer L. Crelle meist „Crelle-Journal" genannt - gleich mehrere Artikel. Zu dieser Zeit schlug sich Steiner als Privatlehrer in Berlin durchs Leben, später wurde er dort Professor für Mathematik. In der Abhandlung „Einige geometrische Betrachtungen" führt er den Begriff „Potenz" eines Punktes E bezüglich eines Kreises k ein - der Punkt soll dabei außerhalb des Kreises liegen.



Nach dem Satz über Sekantenabschnitte (III 36) ist das Produkt $EA \cdot EB$ konstant gleich ET^2 (natürlich nur solange, als es Schnittpunkte A und B gibt). Bezeichnet r den Radius des Kreises und d den Abstand des Punktes E vom Mittelpunkt des Kreises, so gilt:

$$EA \cdot EB = d^2 - r^2$$

Die Größe $d^2 - r^2$ heißt nach Steiner die Potenz des Punktes E bezüglich des Kreises k.

Im Falle, dass sich zwei Kreise schneiden oder berühren ist die Radikalachse offensichtlich der geometrische Ort aller Punkte, die bezüglich der beiden Kreise gleiche Potenz besitzen. Dies lässt sich erweitern auf den Fall, dass die Kreise keinen gemeinsamen Punkt aufweisen. Steiner nannte deshalb die Radikalachse „Linie gleicher Potenz".■

Mit Hilfe der Radikalachse lässt sich das Appolinische Berührproblem lösen. Sind drei Kreise gegeben, so zeigt ein einfaches Transitivitätsargument, dass sich die drei Radikalachsen in einem Punkt treffen. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die drei vorgegebenen Kreise berührt. Um dessen Radius zu bestimmen, verbindet man den gefundenen Punkt mit einem der drei Mittelpunkte. Der Schnittpunkt dieser Verbindungsstrecke mit dem zum fraglichen Mittelpunkt gehörigen Kreis ist dann ein Berührpunkt des zu konstruierenden Kreises.

Kehren wir nun zurück zu Poncelets Heften aus Saratow. Es gibt davon sieben, wobei das siebte eine Sonderrolle hat. Gegen Ende seiner Gefangenschaft - von dem Poncelet vorher natürlich nichts wusste, denn dieses wurde durch den Friedensschluss zwischen Frankreich und Russland (Vertrag von Paris, 30.05.1814) ermöglicht - kam Poncelet auf die Idee, die Akademie in Petersburg zu bitten, seine Übersiedlung nach Petersburg zu beantragen. Um die Akademie von seinen wissenschaftlichen Leistungen zu überzeugen, wollte er seine Ergebnisse in jenem siebten Heft übersichtlich zusammenstellen. Dieses endet - nach immerhin fast 70 Druckseiten in der Version von 1862 - mit der Bemerkung:

> „Abrupt unterbrochen in Saratow, im Juni 1814, anlässlich der Unterzeichnung des Friedensvertrags." (Poncelet 1862, 441)

Der Inhalt der anderen Hefte lässt sich kurz wie folgt zusammenfassen (nach Friedelmeyer 2010, 64):

1.Heft: Kreise und Chordalen (Verallgemeinerung von Sekante, Sehnen auf den nicht-schneidenden Kreise), auch imaginär (später [Heft 7]: ideal)

2.Heft: Analytische Theorie der Kegelschnitte

3.Heft: Einfache und grundlegende Prinzipien der Zentralprojektion

4.Heft: In- und umbeschriebene Polygone bei einem Kegelschnitt

5.Heft: Projektive Eigenschaften eines Systems von zwei Kegelschnitten in einer Ebene

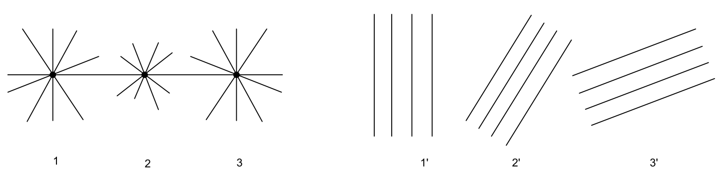
6.Heft: Polygone, welche einem Kegelschnitt ein- und einem anderen Kegelschnitt umbeschrieben sind. Das hat mit dem berühmten Schließungssatz von Poncelet zu tun, vgl. Ostermann-Wanner 2012, 328 - 329. (Poncelet 1862, 348 - 355).

Um zum Abschluss unserer Betrachtung der Hefte von Saratow deutlich zu machen, worin ein Großteil der Bedeutung von Poncelets Beiträgen besteht - wobei keineswegs geläugnet wird, dass er auch viele wichtige Einzelergebnisse erzielt hat - möchte ich noch kurz den ersten Teil (I.) des siebten Heftes vorstellen. Dieser hat einleitenden Charakter und soll die Grundideen der Ponceletschen Zugangsweise erläutern.

Zuerst führt Poncelet hier den Begriff „Lageeigenschaft” ein, als das, was er sonst „projektive Eigenschaft” nennt. Dann erläutert er, dass diese Eigenschaft unter Zentralprojektionen erhalten bleiben - selbst dann wenn Teile der Figur nach Projektion „imaginär” werden. Folglich kann man versuchen, einen Satz über Lageeigenschaften dadurch zu beweisen, dass man die betrachtete Situation vermöge Zentralprojektion vereinfacht. Poncelet scheint zu dieser Idee durch eine Arbeit von Brianchon (1810) angeregt worden sein. Hierfür gibt er neun „Prinzipien” an. Wir würden heute sagen routinemäßige Verfahren. Ich gebe hier nun eine Auswahl:

1. Ein System von n Geraden, die sich in einem Punkt treffen, kann auf ein System von n parallelen Geraden abgebildet werden.

2. Ein System von Geraden, die sich in Punkten treffen, welche alle auf einer Geraden liegen, lässt sich auf ein System von Geraden projizieren, die untereinander parallel sind.
   Modern und präzise: Ein System von Geradenbüscheln, deren Zentren auf einer Geraden liegen, lässt sich auf ein System von gleichvielen Parallelenbüscheln abbilden.

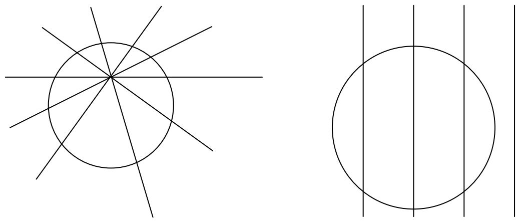
   

   Die Gerade, auf der die Zentren liegen, wird also auf die unendlich ferne Gerade projiziert.

3. Ein Kegelschnitt lässt sich immer auf einen Kreis projizieren und umgekehrt. Hiervon auszunehmen ist aber die Geradenkreuzung (und alle anderen entarteten Kegelschnitte).

4. Eine Figur bestehend aus einem Kreis und einer Geraden kann projiziert werden auf einen Kreis und die Ferngerade

Enthält die Figur zusätzlich eun System von Geraden, die in einem Punkt der fraglichen Gerade zusammentreffen, so werden diese auf parallele Geraden projiziert.



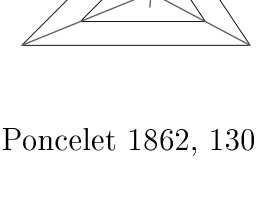
5. Eine Figur bestehend aus einem Kegelschnitt und einer Geraden kann projiziert werden auf einen Kreis und die Ferngerade.

(vgl. Poncelet 1862, 380 - 381 und 387 - 388)

Zu Beginn des II. Teils des siebten Hefts gibt Poncelet dann Beispiele, wie diese Prinzipien nutzbringend angewandt werden können. Wir wollen uns hier nur das erste ansehen - nämlich eine Richtung des **Satzes von Desargues**:

> Seien zwei Dreiecke ABC und abc gegeben, so dass sich die homologen Seiten AB, ab; BC, bc und AC, ac in drei Punkten I, K, L schneiden, welche auf einer Geraden liegen, so gehen die Geraden Cc, Aa und Bb, welche jeweils zwei Eckpunkte verbinden, durch einen Punkt O.

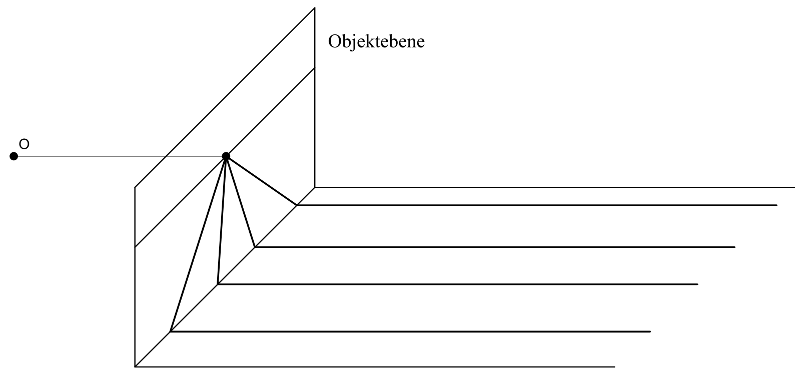
Durch Anwenden des 2. Prinzips kann man diese Figur so projizieren, dass die Dreiecke ABC und abc auf Dreiecke $A'B'C'$ und $a'b'c'$ abgebildet werden, deren Seiten paarweise parallel sind (und gleichsinnig gelegen). Für diese neue Situation ist der Satz aber offensichtlich. Die Dreiecke können dann durch eine zentrische Streckung aufeinander abgebildet werden.



(vgl. Poncelet 1862, 130 - 131)

Um und mit der projektiven Geometrie etwas vertrauter zu machen, überlegen wir, wie wir einige von Poncelets Prinzipien wirklich umsetzen können.

Prinzip 1 macht aus einem Büschel von schneidenden Geraden eines von parallelen. Das „umgekehrte" Verfahren haben wir schon bei der Perspektive kennengelernt: Geraden senkrecht zur Standlinie werden in Geraden abgebildet, die sich im Hauptpunkt treffen. Um das Geüwnschte zu erhalten muss man die Rollen von Bild- und Objektebene vertauschen:



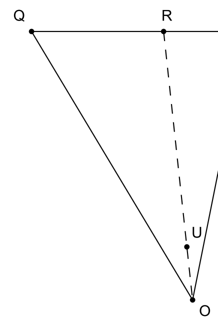
Ganz analog kann man Prinzip 2 begründen.

Eine etwas raffiniertere - und damit auch lehrreichere - Version der Prinzipien 1 und 2 findet sich bei Ostermann-Wanner als „Poncelet's Hauptlemma" (Ostermann-Wanner 2010, 324):

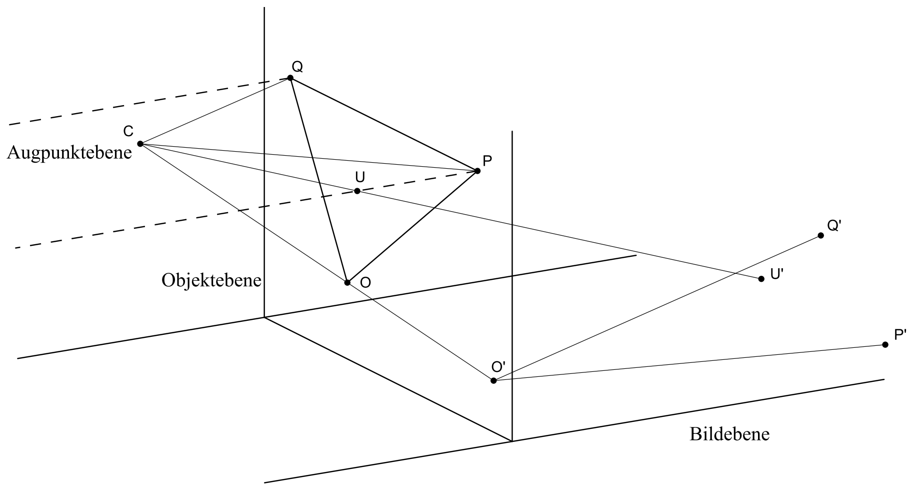
> „Sei ein beliebiges Dreieck OPQ gegeben nebst einem beliebigen „Einheitspunkt" U im Inneren dieses Dreiecks. Dann gibt es eine Zentralprojektion, welche die Gerade PQ auf die Ferngerade abbildet, so dass P und Q die Fluchtpunkte zweier orthogonaler, sich in O' schneidender Geraden sind, wobei O' das Bild von O ist. Weiter ist das Bild U' von U ein „Einheitspunkt", das heißt $O'U'$ ist die Diagonale eines Quadrates, wobei zwei seiner Kanten auf den „Achsen" $O'P'$ und $O'Q'$ liegen."

Es werden hier Euklidische Begriffe wie „orthogonal" und „Quadrat", aber auch projektive Begriffe wie „Fergerade" verwendet. Mann muss also aufpassen.

Wir nennen den Augpunkt - das Zentrum der Projektion - Ostermann-Wanner folgend ausnahmsweise mal C.

