Vortragsmanuskript[1] von W. Threlfall:

# Dreidim. sphärische Geometrie

(Kolloquium Dresden, 20.XI.1930)

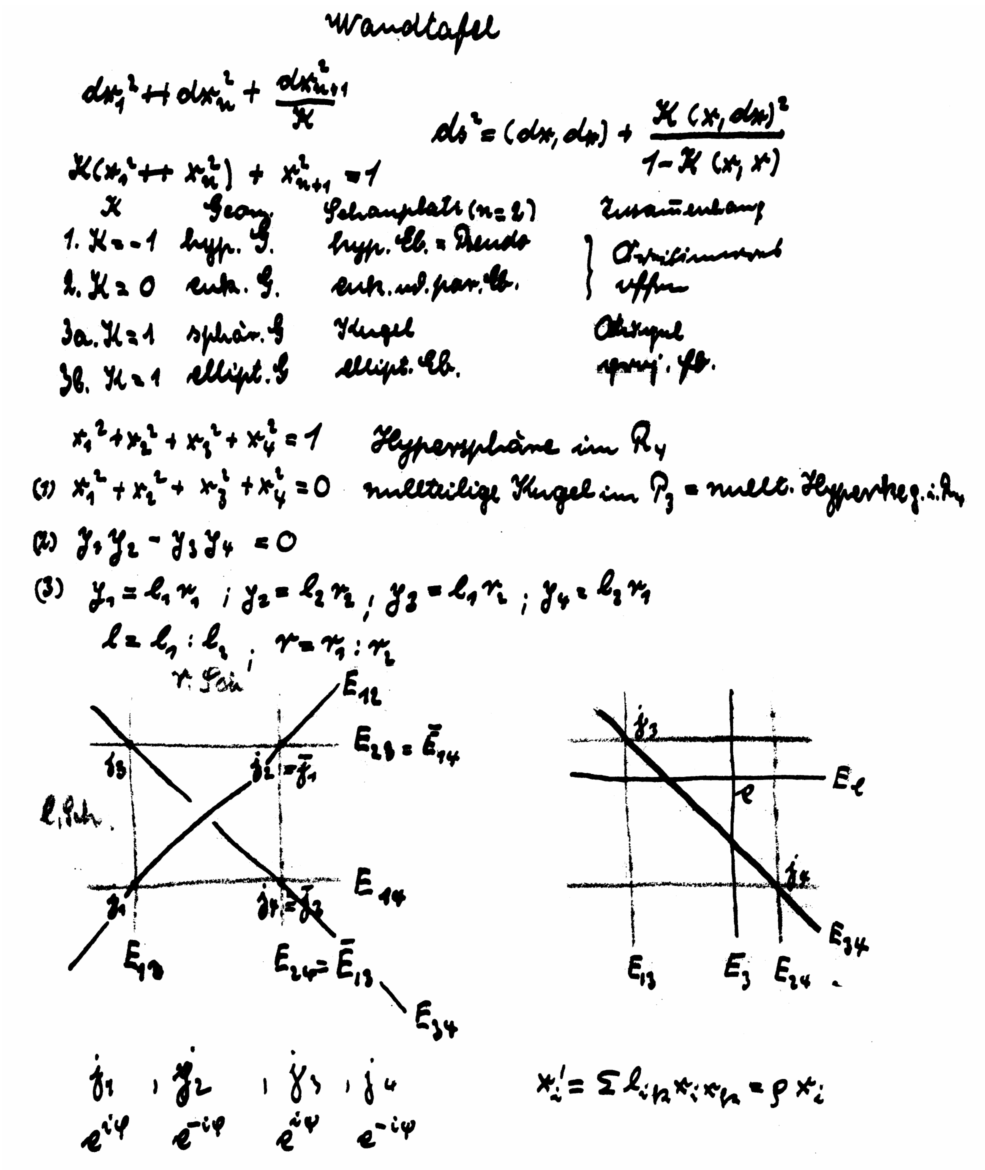
- I -

Dreidimensionale sphärische Geometrie

1. Nichteukl. Geometrien
2. Sphärische u. ellipt. Geom. in zwei Dimensionen
3. Ellipt. Geom. in drei Dimensionen
4. Sphärische Bewegungen
5. Rechts- u. Links Drehung
6. Darstellung durch Paare von $R_3$ Drehungen
7. Konformer Modellraum

Kolloquium Dresden 20.XI.30 W[illiam Threlfall]

[1] Transkription von Dirk Steinmetz (Oktober 2000). Ergänzungen stehen in […], nicht mit vollständiger Sicherheit lesbare Passagen in {…}. Falls nichts Gegenteiliges vermerkt, bedeutet kursiv gesetzter Text: im Original stenografiert. Da es sich hierbei hauptsächlich um relativ klein geschriebene spätere Anmerkungen handelt, sind diese Passagen oft schwer lesbar.



## Wandtafel

$$dx_1^2 + + dx_n^2 + \frac{dx_{n+1}^2}{K} \qquad ds^2 = (dx, dx) + \frac{K(x, dx)^2}{1 - K(x, x)}$$

$$K(x_1^2 + + x_n^2) + x_{n+1}^2 = 1$$

| K | Geom. | Schauplatz (n=2) | Zusammenhang |
|---|---|---|---|
| 1. K = –1 | hyp. G. | hyp. Eb. = Pseudo | Kreisinneres |
| 2. K = 0 | euk. G. | euk. od. par. Eb. | offen |
| 3a. K = 1 | sphär. G. | Kugel | Kugel |
| 3b. K = 1 | ellipt. G. | ellipt. Eb. | proj. Eb. |

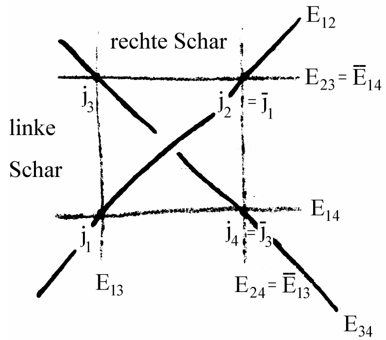
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ Hypersphäre im $R_4$

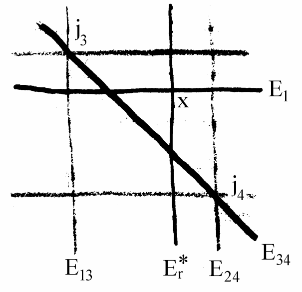
(1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ nullteilige Kugel im $P_3$ = nullt. Hyperkeg. i. $R_4$

(2) $y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0$

(3) $y_1 = l_1 r_1$ ; $y_2 = l_2 r_2$ ; $y_3 = l_1 r_2$ ; $y_4 = l_2 r_1$

$l = l_1 : l_2$ ; $r = r_1 : r_2$




* im Original fälschlicherweise: $E_3$

$j_1$, $j_2$, $j_3$, $j_4$

$e^{i\varphi}$ $e^{-i\varphi}$ $e^{i\psi}$ $e^{-i\psi}$

$x_i' = \Sigma\, l_{ik}\, x_i\, x_k = \rho\, x_i$

- 1 -

Klassifikation der starren Bewegungen der dreidim[ensionalen] sphärischen Geometrie.

Sphärische Geom[etrie] ist eine nichteukl[idische] Geom[etrie].

Überblick über die nichteuklidischen Geometrien:

Um Geometrie zu treiben[,] muß bestimmte 1[-], 2[-], 3[-], … dimensionale Fläche gegeben sein, z. B. Ebene, Kugel, projektiver Raum, und eine Transformationengruppe, die die Punkte der Fläche vertauscht.

Wir beschränken uns auf solche Transformationengruppen, die eine quadratische Differentialform, die metrische Grundform, invariant lassen, und die Lie-Helmholtzschen Beweglichkeitsbedingungen erfüllen. Damit ist gemeint, daß es eine Abbildung in der Gruppe gibt, die einen festen Punkt in einen beliebigen überführt, bei festgehaltenem Punkt eine feste Richtung durch den Punkt in eine beliebige usw.