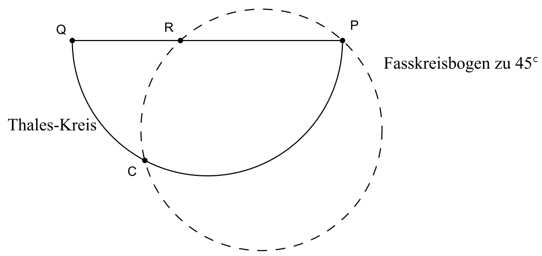


Wir werden die Bildebene wie oben senkrecht zur Objektebene stellen und zwar so, dass die Standlinie parallel zur Geraden PQ verläuft. Der Augpunkt ist dann in derjenigen Ebene zu nehmen, die die Objektebene senkrecht in PQ schneidet.

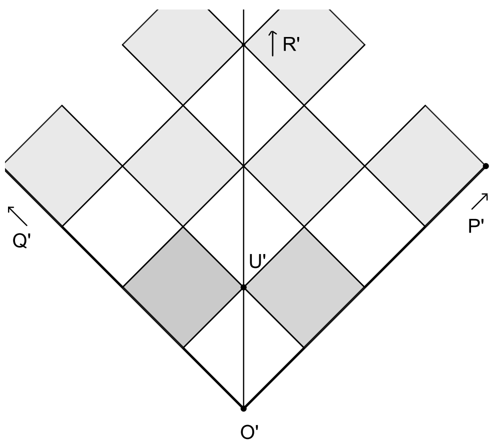


Klar ist: Die Position des Augpunktes C beeinflusst die Winkel $Q'O'P'$ (das soll ein rechter Winkel werden) und $U'O'P'$ (das soll ein 45°-Winkel werden).

Damit $\angle Q'O'P'$ ein rechter Winkel wird, muss QCP ein rechter Winkel sein (XI 10), also muss C auf dem Thales-Kreis über PQ in der Ebene des Augpunktes liegen. Analog muss $\angle RCP$ (R wie oben in der Zeichnung) ein 45°-Winkel sein, das heißt C liegt auf dem Fasskreisbogen über PR zum 45°-Winkel in der Ebene des Augpunktes. Damit ist aber C als Schnitt zweier Kreisbögen festgelegt.

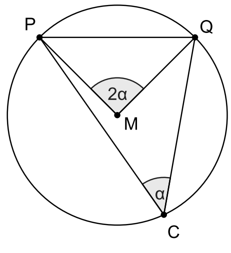


In der Bildebene hat man folglich diese Situation:



Bemerkung (Fasskreisbogen): Gegeben ist eine Strecke PR (um die obigen Bezeichnungen zu verwenden). Gesucht ist der Ort aller Punkte C, so dass PR von C aus unter dem Winkel α (oben: 45°) „erscheint”, d.h. $\angle PCR = \alpha$.

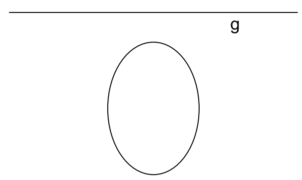
Die Lösung ergibt sich aus dem Satz über die Peripheriewinkel und ihren Zusammenhang zum Mittelpunktpunkt (III 20): Letzterer ist immer doppelt so groß wie ersterer.



Insbesondere ist der Peripheriewinkel für alle C im gleichen Kreisbogen gleich.

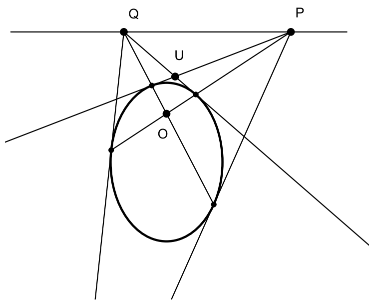
Zu konstruieren ist also der Kreismittelpunkt M. Das Dreieck PQM ist gleichschenklig, also sind seine Basiswinkel $\frac{1}{2}(180° - 2\alpha)$ groß. Diesen Winkel trage man in P und Q an, der Schnittpunkt der freien Schenkel ist der gesuchte Mittelpunkt M. Um M ziehe man den Kreis durch P und Q; der Bogen, in dem M liegt, ist der gesuchte Fasskreisbogen. Der andere Bogen ist Fasskreis zum Winkel 135°.

Mit „Poncelet's Hauptlemma" können wir dessen Prinzip 5 beweisen. Es sei ein Kegelschnitt, der nicht entartet ist, gegeben und eine Gerade g. Dann soll der Kegelschnitt auf einen Kreis projiziert werden, so dass die Gerade g auf die Ferngerade abgebildet wird.



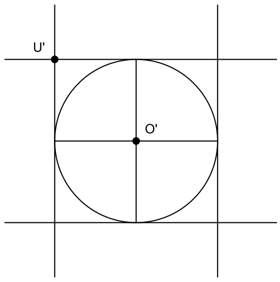
Klar ist: Man kann vermöge Zentralprojektion aus einem nicht-entarteten Kegelschnitt einen Kreis machen (man braucht hierzu nur einen geeigneten Kreiskegel, in den man die Schnittebene richtig legt).

Um die Aufgabe lösen zu können, müssen wir eine Beziehung zwischen der Geraden und dem Kegelschnitt herstellen. Hierzu wählen wir einen Punkt P auf g, legen von P die Tangenten an den Kegelschnitt und ziehen die Berührsehne (diese liegt auf der Polaren von P). Diese verlängern wir bis zum Schnittpunkt Q mit g. Auch zu Q können wir wieder die Polare konstruieren; die beiden Polaren schneiden sich in einem Punkt O. Weiterhin schneiden sich die benachbart liegenden Tangenten in P und Q in einem Punkt U.

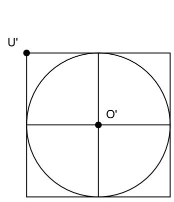


Beachte: Die Polare zu Q muss aufgrund der Konstruktion durch P gehen und umgekehrt.

Mit den Punkten P, Q, O und U hat man die Situation aus dem Lemma. Wendet man dieses an, so wird aus dem Kegelschnitt tatsächlich ein Kreis: Der Bildpunkt O' wird dessen Mittelpunkt und die Tangenten in den Bildpunkten der Berührpunkte stehen senkrecht auf den durch O' stehenden gleichlangen Bildstrecken der Polaren. Dies charakterisiert aber einen Kreis.



Der Kreis liegt gewissermaßen in vier Feldern des Schachbretts:



■

Diese Prinzipien verdeutlichen einen wichtigen - und in weiten Teilen innovativen - Aspekt von Poncelets Denken: Er möchte die Ergebnisse der Geometrie strukturieren, ordnen. Pascal soll so etwas Ähnliches auch schon mal gemacht haben, indem er 60 Sätze auflistete, die aus seinem berühmten Satz folgen (die Liste ist leider verloren gegangen). Man könnte mit einem modernen Begriff auch sagen, dass sich Poncelet um Denkökonomie bemühte: Man behandle eine Situation (typisches Beispiel: Kreis) und leite hieraus vermöge Prinzipien die entsprechende Aussage für alle Situationen (im Beispiel: Kegelschnitte) ab. Das erinnert in vielerlei Hinsicht an die analytische Geometrie; es war Poncelets erklärtes Ziel, die synthetische Geometrie genauso „allgemein" zu machen wie die analytische.

Nach seiner Rückkehr aus Saratow musste Poncelet erkennen, dass andere Mathematiker - vor allem Brianchon - manche seiner Ergebnisse auch erzielt und sogar publiziert hatten. Das hat er durchaus auch öffentlich anerkannt, aber immer daran festgehalten, dass er in seiner russischen Isolation davon nicht wusste.

Poncelet hat dann versucht, in den Wissenschaftlerkreisen Paris' Fuß zu fassen - vor allem natürlich in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen zu werden. Letztlich ist ihm das nicht gelungen, nicht zuletzt weil er auf zwei hartnäckige Widersacher stieß.

Zum einen war das **José Diaz Gergonne** (1771 - 1859), der Herausgeber der mathematischen Fachzeitschrift „Annales des mathématiques pures et appliquées", der nicht müde wurde, Poncelet des Plagiats zu beschuldigen. Verschärfend kam hinzu, dass Gergonne ein großer Anhänger der analytischen Geometrie war, während Poncelet die synthetische Vorgehensweise bevorzugte. Zum andern war das **Augustin Louis Cauchy** (1789 - 1857), seit 1816 Akademiemitglied, der Poncelets Kontinuitätsprinzip heftig kritisierte. Cauchy war überzeugter und engagierter Monarchist; als solcher war ihm der Geist der Restauration (nach 1816) durchaus förderlich. 1825 gab Poncelet schließlich auf und nahm eine Professur an der Militärhochschule in seiner Heimatstadt Metz an, wo er sich um die Maschinentheorie kümmerte.

Der 1822 erschienene „Traité des propriétés projectives des figures" (eine zweite Auflage erschien 1866 kurz vor Poncelets Tod) ist eine systematisierte Ausarbeitung der Ideen von Saratow. Allerdings hält sich das System in Grenzen. Auch Poncelets Zeitgenossen hatten offensichtlich Schwierigkeiten das Werk zu schätzen. Positive Reaktionen bleiben weitgehend aus - eine Ausnahme hiervon bildete L. Crelle, der eine sehr positive Besprechung veröffentlichte; das Plagiatsproblem deutet sich hier an. (IM SKRIPT STEHT: „Text einfügen")

Poncelets „Traité" (1822) ist ein sehr umfangreiches und nicht eben übersichtliches Werk. Es greift viele Punkte aus den „Heften" wieder auf; sein leitender Gedanke ist wieder - wie der Titel schon andeutet - die „projektiven" Eigenschaften der Figuren zu betrachten. Projektiv heißt so viel wie „bleibt bei Zentralprojektion erhalten". Graphische Eigenschaften sind immer projektiv, aber manche metrischen sind es auch. Das macht die Sache kompliziert für Poncelet.

Im Anschluss an Friedelmeyer 2010 möchte ich drei Punkte hervorheben:

1. Poncelet führt den Begriff „homologe" Figuren ein, was so viel bedeutet wie „projektiv-äquivalent". Manchmal benutzt er auch die Bezeichnung „Transformation". Das Augenmerk verschiebt sich somit von den einzelnen Figuren hin zu Klassen von Figuren gebildet nach Abbildungen (modern gesprochen!). Allerdings bleibt die Betrachtungsweise doch noch vergleichsweise konkret; die Abbildungen als solche scheinen nur gelegentlich durch. (Möbius (1790 - 1868) wird von „Verwandtschaften" reden, was Poncelets Sichtweise recht nahe kommt.)

2. Poncelets mysteriöses Kontinuitätsprinzip, das auch im „Traité" ausführlich verwendet wird, gab Anlass zu zahllosen Kontroversen und war dadurch Anstoß, Grundbegriffe wie „Stetigkeit der Geraden" zu klären.

3. Poncelet hatte einen interessanten Zugang zum Problem der Dualität, einer Frage, die zu jener Zeit offen und dringlich war. Das möchte ich etwas ausführlicher erläutern.

Beschränken wir uns auf die ebene Geometrie, so war folgender seltsamer Sachverhalt aufgefallen: Vertauscht man in einem Satz, der nur graphische Eigenschaften beinhaltet, „Punkt" und „Gerade", „sich schneiden" und „gehen durch" (oder „liegen auf", „verbinden"), so ergibt sich wieder ein gültiger Satz.

Der erste, der dies klar ausgesprochen hat, war wohl J. D. Gergonne, der 1826 einen Artikel veröffentlichte mit dem schönen Titel „Mathematische Philosophie. Philosophische Betrachtungen über die Elemente der Wissenschaft von der Ausdehnung" (in Französisch). Darin wandte er auch konsequent eine zweispaltige Schreibweise an, bei der Satz und dualer Satz einander gegenüber gestellt werden. Gergonne war zuerst im Kontext der Polyedertheorie auf die Dualität gestoßen - man denke etwa an die Dualität bei Platonischen Körpern. Er war es auch, der den Begriff „dual" einführte (andere sprachen von „Reziprozität").

> „Ein äußerst überraschendes Kennzeichen desjenigen Teils der Geometrie, der in keiner Weise von metrischen Beziehungen abhängt, ist, dass mit Ausnahme einiger zu sich selbst symmetrischer Sätze (wie beispielsweise der Eulersche Satz über Polyeder und sein Analogon für Polygone) alle Sätze darin gedoppelt erscheinen. In der ebenen Geometrie heißt das, dass es zu jedem Satz notwendigerweise einen anderen gibt, der sich

aus ersterem ergibt, indem man einfach die beiden Worte „Punkt" und „Gerade" austauscht. Dagegen sind es in der Raumgeometrie die Worte „Punkt" und „Ebene", die man austauschen muss, um von einem Satz zum ihm zugeordneten zu gelangen." (Gergonne 1826, 210)

Ein Beispiel, das auch Gergonne betrachtet, ist der Satz von Desargues. Zuerst einmal muss man überlegen, was das Duale eines Dreiecks ist. Bei einem Dreieck sind drei Punkte (Ecken) gegeben, die durch drei Geraden verbunden werden. Die Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen. Dual hierzu sind drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, mit ihren drei Schnittpunkten. Folglich sollten diese Geraden auch nicht parallel sein. Man erhält also wieder ein Dreieck.

„Liegen zwei Dreiecke so im Raum, dass sich die Geraden, die ihre sich entsprechenden Eckpunkte festlegen, in einem Punkt treffen, so schneiden sich die einander entsprechenden Seiten in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen."	„Liegen zwei dreikantige Raumwinkel so im Raum, dass die Geraden, die ihre einander entsprechenden Flächen bestimmen, alle drei in einer Ebene liegen, so bestimmen die einander sich entsprechenden Kanten drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden."

(Gergonne 1826, 210)

Gergonne macht es also seinem Leser schwer, indem er den Satz von Desargues in seiner räumlichen Variante wählt. In der Ebene wird es einfacher:

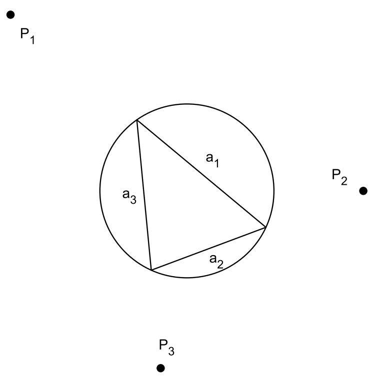
2 Dreiecke	2 Dreikante
Geraden durch einander entsprechende **Ecken** gehen durch einen **Punkt**	**Punkte** festgelegt durch einander entsprechende **Kanten** liegen auf einer **Geraden**
Schnittpunkte einander entsprechender **Kanten** liegen auf einer **Geraden**	**Verbindungsgeraden** einander entsprechender **Punkte** gehen durch einen **Punkt**

Der zum Satz des Desargues duale Satz ist somit seine Umkehrung. Zur Übung nehmen wir noch das klassische Paar dualer Sätze, den Satz von Pascal und den Satz von Brianchon. Beide setzen einen Kegelschnitt voraus.

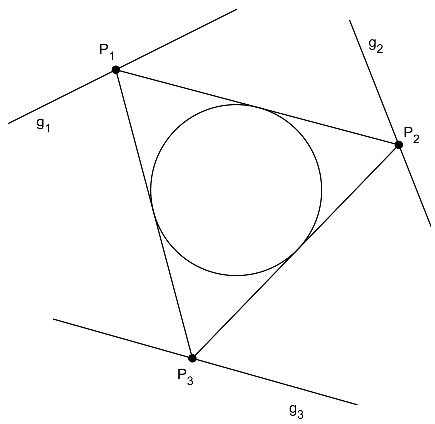
6 **Punkte** auf Kegelschnitt (Sechseck)	6 **Geraden** an Kegelschnitt (Sechseck)
einander entsprechende **Kanten** schneiden sich in drei **Punkten**	einander entsprechende **Ecken** werden durch drei **Geraden** verbunden.
die drei **Schnittpunkte** liegen auf einer **Geraden**	die drei **Verbindungsgeraden** gehen durch einen **Punkt**

Ein Problem und seine duale Fassung, das in den frühen Diskussionen um die Dualität auftauchte, was dasjenige von Castillon (oder auch Cramer-Castillon). Gergonne benutzte es z.B. um die Überlegenheit der analytischen Geometrie zu demonstrieren (seiner Ansicht nach):

Gegeben sind ein Kreis und drei nicht auf einer Geraden befindliche **Punkte**. Dem Kreis ist ein Dreieck so einzubeschreiben, dass die (verlängerten) **Dreiecksseiten** jeweils durch einen der gegebenen **Punkte** gehen.



Gegeben sind ein Kreis und drei **Geraden**, die nicht durch einen Punkt gehen. Dem Kreis ist ein Dreieck so umzubeschreiben, dass die **Eckpunkte** des Dreiecks jeweils auf einer der vorgegebenen **Geraden** liegen.

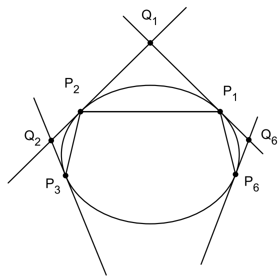


Anstatt des Kreises kann man einen nicht-entarteten Kegelschnitt nehmen.

Natürlich war die große Frage: Warum geht das? Aber auch: Wie sollen wir das Dualitätsprinzip begründen? Und wie einsetzen?

Ähnliche Sachverhalte kannte man einerseits aus der um 1820 schon bekannten Theorie der Pole und Polaren, andererseits - und schon viel länger - aus der sphärischen Geometrie. In letzterer entspricht jedem Großkreis ein Paar von Polen (man erhält sie als Schnittpunkte der Senkrechten im Großkreismittelpunkt auf der Großkreisebene) und analog jedem Paar von Diametralpunkten (Pole) ein Großkreis (Polare): Dieser ist der Schnitt derjenigen Ebene, welche die Verbindungsstrecke der beiden Punkte senkrecht halbiert („Mittellotebene"). Folglich kann man einem sphärischen Dreieck sein Poldreieck zuordnen; das Poldreieck des Poldreiecks ist wieder das Ausgangsdreieck (wenn man die „richtigen" Pole nimmt). Hier allerdings endet die Analogie, denn in der sphärischen Geometrie kann man nicht einfach Sätze dualisieren, indem man „Punkt" mit „Großkreis" vertauscht. Allerdings gibt es Zusammenhänge zwischen Ausgangs- und Poldreieck.

Poncelet hatte die Idee, das Dualitätsprinzip durch die Theorie von Pol und Polare zu begründen. Bringt man die Figuren des Satzes von Pascal und von Brianchon in die richtige Lage, so werden die Seiten des einbeschriebenen Sechsecks zu Polaren des umbeschriebenen Sechsecks und umgekehrt.



Die Polare zum Pol Q_i ist die Gerade P_iP_{i+1} $(i = 1, ..., 6)$, wobei $P_7 = P_1$ sein soll. Die Schnittpunkte K, L, M, die im Satz von Pascal auftreten, sind die Pole der Diagonalen (Polaren) Q_1Q_4, Q_2Q_5, Q_3Q_6, denn es gilt: K liegt auf der Polaren von Q_1 und K liegt auf der Polaren von Q_4, also liegen Q_1 und Q_4 auf der Polaren von K, welche folglich die Geraden Q_1Q_4 ist. Analog schließt man für L und M. Da nun die Punkte K, L und M kollinear sind, müssen die Diagonalen Q_1Q_4, Q_2Q_5 und Q_3Q_6 kopunktual sein.

Aus der Tatsache, dass man den Satz von Pascal beweisen kann, folgt also - vorausgesetzt man verfügt über eine genügend weit entwickelte Theorie von Polen und Polaren - ein Beweis des Satzes von Brianchon. Ganz ähnlich kann man den zum Satz von Cramer-Castillon dualen Satz begründen. Es ist aber auch klar, dass man das allgemeine Dualitätsprinzip so nicht begründen kann, denn die Theorie von Polen und Polaren setzt ja immer die Existenz eines Kegelschnitts voraus.

Während Poncelet den Kern der Dualität in der Zuordnung von Polen zu Polaren sah (er nannte das „Transformation durch reziproke Pole und Polaren"), war für Gergonne die Dualität so etwas wie Ausdruck des Wesens der projektiven Geometrie. Interpretieren könnte man das „Wesen" als Axiomatik. So verstanden müssten also die Axiome der projektiven Geometrie dafür sorgen, dass die Dualität gegeben ist. Das heißt, es müsste - vertauscht man „Punkt" und „Gerade" in einem Axiom - sich ein anderes Axiom ergeben. Typisches Beispiel:

Zwei **Punkte** legen stets eine **Gerade** fest.

Zwei **Geraden** legen stets einen **Punkt** fest.

Bis man eine derartige Axiomatik entwickelt hatte, musste man allerdings bis 1882 warten (M. Pasch „Vorlesungen über neuere Geometrie"). Bis dahin hing dieser Erklärungsvorschlag sozusagen in der Luft.

Einen anderen Zugang zur Dualität liefern Koordinaten, welche den besonderen Bedürfnissen der projektiven Geometrie angepasst sind. Diese nennt man heute homogene Koordinaten; eingeführt wurden sie unter anderen Bezeichnungen und etwas unterschiedlich von August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) - er sprach von „baryzentrischen Koordinaten" (Baryzentrum ist der Schwerpunkt) - in seinem Buch „Der barycentrische Calcul" (1827) und von Julius Plücker (1801 - 1868) - er arbeitete mit Dreieckskoordinaten - in seiner Arbeit „Über ein neues Coordinatensystem" (1830).

Bei dieser Zugangsweise ist die Dualität offensichtlich aufgrund der vollständigen Symmetrie bestimmter Ausdrücke. Ein Punkt der projektiven Ebene hat drei homogene Koordinaten $[x_1, x_2, x_3]$. Dabei wird das Tripel $(0, 0, 0)$ ausgeschlossen. Die Koordinaten heißen homogen, weil $[x_1, x_2, x_3]$ und $[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3]$ mit $\lambda \neq 0$ denselben Punkt der projektiven Ebene bezeichnen. Der Punkt $[x_1, x_2, x_3]$ liegt dann auf einer Geraden $a_1x + a_2y + a_3z = 0$, wenn gilt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Hierbei stellt man sich einen festen Punkt und eine beliebige Gerade vor. Geht man von einer festen Geraden und einem beliebigen Punkt aus, so wird die Aussage, die Gerade geht durch einen Punkt wiedergegeben als

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

Nun ist natürlich die Unterscheidung fest/beliebig in gewisser Weise künstlich, das heißt, man kann sich vorstellen, alle Variablen seien mit Indizes versehen. Dann erhält man völlig symmetrische Ausdrücke.

Zwei Geraden gehen durch einen Punkt	Zwei Punkte legen eine Gerade fest
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$	$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0$
$a_1'x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0$	$x'_1a_1 + x'_2a_2 + x'_3a_3 = 0$

Plücker ging übrigens - inspiriert durch diese vollkommene Symmetrie - noch einen Schritt weiter: Üblicherweise fasst man $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ auch als Gleichung aller Punkte $[x_1, x_2, x_3]$, die auf der Gerade $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ liegen, auf. Man kann sie aber genauso gut interpretieren als die Gleichung aller Geraden - wir schreiben dafür vereinfacht $[a_1, a_2, a_3]$ - die durch den festen Punkt $[x_1, x_2, x_3]$ gehen. Jeder „Punktreihe" entspricht ein „Geradenbüschel" und umgekehrt, um die Terminologie des 19. Jahrhunderts zu verwenden. Plücker nannte seine Idee „Linienkoordinaten".

Wir können hier nun einen kleinen Teil der Leistungen Poncelets betrachten. Einen breiten Raum darin nehmen die Kegelschnitte ein, die wir hier nur gestreift haben. Eine naheliegende Frage ist z.B. folgende: Durchläuft ein Punkt einen Kegelschnitt und ist ein weiterer Kegelschnitt gegeben, so kann man die Polaren dieser Punkte betrachten. Zu vermuten ist, dass diese wieder etwas mit der Kurve zu tun haben - in dem Sinne, dass man die Geraden (Polaren) als Einhüllende einer Kurve betrachtet. In der Tat ergibt sich, wie Poncelet beweisen konnte, wieder ein Kegelschnitt.

Warum wird gerade Poncelet als Begründer der projektiven Geometrie betrachtet? Das liegt in erster Linie daran, dass Poncelet die Idee hatte, eine neue Geometrie zu betreiben - von ihm Geometrie der Lage genannt - und dass er deren Leitidee - die invarianten Eigenschaften unter Projektionen zu betrachten, metrische Eigenschaften zugunsten von projektiven zurückzustellen - klar aussprach. Auch methodisch unterscheidet sich Poncelet deutlich von Vorläufern wie Desargues, indem er die unendlich fernen Elemente systematisch und gleichberechtigt verwendet. Vereinfacht kann man sagen: Desargues hat die euklidische Geometrie erweitert, während Poncelet dieser eine neue Geometrie zur Seite stellte.

Allerdings blieb Poncelets Geometrie der Lage noch in mancher Hinsicht von der euklidischen abhängig - z.B. wenn sie metrische Begriffsbildungen wie Streckenlängen (im Doppelverhältnis etwa) verwandte.