- 2 -

Mit andern Worten: Der Raum soll 1. im Kleinen pythagoreisch und 2. im Großen homogen sein.

Man kennt für jedes n vier wesentlich *verschiedene* n-dim[ensionale] Flächen, die eine solche Geom. auf sich tragen. Wir nennen diese Flächen (nach Weyl) allgemeine Kugelflächen oder Kugelräume. Sie sind so definiert:

$x_1$, $x_2$ … $x_{n+1}$ Koordinaten eines n+1 dim[ensionalen] Raumes *(Die Punkte dieses Raumes umkehrbar eindeutig und stetig den Systemen von n+1 Zahlen zugeordnet; offene (n+1) dim[ensionale] ebene Mann[igfaltig]k[ei]t)*[2] mit der Grundform

$$dx_1^2 + dx_2^2 + [...] + dx_n^2 + \frac{dx_{n+1}^2}{K}; \quad \text{abgekürzt}^3\ (dx, dx) + \frac{dx_{n+1}^2}{K}.$$

Für n = 3 und K = +1 euklidischer $R_4$, K = –1 pseudoeuklidischer $R_4$. (x, y, z, t) = ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$) = *die* Welt der spez[iellen] Rel[ativitäts]theo[rie]. In diesem $R_{n+1}$ *ist die* n-dim[ensionale] Fläche gegeben:

$$K(x_1^2 + x_2^2 + [...] + x_n^2) + x_{n+1}^2 = 1; \quad \text{oder} \quad K(x, x) + x_{n+1}^2 = 1.$$

Für K = 1 „Kugel“, für K = -1 „zweischaliges Hyperboloid“. *Im Falle* n = 3 *das (dreidimensionale) {…} Hyperboloid der zeitartigen Funktionen.*

---

[2] Kursiv gesetzter Text: im Original als Fußnote.

[3] im Original darüber stenografiert: „mit verständlicher Kürzung geschrieben:“.

Elimination von $x_{n+1}$ liefert

$x_{n+1}\,dx_{n+1} = -K\,(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + \ldots + x_n\,dx_n)$;

$$dx_{n+1}^2 = \frac{K^2(x,dx)^2}{1-K(x,x)}; \quad \text{usw.}$$



$$ds^2 = (dx,dx) + \frac{K(x,dx)^2}{1-K(x,x)}. \qquad (K)$$

Wir geben für n = 2 die 4 Flächen wirklich an

1. K = –1 Hyperbolische Geometrie, Geometrie auf der Pseudosphäre, die sich als ganzes nicht in den eukl. Raum, wohl aber in den pseudoeuklidischen mit der Grundform $dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$ legen läßt. In der Relativitätstheorie mit Unterdrückung einer Raumkoordinate Eig[en]fläche der zeitartigen Vektoren *(gewöhnliches zweischaliges Hyperboloid im xyt-Bildraum).*

2. K = 0 Euklidische Geometrie

3.a K = 1 sphärische Geometrie; auf der n-dim[ensionalen] Sphäre, natürliche Geom[etrie], die die Sphäre vom einbettenden (n+1)[-]dim[ensionalen] Raum bezieht.

3.b K = 1 elliptische Geometrie, geht durch Diametralpunktidentifizierung aus 3a hervor, spielt sich auf der projektiven Ebene $P_2$ ab. Läßt sich nicht mit natürlicher Metrik in den euklidischen Raum legen. *Eine andere {…} und {kleine} Darstellung bei* E. Study[.]

Es gilt der Satz:

Jeder n-dim[ensionale] Raum, der im Kleinen pythagoreisch ist und im Grossen homogen, lässt sich im Kleinen (d. h. eine endliche Umgebung jeden Punktes) auf eine der drei Räume 1, 2, 3 abbilden.

Welche Räume aber im Kleinen pythagoreisch und im Großen homogen sind, darüber weiß man in n Dimensionen nur, daß es die 4 angeführten gibt; nur in 2 Dim[ensione]n weiß man, daß dies die einzigen sind. In 2 Dimensionen gibt es also im Großen genau 4 Geometrien:

| | Geometrie: | Schauplatz: | Zusammenhang: |
|---|---|---|---|
| 1. | hyperbolische | hyperbolische Ebene<br>Pseudosphäre | Kreisinneres, offen |
| 2. | euklidische | euklidische Ebene | " " |
| 3a | sphärische | Kugel | Kugel |
| 3b | elliptische | elliptische Ebene | projekt. Ebene |



Eine andere Frage entsteht, wenn man auf die Forderung der Homogenität im Großen (Beweglichkeitsbedingungen) verzichtet und nur verlangt, daß der Fläche eine pythagoreische Metrik aufgeprägt ist, von überall gleicher Krümmung K. Dann ist die endliche Umgebung jeden Punktes auch noch auf die jeden andern starr und mit erfüllten Beweglichkeitsbedingungen abbildbar. Aber die Abbildung kann nicht mehr durch eine solche der ganzen Fläche ersetzt werden. Die konstante Krümmung definieren wir durch den Wert K der Kugelräume, verlangen also, daß die endliche Umgebung jeden Punktes auf die eines Punktes eines Kugelraumes starr abbildbar ist, oder mit andern Worten, daß das Linienelement $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ durch Koordinatentransformation in der endlichen Umgebung jeden Punktes auf die Form (K) gebracht werden kann. Diese zweite Frage ist also die nach den Räumen, denen sich eine Metrik von konstanter Krümmung aufprägen läßt. Sie ist nur für 2 Dimensionen durch den Satz von der curvatura integra gelöst. Das Ergebnis, das uns hier interessiert, ist: Die einzigen zweidimensionalen Flächen, denen man die Krümmung $K = +1$ aufprägen kann, sind die Kugel u[nd] die proj[ektive] Ebene.

In drei Dimensionen gilt das nicht mehr. Außer der Hypersphäre ($K_3$) und dem proj[ektiven] Raum ($P_3$) gibt es noch andere geschlossene Räume die ebenfalls in ihrer ganzen Ausdehnung wie die Hypersphäre konstant gekrümmt sind. Eine entsprechende Erscheinung tritt in zwei Dimensionen bei $K = 0$ und $K = -1$ auf. Der euklidischen Ebene wie der Ringfläche kann man *z. B.* die konstante Krümmung 0 aufprägen, aber *nur* auf der ~~Ringfläche~~ *euklidischen Ebene* ~~gilt nicht~~ *ist* die Beweglichkeitsbedingung *erfüllt*.



Uns geht jetzt nur die sphärische und elliptische Geom[etrie] an, und zwar nur die reellen Punkte. In zwei Dimensionen ist die sphärische Geom[etrie] die natürl[iche] Geom[etrie] auf der *gewöhnlichen* Kugel*fläche*.

Um uns von ihr ein ebenes Bild zu machen, werden die reellen Punkte der Kugel stereogr[aphisch] in die Äquatorebene projiziert. Die Äquatorebene trägt vom einbettenden euklidischen $R_3$ die euklidische Metrik. Wir prägen ihr aber jetzt künstlich von der Kugel her die sphärische Metrik auf. Die stereogr[aphische] Abb[ildung] wird umkehrbar eindeutig, wenn die eukl[idische] Ebene durch einen einzigen uneigentlichen Punkt geschlossen wird, Bild des Projektionszentrums.

Konforme Ebene $K_2$.

Sphärische Geraden (Hauptkreise) $\rightarrow$ Diametralkreise des Einheitskreises

Gruppe starrer Drehungen der Kugel $\rightarrow$ Gruppe von Kreisverwandtschaften, die Diametralkreise in Diametralkreise (des Einheitskreises) überführen.