3.3 Karl Georg Christian von Staudt

Eine autonome Geometrie der Lage war dann das Ziel von Karl Georg Christian von Staudt (1797 in Rothenburg - 1867 in Erlangen). Im Vorwort zu seinem Hauptwerk „Geometrie der Lage" (1847) heißt es:

> „Man hat in den neueren Zeiten wohl mit Recht die Geometrie der Lage von der Geometrie des Maßes unterschieden, indessen gleichwohl Sätze, in welchen von keiner Größe die Rede ist, gewöhnlich durch Betrachtung von Verhältnissen bewiesen. Ich habe in dieser Schrift versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf." (von Staudt 1847, III)

Von Staudt, der nach seinem Studium in Göttingen bei Gauß von 1822 bis 1835 Gymnasiallehrer in Würzburg und Nürnberg gewesen war, sah in der projektiven Geometrie ein hohes didaktisches Potential hauptsächlich wegen ihrer Allgemeinheit und ihrer Anschaulichkeit. Er schließt:

> „Wenn es für den Geübteren keine Übung mehr ist, zu dem einen von zwei reziproken [modern: dualen] Sätzen den anderen zu suchen, so ist dies doch für den Anfänger eine zweckmäßige Aufgabe, welche ihn veranlasst, durch eigene Tätigkeit Gebilde zur Anschauung zu bringen. Dass aber das Gesetz der Reziprozität jeden für die Geometrie empfänglichen Schüler mehr anrege, als irgendein einzelner Satz, wird jeder Lehrer erfahren, der seine Schüler auf dasselbe aufmerksam macht. Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterricht in der Geometrie des Maßes das Wesentlich aus der Geometrie der Lage vorauszuschicken, damit ihre Schüler gleich anfangs denjenigen Überblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständnis der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist." (von Staudt 1847, IV)

Die projektive Geometrie, so die Botschaft, ist ein harmonisches und folgerichtiges Ganzes, das jedem Satz seine gleichsam natürliche Stelle anweist. Übrigens: Obwohl von Staudt in seinem Vorwort die Anschauung hervorhebt, gibt es in seinem Buch keine einzige Figur. Auch dies ist ein wesentlicher Unterschied zu Poncelet.

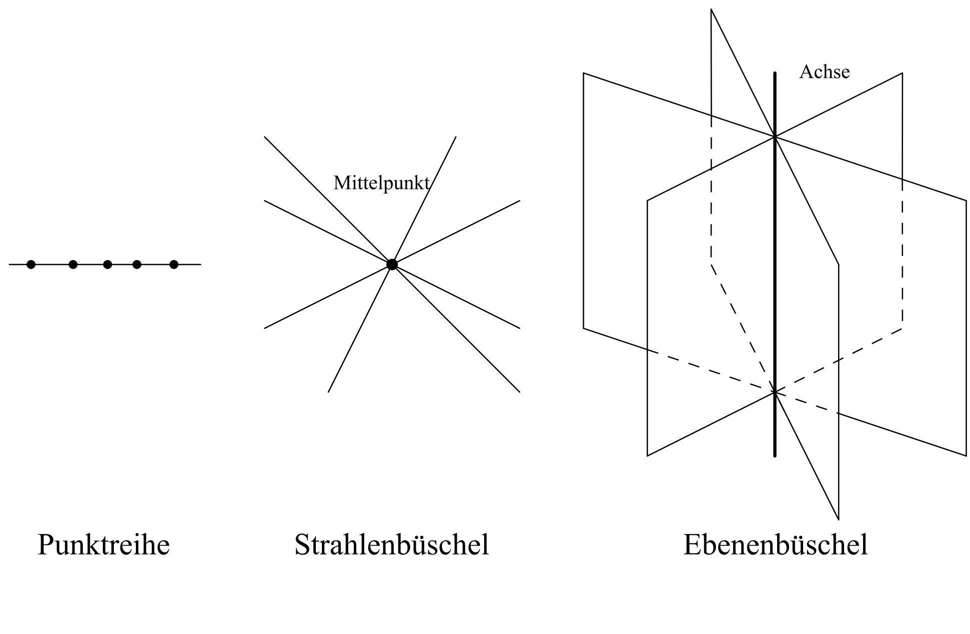
Der Text der „Geometrie der Lage" ist in Paragraphen und Nummern unterteilt, ansonsten ist er fortlaufend. Es gibt keine Gliederung im Sinne von Definitionen, Sätzen, Beweisen, Beispielen etc. Das führt dazu, dass der Leser oft nicht recht weiß, woran er nun ist. Auch Axiome fehlen bei von Staudt. Er erwähnt aber so etwas wie selbstverständliche Grundsätze, z.B.:

„Jede Fläche hat zwei Seiten; dasselbe kann von jeder Linie in einer Fläche, so auch von jedem Punkt in einer Linie gesagt werden.” (von Staudt 1847,???)

Von Staudt geht vom gewöhnlichen Raum - von der Euklidischen Geometrie also - aus, verwendet aber konsequent für seine Geometrie neue „Grundgebilde”. Diese Idee geht auf Jakob Steiner (1796 - 1863) zurück; von Staudt war aber der erste, der sie systematisch ausgearbeitet hat. Die Grundgebilde werden drei Stufen (erster, zweiter, dritter) zugeordnet; Grundgebilde höherer Stufen enthalten die Grundgebilde niedrigerer Stufen - aber natürlich nicht umgekehrt. Zusammenhänge zwischen den Grundgebilden ergeben sich nach Poncelets Methode des (eventuell mehrfachen) Projizierens und Schneidens. Vermutlich um sich von den traditionellen Vorstellungen abzugrenzen, verwendet von Staudt teilweise neue Begriffe für bekannte Gegenstände, etwa spricht er anstatt von „Geraden” meist von „Strahlen” oder auch von „Punktreihen”.

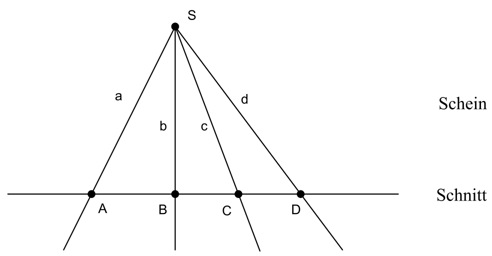
Die Grundgebilde der ersten Stufe sind die Punktreihen. die Strahlenbüschel und die Ebenenbüschel:

Punktreihen sind alle Punkte auf einer Geraden, **Strahlenbüschel** sind alle Geraden durch einen Punkt in einer Ebene, **Ebenenbüschel** sind alle Ebenen durch eine Gerade im Raum. Der gemeinsame Punkt der Geraden eines Strahlenbüschels heißt **Mittelpunkt**, die gemeinsame Gerade in einem Ebenenbüschel **Achse**.



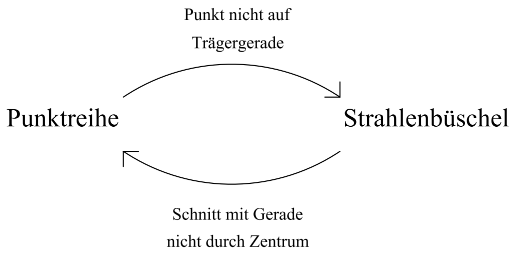
Nimmt man aus einer Punktreihe zwei Punkte heraus, so begrenzen diese eine Strecke, nimmt man zwei Strahlen aus einem Strahlenbüschel so ergibt sich ein Winkel (genauer gesagt: zwei Paare von Scheitelwinkeln, welche jeweils Nebenwinkel zu einander sind) und wählt man aus einem Ebenenbüschel zwei Ebenen aus, so legen diese einen Flächenwinkel (hier gilt dieselbe Bemerkung wie bei den gewöhnlichen Winkeln) fest.

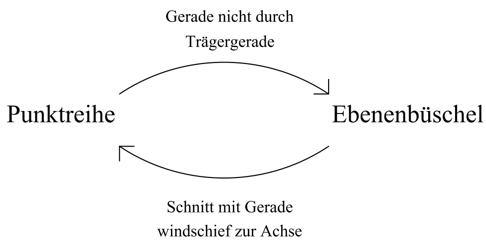
Punktreihen und Strahlenbüschel hängen durch Projizieren und Schneiden offenkundig miteinander zusammen:

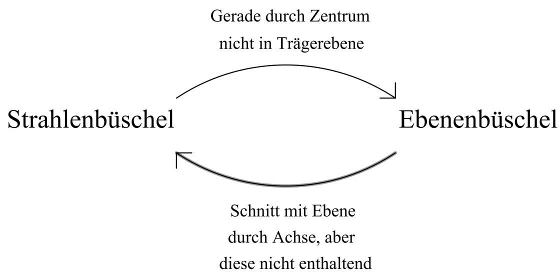


Wie bereits bemerkt gibt es keine derartigen Abbildungen bei von Staudt. Ich folge hier - auch im Text - weitgehend Th. Reye (Reye bezeichnet Strahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben, Punkte mit großen lateinischen Buchstaben und Ebenen durch kleine griechische Buchstaben). Die Punktreihe $A, B, C, D, ...$ heißt auch **Schnitt** des Strahlenbüschels bei Projektion von S aus, die Strahlen a, b, c, d heißen **Schein**. Auf die Frage, was mit der Parallelen zur gegebenen Gerade durch S geschieht, kommen wir noch zu sprechen.

Schneidet man ein Ebenenbüschel mit einer Ebene, welche die Achse trifft, diese aber nicht vollständig enthält, so erhält man ein Strahlenbüschel mit Zentrum auf der Achse. Schneidet man dagegen ein Ebenenbüschel mit einer Geraden, welche windschief zur Achse verläuft, so ergibt sich eine Punktreihe. Offensichtlich lassen sich diese Zuordnungen umkehren: einem Strahlenbüschel kann man Ebenenbüschel zuordnen und einer Punktreihe ebenfalls. Einer Punktreihe lässt sich aber auch ein Strahlenbüschel zuordnen. Dabei wählt man typischer Weise eine Gerade durch das Zentrum des Strahlenbüschels, welche nicht in dessen Ebene (Reye spricht auch vom „Träger") liegt, bzw. eine Achse, die windschief zur Geraden (als „Träger der Punktreihe) ist oder schließlich einen Punkt außerhalb der Trägergeraden der Punktreihe.







In allen drei Fällen kann man in einem verallgemeinerten Sinne von Projizieren und Schneiden reden.

Zwecks sprachlicher Abgrenzung nennt von Staudt die Grundgebilde zweiter Stufe „Bündel"; es gibt deren zwei: das ebene Feld und das Strahlenbündel. Das **ebene Feld** besteht aus allen Punkten und allen Strahlen einer Ebene, enthält also Punktreihen und Strahlenbündel (darum manchmal auch Punktfeld bzw. Strahlenfeld genannt), das **Strahlenbündel** besteht aus allen Strahlen und Ebenen im Raum, die durch einen festen Punkt - den Mittelpunkt oder das Zentrum - gehen. Legt man eine Ebene durch den Mittelpunkt, so ergibt sich durch Schnitt mit dem Strahlenbündel ein Strahlenbüschel. Das Strahlenbündel enthält aber auch Ebenenbüschel. Hierzu legt man eine Gerade durch den Mittelpunkt und betrachtet alle Ebenen aus dem Strahlenbüschel, welche diese Ebene enthalten.

Im Grunde genommen wissen wir nun auch schon, wie Strahlenbüschel und ebenes Feld in Zusammenhang gebracht werden können. Ist ein ebenes Feld gegeben, so nimmt man einen Punkt S außerhalb von dessen Trägerebene. Dann kann man jedem Strahl des ebenen Feldes eine Ebene zuordnen, nämlich diejenige, welche von S und der fraglichen Gerade festgelegt wird. Da alle diese Ebenen durch S gehen, schneiden sie sich paarweise in einer Geraden. Man erhält so also Ebenenbüschel mit Achsen die durch S gehen. Ist ein Punkt des ebenen Feldes gegeben, so legt dieser zusammen mit S einen Strahl fest. Alle Punkte einer Geraden in der Trägerebene des ebenen Feldes liefern so ein Strahlenbüschel mit Zentrum S. Hat man umgekehrt ein Strahlenbüschel, so erhält man ein zugehöriges ebenes Feld, indem man das Büschel mit einer Ebene nicht durch sein Zentrum schneidet.

Bezeichnen wir die Ebene, die durch das Strahlenbündel mit Mittelpunkt S gelegt wird, mit η, so ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Schnitt	**Schein**
Punktreihe in η	Strahlenbüschel mit Mittelpunkt S
Strahlenbüschel in η mit Zentrum T	Ebenenbüschel mit Achse ST
Kurve in η	konische Fläche mit Spitze S
Strecke in η	Winkel mit Scheitel in S
Winkel in η mit Scheitel U	Flächenwinkel mit Kante SU

Schnitt und Schein bedingen einander - sind sind gewissermaßen austauschbar.

Es gibt daneben noch ein Grundgebilde dritter Stufe, das **räumliche System**. Dieses enthält unendlich viele Grundgebilde erster und zweiter Stufe, die man sich jeweils einem Punkt des Raumes als Zentrum zugeordnet denken kann. Da von Staudt nicht an der Dreidimensionalität der Geometrie rührt, lässt sich das Grundgebilde dritter Stufe nicht als Schnitt auffassen. Hierzu bräuchte man ja einen Punkt außerhalb dieses Raumes, von dem aus man projiziert. Diesen revolutionären Schritt machte der italienische Geometer Giuseppe Veronese (1854 - 1917) um 1880 herum.