Nebenbei bemerkt: Man kann die Gruppe auch dadurch charakterisieren, daß orthog[onale] Kreise des nullteiligen Einheitskreises (Radius i) unter einander vertauscht werden. Aber dieser nullteilige Kreis gehört nicht der nur aus reellen P[un]kt[e]n bestehenden konformen Ebene an, sondern er liegt in der komplexen euklidischen Ebene, die auch komplexe Punkte enthält, aber keine uneigentlichen, sondern offen ist. {… …}[4] Bei der Gruppe von Kreisverwandtschaften der kompl[exen] eukl[idischen] Ebene, die (reelle) Orthogonalkreise des nullteiligen Einheitskreises unter einander verknüpft, werden die reellen eigentlichen Punkte der eukl[idischen] Ebene ebenso verknüpft, wie die der konformen Ebene, bei der Diam[etral]kreise des Einheitskreises in ebensolche übergehen, mit Ausnahme nur des uneigentlichen Punktes. Aber bei dieser Gruppe werden die komplexen Punkte des euklidischen Raumes durch eine Cremonatransformation *(Punkttransformation)* verknüpft; eine dieser Trans-

[4] Längere Fußnote in Stenografie.



formationen *der euklidischen Ebene* ist *z. B.* die elliptische Inversion am einteiligen Einheitskreis. Bei dieser haben alle Punkte ~~von~~ *der beiden* Minimalgeraden durch den Nullpunkt kein Bild in der komplexen euklidischen ~~Raum~~ Ebene; sie erhalten ein Bild erst, wenn man die euklidische ~~Raum~~ Ebene zur projektiven Ebene schließt. Dann aber gibt es nicht nur einen reellen uneigentlichen Punkt (Häufungspunkt reeller Punktfolgen), sondern eine ganze *reelle* Gerade.

Man kann freilich die komplexe euklidische Ebene auch so schließen, daß die erwähnte Gruppe der Kreisverwandtschaften jeden Punkt abbildet und die reellen Punkte nur durch einen uneigentl[ichen] reellen geschlossen werden. Dann muß man zur Kugelfläche schließen und hat keinen Anlaß mehr, diese geschlossene euklidische Ebene von der algebraischen Kugelfläche zu unterscheiden. Die Minimalgeraden durch den Nullp[un]kt sind dann geradlinige Erzeugende der Kugelfläche und sie gehen bei der erwähnten Gruppe in andere geradlinige Erzeugende über.

- 11 - [5]

Zweites ebenes Bild der sphärischen Geom[etrie]

Zentrische Projektion vom Mittelpunkt in eine nicht durch ihn gehende Ebene, etwa die uneigentl[iche] Ebene des eukl[idischen] Raumes. Deren Punkte entsprechen umkehrbar eindeutig den durch den Nullpunkt gehenden Geraden. Die uneigentl[iche] Ebene ist eine proj[ektive] Ebene. Denn jede Gerade ist durch ein Tripel von Verhältniszahlen $x_1 : x_2 : x_3$; $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ bestimmt. Also sind die kartesischen Koordinaten des eukl[idischen] Raumes proj[ektive] Koordinaten seiner uneigentlichen Ebene.

Projektion umkehrbar zwei-eindeutig[es] Paar von Diametralpunkten $\rightleftarrows$ proj[ektiver] Punkt = <u>ellipt[ischer] Punkt</u>.

Sphär[ische] Gerade (Hauptkreis) $\rightleftarrows$ proj[ektive] Gerade = ellipt[ische] Gerade Länge $\pi$.

Gruppe der starren Kugeldrehungen $\rightleftarrows$ Gruppe von Kollineationen, die den absoluten Kugelkreis in sich bewegen (Schnitt von Kugel u[nd] uneigentl[icher] Ebene).

[5] Seite 10 ist unbeschrieben.

- 12 -

Wir haben also in der uneigentl[ichen] Ebene den nullteiligen Einheitskreis zu betrachten

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \text{(proj. Koord. der uneig[en]tl. Ebene).}$$

und eine Gruppe von Kollineationen, die ihn in sich überführt.

Bisherige Ergebnisse übertragen sich auf drei Dimensionen. Schauplatz der sphärischen Geom[etrie] reelle Punkte der Hypersphäre

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

im eukl. Raum; $x_1, x_2, x_3, x_4$ kartesische Koordinaten.