Von Staudts Grundgebilde sind u.a. deshalb bemerkenswert, weil sie eine Loslösung von der konkreten anschaulichen Bedeutung bedeuten. Die Elemente der Geometrie werden variabel; sie haben keine starre Bedeutung mehr. In eine ähnliche Richtung gehen Plückers Linienkoordinaten, von denen oben kurz die Rede war.

Bei von Staudt folgen nun Ausführungen zum Begriff „parallel" und zum Begriff „**Richtung**": Zwei parallele Geraden definieren eine Richtung (oder auch zwei, wenn man die Orientierung berücksichtigt). Analog legen zwei parallele Ebenen eine „**Stellung**" fest. Das führt dann in §5 seines Buches zur uns schon bekannten Einführung von unendlich fernen Punkten, unendlich fernen Geraden und der unendlich fernen Ebene. Von Staudt schreibt hierzu:

„58. Durch die in diesem § aufgestellte Ansicht, welche im Gegensatz zur gewöhnlichen die perspektivische heißen soll, werden oft anscheinend ganz verschiedene Sätze in eine Aussage zusammengefasst und die Ausnahmen beseitigt, welche außerdem der Aufstellung allgemeiner Gesetze häufig im Wege stehen würden." (von Staudt 1848, 25)

Exkurs: Eulerscher Polyedersatz
Bemerkenswert ist der Beweis, den von Staudt für den Eulerschen Polyedersatz gibt. Dieser findet sich im §4 „Von den nEcken, nKanten und Polyedern", in dem er diese Begriffe einführt und erläutert. Das ebene n-Eck ist der (ebene) Schnitt eines n-Kants (also eines Raumwinkels mit n Kanten). Man muss n-Kant und n-Seit auseinander halten. Ein Polyeder ist ein von ebenen Flächen begrenzter Raumteil, so dass längs einer Kante nur zwei ebene Flächen zusammentreffen. Ein Polyeder hat folglich Ecken (von Staudt: Eckpunkte), Kanten und Flächen.

„49. Wenn jeder Eckpunkt eines Polyeders mit jedem andern durch eine Kante oder eine aus Kanten zusammengesetzte Linie verbunden werden kann, und seine Oberfläche durch jede aus Kanten zusammengesetzte geschlossene Linie, welche nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht, in zwei Teile geteilt wird, so ist die Anzahl E der Eckpunkte mehr der Anzahl F der Flächen gleich der Anzahl K der Kanten mehr zwei." (von Staudt 1848, 20)

$$E + F = K + 2$$

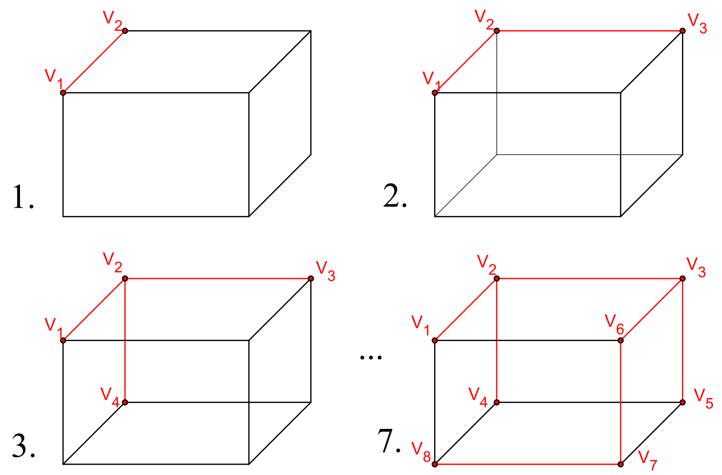
oder auch

$$E - K + F = 2$$

Bemerkenswert ist hier - neben dem Beweis, auf den wir gleich zu sprechen kommen - die Tatsache, dass von Staudt genaue Voraussetzungen formuliert, unter denen der Eulersche Polyedersatz gilt. Nachdem man lange Zeit angenommen hatte, dieser Satz gelte für alle Polyeder, musste man in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erkennen, dass dies nicht so ist. Folglich musste man nach Bedingungen suchen, welche die Ausnahmen ausschlossen. Eine solche Bedingung - allerdings eine zu starke - ist die Konvexität. Eine andere - allerdings unhandliche - ist die von von Staudt (zur Suche nach solchen Bedingungen vgl. I. Lakatos „Beweise und Widerlegungen"). Diese ist genau so gemacht, dass der von ihm erdachte Beweis funktioniert: Sie ist gewissermaßen „maßgeschneidert".

Beweis: Von Staudts Beweis selbst ist äußerst knapp (nur 14 Druckzeilen); er enthält weder Erläuterungen noch Figuren. Ich gebe hier eine ausführliche Variante wieder, die sich an Cromwell (1999, 210 - 213) anlehnt. Im ersten Teil schildere ich die Vorgehensweise, im zweiten Teil überlegen wir, dass das Vorgehen tatsächlich möglich ist.

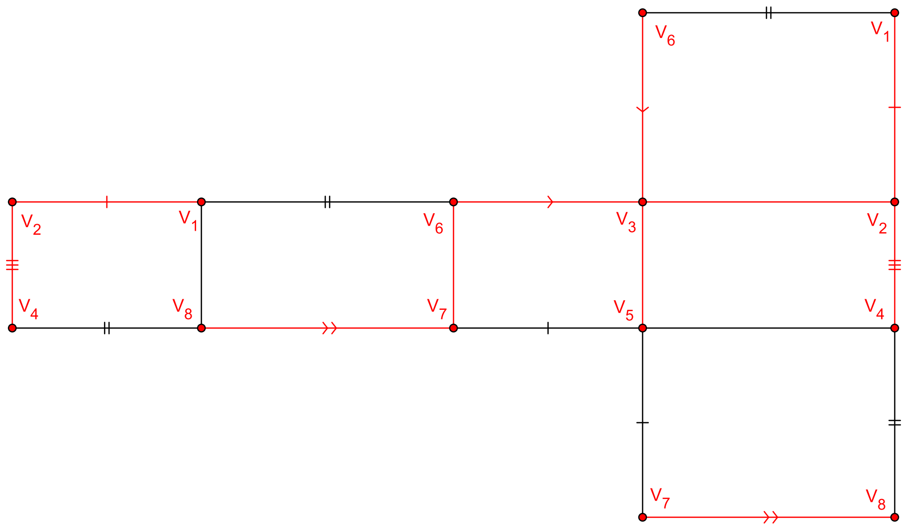
Wir nehmen eine beliebige Ecke des Polyeders, die wir V_1 nennen. Von V_1 gehen Kanten aus; eine davon - sie verbinde V_1 mit V_2 - wählen wir und färben sie rot. Nun nehmen wir eine von der rot gefärbten Kante veschiedene Kante, die in V_2 beginnt. Diese verbinde V_2 mit V_3 und werde wieder rot gefärbt. Im nächsten Schritt nimmt man wieder eine Kante, die in einer der rot gefärbten Ecken beginnt, und färbt diese rot. Dabei gibt es nur eine Einschränkung: Der Fall, dass eine rot gefärbte Ecke mit einer rot gefärbten Ecke durch eine Kante verbunden wird, darf nicht eintreten. Da es E Ecken gibt, erhält man schließlich $E-1$ Kanten. Dieser Kantenzug ist maximal in dem Sinne, dass das Hinzufügen irgendeiner Kante zur Verletzung der Bedingung führt.



Wie viele Kanten bleiben nun ungefärbt? Aufgrund der Bedingung ist klar, dass jede Fläche mindestens eine ungefärbte Kante besitzen muss. Allerdings gehört dann jede ungefärbte Kante (wie jede Kante überhaupt) zu genau zwei Flächen. Das heißt, die Anzahl der ungefärbten Kanten ist gewiss größer/gleich $\frac{F}{2}$.

Der Schlüssel zur Lösung liegt darin, dass man sich klar macht, dass man die Flächen so zusammenfassen kann, dass man von einer zur nächsten

über eine ungefärbte Kante kommt. Anders gesagt: Was passiert, wenn man eine weitere Kante färbt?
Aufgrund unserer Konstruktion kann eine weitere Kante nur noch gefärbt werden, indem man die Verbindungskante zweier bereits gefärbter Ecken einfärbt - also das Konstruktionsprinzip verletzt.



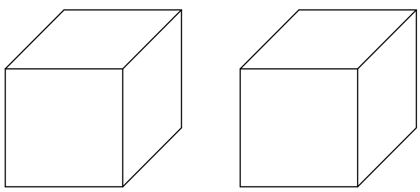
Man beachte: Die markierten Kanten sind eigentlich identisch. Deshalb stimmt im Netz die Anzahl der Kanten nicht: Es gibt eigentlich 7 rote und 5 ungefärbte Kanten. Nehmen wir mal an, wir färben die Kante V_4V_5. Dann entsteht ein geschlossener rot gefärbter Kantenzug $V_4V_5V_3V_2V_4$. Nach der zweiten Voraussetzung des Satzes berandet dieser einen vollständigen Teil des Polyeders - im Beispiel ist das einfach ein Rechteck.
Analoges muss immer geschehen, wenn man eine Kante färbt - allerdings muss der entstehende, vollständig von roten Kanten umgebene Teil nicht einfach eines der begrenzenden Polygone sein. Im Beispiel sieht man das, wenn man V_1V_8 einfärbt. Der vollständig begrenzte Bereich $V_8V_7V_6V_3V_2V_1V_8$ besteht dann aus zwei Rechtecken, welche längs der eingefärbten Kante V_1V_6 zusammentreffen. Färbt man diese rot, entstehen die Rechtecke $V_1V_8V_7V_6$ und $V_1V_6V_3V_2$, welche zum Polyeder gehören.
Somit entsteht beim Färben einer ungefärbten Kante immer ein von gefärbten Kanten vollständig umschlossenes Gebiet. Sind alle ungefärbten Kanten schließlich gefärbt, so müssen sich die F Flächen ergeben, die

das Polyeder bilden. Das geschieht durch Einfärben von $F-1$ Kanten. Die Gesamtkantenzahl K ergibt sich als Summe der Anzahl der gefärbten Kanten plus der Anzahl der noch zu färbenden - also ungefärbten - Kanten:

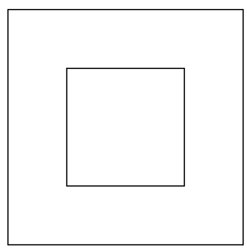
$$K = (E-1) + (F-1)$$

$$K = E + F - 2$$

Die Rolle der von von Staudt gemachten Annahmen ist exakt so, dass sie die vorgetragene Beweisführung ermöglichen. Im ersten Teil ist wichtig, dass man von jedem Eckpunkt jeden Eckpunkt durch einen Kantenzug erreichen kann (das Polyeder besteht also beispielsweise nicht aus zwei disjunkten Teilpolyedern - heute nennt man diese Eigenschaft wegweisen Zusammenhang). Die zweite Bedingung stellt sicher, dass jeder geschlossene Kantenzug einen Teil des Polyeders vollständig berandet (die Seitenflächen haben keine Löcher - heute nennt man dies einfachen Zusammenhang).



ein nicht zusammen-
hängendes Polyeder:
ein Zwilling



ein nicht einfach
zusammenhängendes
Polygon:
der Bilderrahmen

■

Aus heutiger Sicht gehört der Eulersche Polyedersatz nicht in die projektive Geometrie - wie nach von Staudts Meinung - sondern sogar in die Topologie. Es kommt in ihm ja nicht darauf an, dass die Kanten gerade Linien sind und die Flächen ebene Polygone. In gewisser Weise hatte das schon Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) benutzt, der in seinem epochalen Geometriebuch von 1794 einen Beweis des Eulerschen Polyedersatzes gab, indem er das Polyeder auf eine Sphäre projizierte (zentral von einem Punkt im Inneren des Polyeders). Es ergibt sich dann eine Zerlegung der Kugeloberfläche mit Hilfe sphärischer Vielecke. Da man für diese eine Formel für den Flächeninhalt kannte, ist der Beweis dann nicht mehr schwierig. Dieser Teil der Beweisführung Legendres ist allerdings sogar metrisch, somit wesentlich spezieller als die Idee von von Staudt.

Zurück zur projektiven Geometrie in von Staudts „Geometrie der Lage".

Die Einführung der unendlich fernen Punkte hebt die Unterscheidung parallel/schneidend auf, weshalb man jetzt ein Büschel von parallelen Geraden auch ein Strahlenbüschel nennen kann; dessen Zentrum ist eben ein unendlich ferner Punkt. Analog bilden parallele Ebenen ein Ebenenbüschel, dessen Achse eine Ferngerade ist.

Grundgebilde unterschiedlicher Stufe lassen sich durch Schnitte in Zusammenhang bringen: das Gebilde niedrigerer Stufe ist ein Schnitt desjenigen höherer Stufe. Dagegen lassen sich Grundgebilde gleicher Stufe in Zusammenhang bringen, indem man sie beide als Schnitte ein und desselben Grundgebildes höherer Stufe betrachtet. So ergibt sich der Begriff homologer Elemente (nach Poncelet, dem auch Reye folgt). Von Staudt spricht von aufeinander bezogenen Elementen. Für die damalige Zeit ergibt sich hier ein sehr abstrakter Abbildungsbegriff, der insbesondere auch mehrere verschieden geartete Objektbereiche (z.B. Strahlen und Ebenen) berücksichtigt:

> „59. Zwei Grundgebilde heißen auf einander bezogen, wenn jedem Element eines jeden ein Element des andern zugewiesen ist, welches jenem entsprechend heißt." (von Staudt 1848, 25)

Beispiel: Ein ebenes Gebilde s - also eine Ebene mit Punktreihen (Geraden) und Strahlenbüscheln - wird einem Ebenenbündel zugeordnet (dessen Achse nicht in der Ebene des ebenen Gebildes liegt), indem man ersteres als Schnitt von letzterem betrachtet. Die Ebenen des Bündels entsprechen Geraden des ebenen Systems, die Geraden des Bündels Punkte.

Das nächste wichtige Thema, das von Staudt angeht, ist die Dualität (von ihm Reziprozität genannt) im Raum. Diese ist für ihn gewissermaßen eine Erfahrungstatsache:

> „66. Schon die ersten Sätze der Geometrie lassen ein gewisses Gesetz der Reziprozität oder Dualität erkennen, nach welchem im Raume der Punkt und die Ebene einander gegenüberstehen (reziproke Begriffe sind), und jeder Satz, in welchem zwischen eigentlichen und uneigentlichen Elementen kein Unterschied gemacht wird, seine Ergänzung in einem andern findet, der aus dem ersten hervorgeht, wenn man Punkt und Ebene (also

auch gerades Gebilde [von Staudts Ausdruck für „Punktreihe"] und Ebenenbüschel, Strecke und Flächenwinkel usw.) mit einander vertauscht. Gewöhnlich werden zwei solche Sätze wie die beiden Seiten eines Satzes neben einander gestellt ..." (von Staudt 1848, 30)

Von Staudt verwendet konsequent die Zweispaltenschreibweise von Gergonne. Seine ersten Beispiele sind:

„1. Durch zwei Punkte A, B ist eine Gerade AB bestimmt, welche nämlich durch beide Punkte geht.	1.' Durch zwei Ebenen A, B ist eine Gerade AB bestimmt, in welcher nämlich die beiden Geraden sich schneiden.
...	...
4. Zwei Gerade, welche einen Punkt gemein haben, liegen auch in einerlei Ebene.	4.' Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben auch einen Punkt gemein."

(von Staudt 1848, 31)

Bei Reye findet man den historischen Hinweis auf Gergonne, der die Lehre von der Dualität begründet habe, und auf Poncelet, der diese schon vor Gergonne „mittelst der Polarentheorie nachgewiesen" (Reye 1899. 26) habe. Er erklärt auch seinem Leser, dass das Dualitätsprinzip das Studium der Geometrie „außerordentlich" erleichtere, weil sich die eine Hälfte des Stoffes aus der anderen ergäbe. Reye kündigt schließlich einen Beweis des Dualitätsprinzips an (vgl. Reye 1899, 30).

Duale Aussagen entsprechen oft dualen Konstruktionsaufgaben, die bei von Staudt und Reye eine wichtige Rolle spielen.

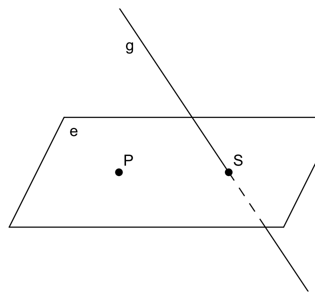
„Durch zwei Punkte eine Gerade legen.	Die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden.
...	...
Durch zwei inzidente Geraden eine Ebene zu legen.	Von zwei inzidenten Geraden den Schnittpunkt zu finden."

(Reye 1899, 27)

Manche Aufgaben sind selbstdual und lassen duale Lösungen zu:

> „In einer Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die eine beliebige Gerade schneidet." (Reye 1899, 28)

Man beachte, dass dies eine räumliche Aufgabe ist.



Die dualen Lösungen sind:

Lege in e die Gerade durch P und S.	Lege durch P und g die Ebene, deren Schnitt mit e ist die gesuchte Gerade.

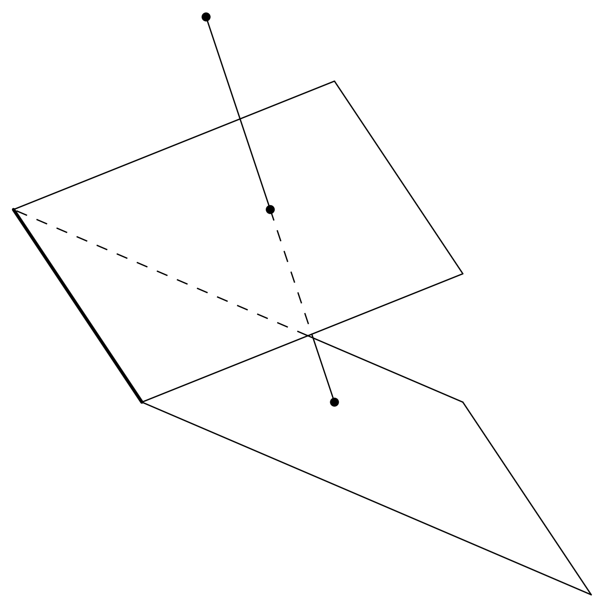
Besonders interessant ist, dass sich die Dualität auf die Grundgebilde ausdehnen lässt:

ebenes Feld (Ebene als Träger)	Strahlenbündel (Punkt als Träger)
Punkt	Ebene
Punktreihe	Ebenenbüschel
Strahl (als Verbindung zweier Punkt)	Strahl (als Schnittlinie zweier Ebenen)
Strahlenbüschel	Strahlenbüschel

Das Beispiel, das Reye für einen Satz über ebene Felder und seinen dualen Satz über Strahlenbündel gibt, ist schon recht komplex:

„Werden zwei Felder dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Schnitte eines und desselben Bündels betrachtet, so liegen je zwei einander entsprechende Elemente (Punkte oder Gerade) der Felder auf einem und demselben Elemente (Strahl oder Ebene) des Bündels. Die Schnittlinie der beiden Ebenen fällt mit ihrer entsprechenden Geraden zusammen und entspricht sich selbst; dasselbe gilt von jedem Punkt der Schnittlinie. Die beiden ebenen Felder haben also eine Punktreihe 'entsprechend gemein'."	„Werden zwei Bündel dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Scheine eines und desselben Feldes betrachtet, so gehen je zwei homologe Elemente (Strahlen oder Ebenen) der Bündel durch ein und dasselbe Element (Punkt oder Gerade) des Feldes. Der gemeinschaftliche Strahl der beiden Bündel fällt mit seinem entsprechenden Strahle zusammen und entspricht sich selbst; dasselbe gilt von jeder Ebene durch diesen Strahl. Die beiden Bündel haben also einen Ebenenbüschel 'entsprechend gemein'."

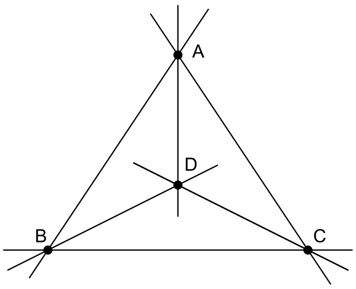
(Reye 1899, 29)

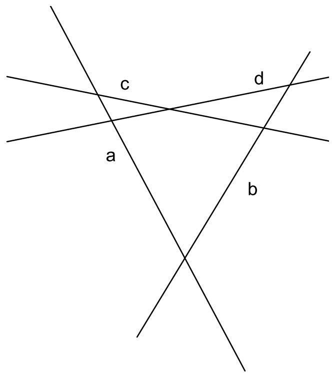


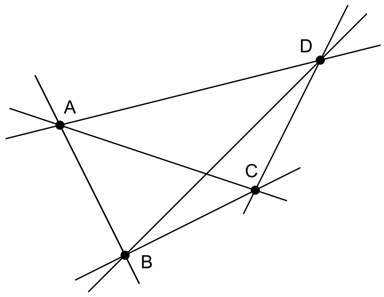
Auch eine ebene Kurve kann dual aufgefasst werden: nämlich als Abfolge von Punkten und als Abfolge von Geraden (Tangenten; man spricht von **Evolventen**). In der Ebene sind Punkt und Gerade dual; das zeigt sich sehr schön bei den Begriffen **Vierseit** und **Viereck**, meist als **vollständiges Vierseit** bzw. **Viereck** bezeichnet.

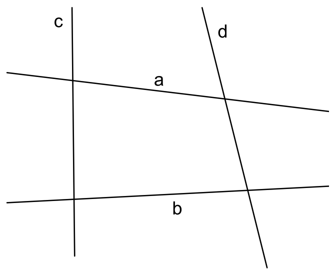
Ein vollständiges Viereck besteht aus 4 Punkten in einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, und ihren sämtlichen Verbindungsgeraden.

Ein vollständiges Vierseit besteht aus 4 Geraden in einer Ebene, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, un ihren sämtlichen Schnittpunkten.

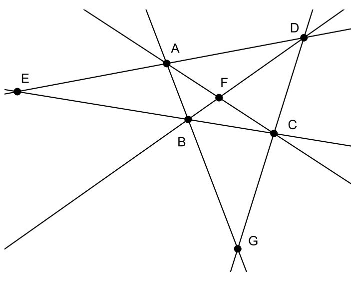








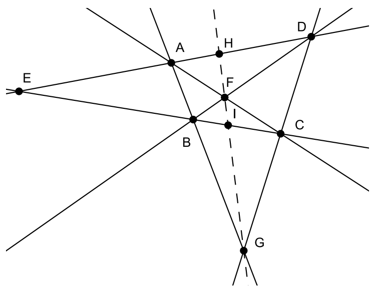
Bezeichnung: Beim Viereck werden zwei Seiten, die nicht durch ein und denselben Eckpunkt gehen, **Gegenseiten** genannt. Paare von Gegenseiten sind also (siehe oben): AB, CD sowie AD, BC und AC, BD. Die Schnittpunkte der Gegenseiten heißen **Nebeneckpunkte** (auch Diagonalpunkte ist üblich [vor allem im Englischen]).



E, F, G sind Nebeneckpunkte.

Anschaulich scheint klar zu sein, dass die Nebeneckpunkten eines vollständigen Vierecks nicht auf einer Gerade liegen. In der gewöhnlichen projektiven Geometrie lässt sich das tatsächlich beweisen; in anderen Situationen muss man es aber axiomatisch fordern („Fano-Axiom", vgl. Hartshorne 2009, 54).

Legt man durch zwei Nebeneckpunkte eine Gerade (z.B. F und G), so erhält man auf dem Gegenseitenpaar AD, BC zwei Schnittpunkte H bzw. I. So erhält man die beiden Punktequadrupel E, A, H, D und E, B, I, C.



Verwendet man Streckenlängen und definiert man die harmonische Lage von vier kollinearen Punkten mit Hilfe des Doppelverhältnisses, so kann man - wie wir bereits gesehen haben - klassisch beweisen, dass die vier Punkte E, A, H, D bzw. E, B, I, C harmonisch liegen.

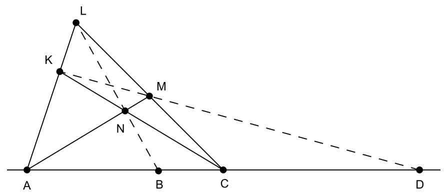
Diesen Weg wollte von Staudt im Sinne seiner Autonomieforderung vermeiden. Er hatte die verblüffende Idee, die traditionelle Vorgehensweise umzudrehen: Vier Punkte auf einer Geraden liegen harmonisch, wenn es ein „passendes" vollständiges Vierseit gibt.

> „93. Wenn in einer Geraden drei Punkte A, B, C gegeben sind, und alsdann ein Viereck so konstruiert wird, dass eine Diagonale durch den zweiten der gegebenen Punkte geht, in jedem der beiden übrigen aber zwei einander gegenüberliegende Seiten sich schneiden, so schneidet die andere Diagonale des Vierecks jene Gerade in einem vierten Punkt D, welcher durch die drei gegebenen Punkte bestimmt ist und zu denselben der vierte harmonische Punkt heißt." (von Staudt 1848, 43)

Damit diese Definition sinnvoll wird, muss man nachweisen, dass ein anderes vollständiges Viereck, dessen eine Diagonale durch B geht, und das Gegenseitenpaar besitzt, das durch A bzw. C geht, denselben Punkt D vermöge seiner anderen Diagonale liefert. Dieses Problem - das man i.w. mit Hilfe von einander zugeordneten Vierecken und Vierkanten - als ihren Schein - löst, wollen wir hier übergehen (vgl. Reye 1899, 34 - 38).