Gruppe die der starren Bewegungen der Hypersphären. Sphärische Bewegungen des $R_4$ = orthogonale homogene Tr[an]sf[orma]t[io]n.

Geraden dieser sphärischen Geom[etrie] = Hauptkreise der Hypersphäre, sphärische Ebenen = Hauptkugeln = Schnitte der Hypersphäre mit Hyperebenen durch den Nullpunkt.

Unter dieser „Äquatorhyperebene“ $x_4 = 0$,
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$ = „Nordpol“

Stereogr[aphische] Proj[ektion] von Nordpol in Äquatorraum $x_4 = 0$. Dieser $R_3$ trägt vom einbettenden euklidischen $R_4$ die euklidische Metrik und wir können ihn uns daher zur Anschauung bringen. Wir schließen ihn, um die Abbildung umkehrbar eindeutig zu machen, zum konformen Raum $K_3$ durch einen uneigentl[ichen] Punkt und prägen ihm künstlich die Metrik der Hypersphäre auf, *die wir durch die stereographische Projektion von der Hypersphäre auf ihn übertragen.*

Schnitt der Hypersphäre mit der Projektionsebene ist die Äquatorkugel = Einheitskugel des Bildraumes; *sie* stimmt mit ihrem Original überein.

Sphärische Geraden = Kreise, die die Einheitskugel diametral schneiden. Sphär[ische] Ebenen = Diametralkugeln der Einheitskugel. Länge der sphär[ischen] Geraden $2\pi$.

Gruppe sphärischer Bewegungen $\rightarrow$ Gruppe von Kugelverwandtschaften, die Diametralkugeln der Einheitskugel vertauscht.

Beispiel einer solchen Bewegung. Kugeln durch Einheitskreis der xy-Ebene um diesen herumwirbeln.



Sehen wir von der euklidischen Metrik ab, die den Bildraum trägt und betrachten wir nur die sphärische, so hat es keinen Sinn, von einer Einheitskugel, von euklidischen Geraden, vom uneigentlichen Punkt u.s.w. zu reden. Denn die Länge 1 des Radius ist ein euklidischer Begriff, die Gerade durch den Nullpkt geht durch eine sphärische Bewegung in irgend einen andern Diametralkreis über, der uneigentliche Punkt in einen beliebigen andern sphärischen.

Neben der stereogr[aphischen] Proj[ektion] benutzen wir die zentrische vom Mittelpunkt in eine Hyperebene, z. B. die uneigentliche des *zum projektiven Raum abgeschlossenen* euklidischen $R_4$. Diese ist ein projektiver Raum $P_3$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sphärischer | Punkt $\rightarrow$ | ellipt[ischer] | Punkt *des* $P_3$ |
| " | Gerade $\rightarrow$ | " | Gerade |
| " | Ebene $\rightarrow$ | " | Ebene |

Gruppe sphär[ischer] Bewegu[ngen] $\rightarrow$ Gruppe von Koll[ineationen], die die nullteilige Kugel des $P_3$ (Schnitt von Hypersphäre und uneigentl[icher] Hyperebene) in sich transformiert.

Elliptische Geometrie im $P_3$ *ist bestimmt durch die* Gruppe von Kollineationen, die die nullteilige Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \qquad (1)$$

in sich überführen, „automorphen Kollineationen der nullteiligen Kugel“. Kartesische Koordinaten im euklid[ischen] $R_4$ sind projektive Koordinaten in seinen uneigentl[ichen] $P_3$. Denn $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ bestimmt eine Gerade des $R_4$ durch den Nullpunkt, also einen proj[ektiven] Punkt der uneigentlichen Hyperebene, die unseres $P_3$.