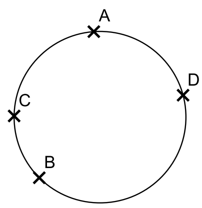
Klar ist aufgrund der Definition und der anschließenden Bemerkung, dass der vierte harmonische Punkt zu drei gegebenen Punkten auf einer Geraden eindeutig bestimmt ist. Dabei muss allerdings die Reihenfolge der Punkte festgelegt sein.

Die beiden Schnittpunkte des Gegenseitenpaares werden von den Diagonalenschnittpunkten **getrennt**: A, C wird von B, D getrennt (und umgekehrt). Das bedeutet, dass man nicht von A nach C auf der fraglichen Gerade gelangen kann, ohne dabei B oder D zu passieren. Es ist sehr vorteilhaft im Folgenden die Schreibweise folgendermaßen festzulegen: $ABCD$ ist ein harmonisches Punktequadrupel - auch harmonische Punktreihe genannt - wenn sich die Gegenseitenpaare eines zugehörigen vollständigen Vierecks $KLMN$ - nämlich KL, MN und KN, LM - in A bzw. C schneiden, während die Diagonale KM durch D und die Diagonale LN durch B geht.



Viereck	Gegenseitenpaare	Schnittpunkte	Diagonale	Punkt	Diagonale	Punkt
$KLMN$	$KL, MN; KN, LM$	A, C	KM	D	LN	B

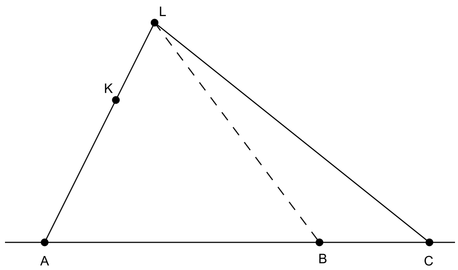
Diese Ordnung tritt in der projektiven Geometrie (aber z.B. auch in der sphärischen Geometrie) an die Stelle der Zwischenbeziehung der gewöhnlichen Geometrie. Diese verliert ja hier ihren Sinn, da die Geraden geschlossen sind - wie Desargues schon bemerkt hatte.



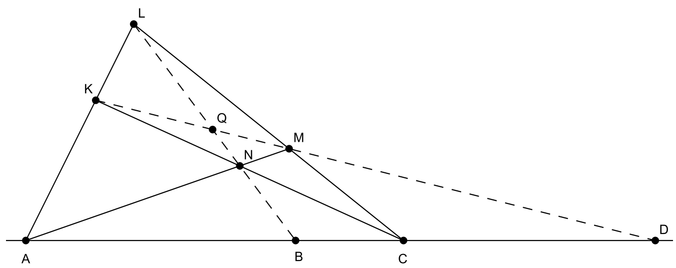
Zyklische Ordnung, Trennung von Punktepaaren

Vermöge des vollständigen Vierecks ist es nun einfach möglich, zu drei gegebenen Punkten A, B, C (in dieser Reihenfolge) den vierten harmonischen Punkt zu konstruieren:

Hierzu wähle man einen beliebigen Punkt L außerhalb der Geraden auf der die gegebenen Punkte liegen, und ziehe die Verbindungen AL, BL, CL. Auf $\overline{AL}$ nehme man einen Punkt K, verschieden von A und L, und ziehe KC.



Der Schnittpunkt von KC mit BL heiße N. Dann ziehe man AN; der Schnittpunkt mit CL sei M. Dann ist $KLMN$ das benötigte Viereck. Der vierte harmonische Punkt D ergibt sich als Schnittpunkt von KM mit AC.

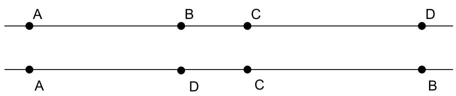


Diese Konstruktion enthält offensichtlich zwei Wahlen (von L und K); der oben erwähnte Satz stellt allerdings sicher, dass der Punkt D nicht hiervon abhängt. Wie immer man L und K wählt, man erhält stets denselben Punkt D. Man kann zudem beweisen, dass die Punkte A und C immer von den Punkten B und D getrennt werden.

Nennt man den Schnittpunkt von KM mit BL Q - Q ist dann der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks - so erhält man weitere harmonische Punktreihen: $KQMD$ und $LQNB$. $KQMD$ ist ein Schnitt im Strahlenbüschel mit Zentrum L zu $ABCD$. Dabei muss man sich noch die Gerade durch LD als gezogen hinzudenken. $LQNB$ ist ein Schnitt im Strahlenbüschel mit Zentrum K zu $ACDB$ (nimmt man M als Zentrum, so ergibt sich $LQNB$ als Schnitt zu $CDAB$).

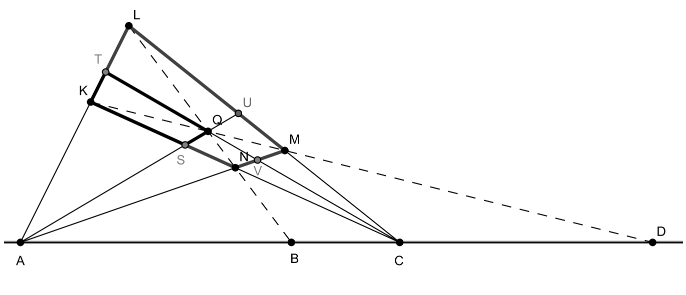
Um diese Bemerkung zu rechtfertigen, benötigt man noch eine Aussage: Ist $ABCD$ eine harmonische Punktreihe, so auch $ADCB$, $CBAD$ und $CDAB$ sowie auch $DCBA$, $DABC$, $BCDA$ und $BADC$.

Die Aussage bezüglich der Quadrupel $ADBC$, $CBAD$ und $CDAB$ ist unmittelbar klar, denn hier werden im Vergleich zu $ABCD$ nur zwei getrennte, einander zugeordnete Punkte vertauscht (im Beispiel B und D):



Begründung: Durch A und C (jeweils der erste und dritte Punkt der Quadrupels) gehen zwei Gegenseiten des Vierecks $KLMN$, durch B und D bzw. D und B zwei Diagonalen.

Will man zeigen, dass man auch Paare getrennter Punkte in einer harmonischen Punktreihe vertauschen darf, so muss man ein neues vollständiges Viereck konstruieren:



Zieht man im oben konstruierten Vierseit $KLMN$ mit Diagonalenschnittpunkt Q die Verbindungen AQ und CQ, so erhält man die Schnittpunkte S (mit CK), U

(mit CL), V (mit AM) und U (mit AL). Es entsteht dann das vollständige Viereck $KSQT$ mit den Diagonalen ST und KQ (die man teilweise noch ziehen muss).

Das erste Gegenseitenpaar dieses Vierecks KS, TQ trifft sich im Punkt C, das zweite KT, SQ im Punkt A (nach Konstruktion beides mal), seine Diagonale KQ geht gemäß Konstruktion durch D. Also muss die andere Diagonale ST durch den vierten harmonischen Punkt B gehen.

Analog kann man für die Vierecke $LTQU$, $MUQV$ und $NVQS$ argumentieren. Man erhält dann folgende Diagonalen mit zugehörigen Punkten: TU geht durch D, UV durch B und VS durch D.

Viereck	Gegenseiten	Punkte	Diagonale	Punkt	neue Diagonale	Punkt
$KSQT$	$KS, QT; KT, SQ$	C, A	KQ	D	ST	B
$LTQU$	$LT, QU; LU, TU$	A, C	LQ	B	TU	D
$MUQV$	$MU, QV; MV, UQ$	C, A	MQ	D	UV	B
$NVQS$	$NV, QS; NS, VQ$	A, B	NQ	B	VS	D

Betrachten wir nun das Viereck $STUV$.

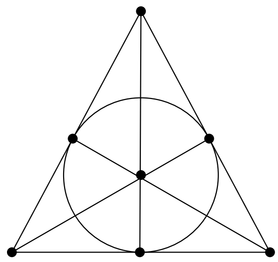
Viereck	Gegenseiten	Punkte	Diagonale	Punkt	neue Diagonale	Punkt
$STUV$	$ST, UV; SV, TU$	B, D	SU	A	VT	C

Aus dieser Tabelle ergibt sich, dass die Punkte $BADC$ harmonisch liegen. Analog argumentiert für die anderen Quadrupel.

Bemerkung:

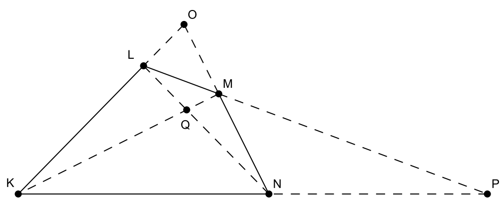
1. Die 12 Punkte A, B, C und D; K, L, M und N; Q sowie S, T, U, V liefern mit den entsprechenden Geraden (siehe oben) eine sehr symmetrische Situation: Durch jeden Punkt gehen vier Geraden und auf jeder Geraden liegen vier Punkte. So etwas nennt man heute eine **Konfiguration**. Theodor Reye gilt als der Begründer dieser Theorie.

2. Die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes D zu gegebenen Punkten A, B und C lässt sich wieder anwenden auf die Punkte B, C und D. Man erhält so einen weiteren Punkt E usw. G. Fano hat sich mit dieser Konstruktion beschäftigt und die naheliegende Frage gestellt: Ist es immer so, dass der Punkt E verschieden ist von A, B, C und D? Dies wiederum führte ihn dazu, sein berühmtes Beispiel einer projektiven Ebene mit endlich vielen Punkten aufzustellen (1892). Die Fano-Ebene lässt sich bildhaft so darstellen:



Um dieser Aussage allerdings einen präzisen Sinn zu geben, bedarf es einer Axiomatik der projektiven Ebene. Ein derartiges Interesse für Sonderfälle und Ausnahmen war übrigens ein Charakteristikum, das sich erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wirklich entfaltete. Das berühmteste Beispiel lieferte die 1872 von Karl Weierstraß angegebene stetige Funktion, die in keinem Punkt differenzierbar ist. Manchmal wird diese als Weierstraßsches Monster bezeichnet (vgl. Volkert 1986, 1988 und 2011).

Aus der Konstruktion des vollständigen Vierecks $KLMN$, das man für harmonische Punktreihen braucht, folgt, dass dessen „Diagonalpunkte" (D, P, Q in der Abbildung)[2] nicht kollinear sein können. Das wiederum erklärt, wie Fano auf das heute nach ihm benannte Axiom gekommen sein könnte - interessierte er sich doch für die Frage, wann die übliche Konstruktion der harmonischen Punktreihe nicht funktioniert.



Der Begriff „harmonisch" lässt sich in naheliegender Weise auf Strahlen und Ebenen erweitern: Projiziert man vier harmonische Punkte von einem Punkt außerhalb ihrer Trägergeraden, so nennt man die projizierenden Strahlen harmonisch. Wie schon Desargues wusste, liefert jeder Schnitt mit einer Geraden wieder vier harmonische Punkte. Projiziert man vier harmonische Punkte von einer Geraden aus, die nicht

[2]Diese Bezeichnung findet sich bei Hartshorne, nicht bei Reye und von Staudt

mit ihrer Trägergeraden zusammenfällt (und durch keinen der vier Punkte geht), so ergibt sich ein harmonisches Ebenenquadrupel.

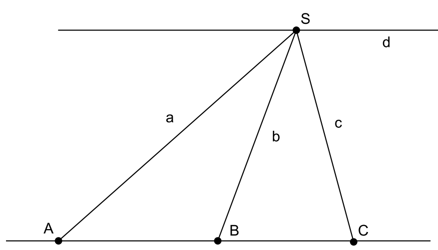
Es gilt ganz allgemein:

> „ Aus einem harmonischen Grundgebilde ergeben sich durch Projizieren und Schneiden immer wieder harmonische Grundgebilde.” (Reye 1899, 41)

In Reyes Buch, das ja ein Lehrbuch war, werden anders als bei von Staudt auch einige „metrische Beziehungen harmonischer Gebilde” erwähnt. Damit wird u.a. der Anschluss an die damalige Gymnasialgeometrie hergestellt. Eine erste Eigenschaft ist: Halbiert B die Strecke AC, so liegt der zugehörige vierte harmonische Punkt D im Unendlichen. Man beachte: Obwohl einfach erscheinend ist „Halbieren” ein metrischer Begriff. Die Eigenschaft, Mittelpunkt zu sein, bleibt i.a. schon bei einfachen Zentralprojektionen nicht erhalten.

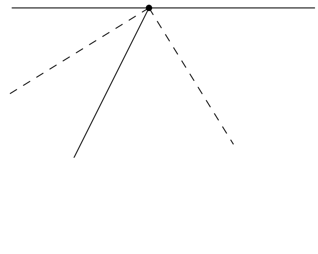
Hieraus folgt:

> „Zieht man durch die Spitze S eines Dreiecks ASC zwei Gerade, die eine d parallel zur Grundlinie AC und die andere b nach deren Mittelpunkt B, so trennen dieses beiden Geraden die anstossenden Seiten a, c des Dreiecks harmonisch.” (Reye 1899, 47)



Ist das Dreieck gleichschenklich, so ergibt sich hieraus:

> Die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel werden durch die Schenkel harmonisch geteilt.

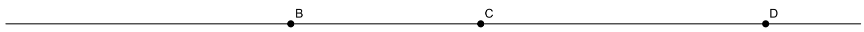


Beachte: Die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel stehen senkrecht aufeinander.

Es gilt auch die Umkehrung:

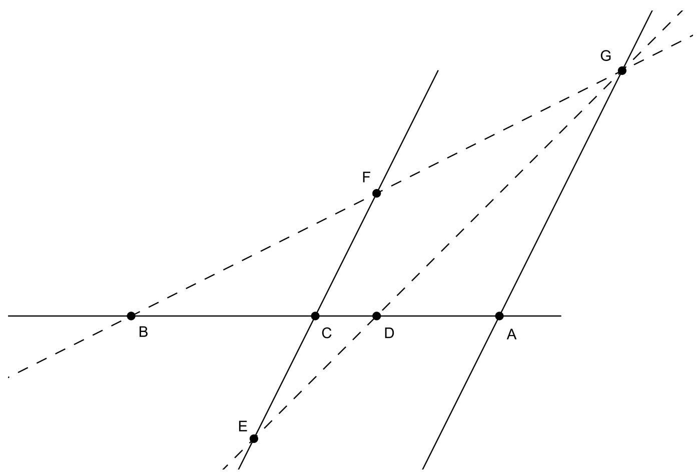
> „Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei getrennte auf einander senkrecht stehen, so hälften sie die Winkel zwischen den anderen beiden Strahlen." (Reye 1899, 47)

Mit Hilfe metrischer Konstruktionen lassen sich auch recht einfach zu drei gegebenen Punkten oder Strahlen der vierte harmonische Punkt bzw. Strahl ermitteln.



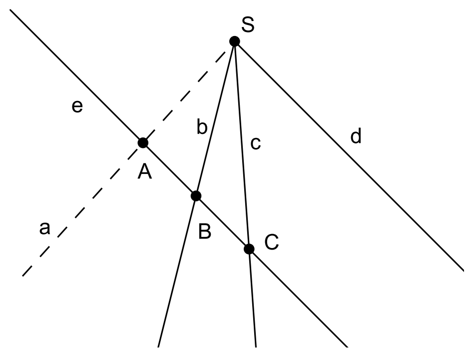
Sind die Punkte B, C, D auf einer Geraden gegeben, wobei C zwischen B und D liegen soll, so ergibt sich der vierte harmonische Punkte A folgendermaßen:

Wir ziehen durch C eine Gerade, die nicht mit derjenigen durch B, C und D identisch sein soll, und ziehen um C einen Kreis; Schnittpunkte mit der gezogenen Geraden seien E und F.



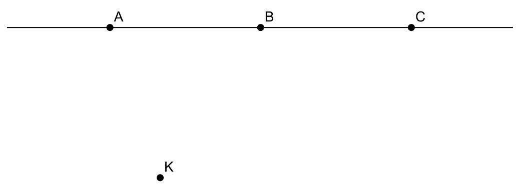
Ziehe die Geraden BF und ED, deren Schnittpunkt sei G. Dieser existiert nur - Euklidisch gesehen - wenn C nicht der Mittelpunkt von BD ist. Nun legt man die Parallele zur Geraden durch E, C und F durch G. Deren Schnittpunkt mit der Geraden durch B, C und D ist der gesuchte vierte harmonische Punkt A.

Sind die Strahlen b, c und d mit Zentrum S gegeben, so schneide man b und c mit einer Parallelen e zu d:

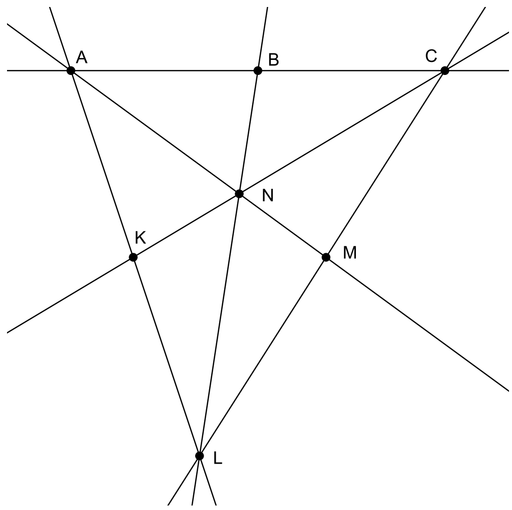


Schnittpunkte seien B bzw. C. Trage von B aus auf e die Strecke BC ab in die Richtung, in der C nicht liegt. Endpunkt sei A. Ziehe den Strahl durch A und S; dieser ist der gesuchte vierte harmonische Strahl a. Auch hier gibt es einen Ausnahmefall, nämlich den, dass sich b und d geradlinig fortsetzen, dass also beide Strahlen auf einer Geraden liegen.

Reye gibt auch noch eine schöne „lineare" (d.h. mit projektiven Mitteln - nicht metrische) Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Geraden AC durch einen Punkt K. Allerdings benötigt diese den Mittelpunkt B der Strecke AC, ist also nicht wirklich projektiv:



Ziehe AK und CK; deren Schnittpunkt mit einer beliebigen (nicht mit AC identischen) Geraden seien L und N.



Nun lege man de Geraden durch A und N bzw. C und L. Deren Schnittpunkt sei M. Dann ist KM die gesuchte Parallele.

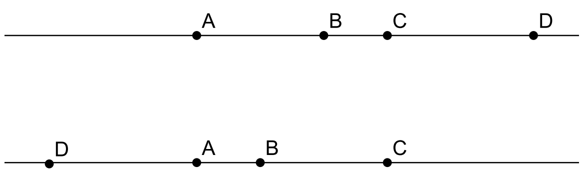
Um diese Konstruktion zu verstehen, muss man das Viereck $KLMN$ betrachten. Dies liefert - projektiv betrachtet - den vierten harmonischen Punkt als Schnittpunkt der Diagonalen KM mit der Geraden durch A und C. Da B Mittelpunkt von AC ist, liegt D im Unendlichen. Also sind AC und KM Euklidisch betrachtet parallel.

Reye erläutert dann noch die Beziehung zwischen harmonischen Punktreihen und dem Doppelverhältnis (vgl. oben):

$ABCD$ ist harmonisch dann und nur dann, wenn $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{CD}$, also $\frac{AB}{AC} : \frac{AD}{CD} = 1$. Mit $CD = -DC$ erhält man

$$\frac{AB}{AC} : \frac{AD}{DC} = -1$$

also $\mathrm{DV}(A, B, C, D) = -1$. Ist $AB > BC$, so liegt D links von A.



Wir kommen nun mit von Staudt und Reye zum zentralen Begriff der **Projektivität**:

> „103. Zwei einförmige Grundgebilde heissen zueinander projektivisch ($\overline{\wedge}$), wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem harmonischen Gebilde in dem einen ein harmonisches Gebilde im andern entspricht.“ (von Staudt 1847, 49)

(Anstatt „projektivisch“ sagen wir kurz auch „projektiv“.)

Projektivitäten sind also modern gesprochen Abbildungen, die die Eigenschaft „harmonisch sein“ erhalten. Insbesondere sind natürlich Zentralprojektionen Projektivitäten: Die entsprechenden Grundgebilde liegen dann nach von Staudt **perspektivisch**. Bei von Staudt und auch noch bei Reye liegt das Hauptaugenmerk nicht auf den Abbildungen, sondern auf den von solchen einander zugeordneten Objekten. Möbius sprach in ähnlichen Kontexten treffend von Verwandtschaften.

Beispiele für perspektivische (und damit projektive) Lagen:

1. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel (ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel), wenn die Punkte (Strahlen) des ersteren in Elementen des letzteren liegen.

2. Zwei Punktreihen, die Schnitte ein und desselben Strahlenbüschels sind.

3. Zwei Strahlenbüschel, die Scheine ein und derselben Punktreihe sind. Zwei Strahlenbüschel, die Schnitte ein und desselben Ebenenbüschels sind.

4. Zwei Ebenenbüschel, wenn sie Scheine ein und desselben Strahlenbüschels sind.

Es gilt:

> Zwei ungleichartige Grundgebilde sind perspektiv, wenn das eine Schnitt des anderen bzw. das andere Schein des ersteren ist.
>
> Zwei gleichartige Grundgebilde sind perspektiv, wenn sie Schnitte eines Grundgebildes höherer Stufe sind.

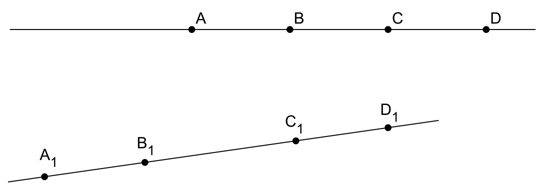
Offensichtlich ist von Staudts „projektivische Lage“ hiervon eine Verallgemeinerung. Typische Situationen entstehen, wenn man in der perspektivischen Lage den Schnitt verschiebt. Reye nennt dies „schiefe Lage“. Die perspektivische Situation ist somit ausgezeichnet durch eine besondere Lage.

Klar ist, dass aus $ABCD \overline{\wedge} EFGH$ und $EFGH \overline{\wedge} IJKL$ folgt $ABCD \overline{\wedge} IJKL$ (heute nennt man das Transitivität).

Das Zusammenspiel von Projektivitäten und Trennungseigenschaft regelt der folgende Satz:

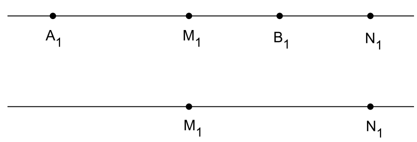
> „In zwei Punktreihen entsprechen vier beliebigen Punkten A, B, C, D der einen, von denen die beiden ersteren durch die zwei letzteren nicht getrennt sind, allemal vier Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ der anderen Reihe, von denen das Gleiche gilt." (Reye 1899, 54f.)

Beispiel:



Beweis: Die Idee ist, harmonische Punktreihen ins Spiel zu bringen, denn nur über diese weiß man etwas bezüglich ihres Verhaltens bei Projektivitäten:

> Zu zwei Punktepaaren A, B und C, D, die auf einer Geraden liegen und die sich nicht gegenseitig trennen, gibt es immer zwei Punkte M, N der fraglichen Geraden, so dass A, B, M, N und C, D, M, N harmonische Punktreihen sind (dabei kann die Reihenfolge der Punkte anders sein!) (vgl. Reye 1899, 45). Dann müssen die diesen harmonischen Punktreihen entsprechenden Punktreihen A_1, B_1, M_1, N_1 und C_1, D_1, M_1, N_1 auch harmonisch sein. Also trennen M_1, N_1 sowohl das Punktepaar A_1, B_1 als auch das Punktepaar C_1, D_1. Folglich können A_1, B_1 nicht durch C_1, D_1 getrennt werden.



■

Man bemerkt: Diese Argumentation setzt voraus, dass es auf einer Geraden genügend viele Punkte gibt. In einem Beispiel wie der Fano-Ebene würde der Beweis nicht greifen. Diese unausgesprochenen Annahmen wurden besonders mit von Staudts Beweis dessen, was man später den „Fundamentalsatz der projektiven Geometrie" nennen sollte, viel diskutiert. Dieser lautet so bei von Staudt, der zugleich sein Urheber war:

> „106. Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein." (von Staudt 1847, 50)

Literatur

[1] Andersen, K.: The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge (New York u.a.: Springer, 2007).

[2] Belting, H.: Florenz und Bagdad. Eine westöstliche Geschichte des Blicks (München: Beck, 2008).

[3] Edgerton, S.Y.: Giotto und die Erfindung der dritten Dimension. Malerei und Geometrie am Vorabend der wissenschaftlichen Revolution (München: Fink, 2004).

[4] Hartshorne, R.: Foundations of Projective Geometry (New York: Benjamin, 1967).

[5] Hornäk, S.: Die Entdeckung der Unendlichkeit in Philosophie und Kunst. In: Vom Bilde aus ... hg. Von K. Bering und R. Niehoff (Oberhausen: Athena, 2007), 207 – 226.

[6] Kline, M.: Mathematical Thought form Ancient to Modern Times (Oxford u.a.: OUP, 1976).

[7] Ostermann, A./Wanner, G.: Geometry by its History (Heidelberg u.a.: Springer, 2012).

[8] Panovsky, E.: Die Perspektive als „symbolische Form“. In: Ders. Aufsätze zu Grundfragen der Kunsttheorie (Berlin: Wissenschaftsverlag Volker Spiess, 1985), 99 – 167.

[9] Peiffer, J./Dahan, A.: Wege und Irrwege (Basel: Birkhäuser, 1994).

[10] Scriba, C./Schreiber, P.: 5000 Jahre Geometrie (Heidelberg u.a.: Springer, 2001).