Nullteilige Kugel ist Fläche 2. Ordnung. Weil alle nichtausgearteten Flächen 2. O[rdnung] projektiv komplex in einander überführbar sind, so ist die nullteilige Kugel durch eine Koordtr[an]sf[orma]t[io]n mit komplexen Koeff[izien]t[e]n in die Form

$$y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0 \qquad (1')$$

transformierbar. Die Punkte dieser Fläche eindeutig durch zwei homogene Parameter $r_1 : r_2$ u[nd] $l_1 : l_2$ darstellbar:

$$y_1 = l_1 r_1,\ \ y_2 = l_2 r_2,\ \ y_3 = l_1 r_2,\ \ y_4 = l_2 r_1. \qquad (2)$$

(1), (1') u[nd] (2) sind Gleichungen derselben Fläche; (2) in



Parameterform.

Bei festem $r_1 : r_2$ sind (2) die Gleichungen einer projektiven Geraden. Ihre Punkte umkehrbar eindeutig den Paaren von Verhältniszahlen $(l_1, l_2)$ zugeordnet; $(l_1, l_2) \neq (0, 0)$. Rechte geradlinige Erzeugende der Fläche. Entsprechend Linke.

Bei den autom[orphen] Koll[ineationen] gehen Geraden in Geraden über, also Gerade auf der Fläche in Gerade auf der Fläche. Ferner schneidende Gerade in schneidende, nichtschneidende in nichtschneidende. Da sich nun zwei Erzeugende derselben Schar niemals, zwei verschiedener immer schneiden, *weil durch jeden P[un]kt genau eine rechte u[nd] linke geht[,]*[6] so gehen die Erzeugenden scharenweise in einander über; also jede Schar in sich oder die beiden Scharen ineinander, und zwar gehen bei einer Koll[ineation] der Det[erminante] +1 die Scharen einzeln in sich über, bei einer der Det[erminante] –1 vertauschen sie sich; Daher Benennung rechts u[nd] links.

Ferner bildet eine nichtsing[uläre] Koll[ineation] die Geraden des $P_3$ umkehrbar eindeutig ab. Also werden auch die (komplexen) Parameterwerte $l = l_1 : l_2$ u[nd] $r = r_1 : r_2$ umkehrbar eindeutig auf sich oder auf einander abgebildet. Da diese Abbildung algebraisch ist, weil die y sich algebraisch transformieren (sogar linear) und die l u[nd] r mit den y algebraisch zu-

[6] Kursiv gesetzter Text: im Original als Fußnote.

sammenhängen, so ist *bekanntlich* nach einem funktionentheoret[ischen] Satze die von einer autom[orphen] Koll[ineation] bewirkte Verknüpfung der geradlinigen Erzeugenden durch eine lineare Tr[an]sf[orma]t[io]n der l und r gegeben:

$$l' = \frac{al + b}{cl + d}.$$

Eine solche lineare Tr[an]sf[orma]t[io]n hat bekanntlich im allg[emeinen] zwei Fixelemente; zwei Erzeugende jeder Schar bleiben also im allg[emeinen] fest. Diese können nicht in eine Gerade zusammenfallen. Denn die nullteilige Kugel ist eine Fläche, die in einem reellen Koordinatensystem reelle Koeffiz[ien]t[e]n hat. Mit einer geradlinigen Erzeugenden trägt sie also auch die konjugiert komplexe auf sich, und diese gehört der gleichen Schar an, weil zwei konjugiert komplexe Erzeugende sich nicht schneiden. Sie müßten sich nämlich, wenn überhaupt, in einem reellen Punkte schneiden, reelle Punkte aber hat die nullteilige Kugel nicht. – Ebenso sind die automorphen Kollineationen im reellen Koordinatensystem reell, also bleibt mit einer Erzeugenden auch die konjugiert komplexe fest. Diese beiden konjugiert komplexen Erzeugenden der-



selben Schar können aber nicht zusammenfallen, da sie alsdann reell sein müßten.

In jeder der beiden Scharen geradliniger Erzeugender der nullteiligen Kugel gibt es daher entweder genau zwei festbleibende, oder alle bleiben fest (Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra, angewandt auf die quadratische Gleichung in l, die die Fixelem[ente] der lin[earen] Tr[an]sf[orma]t[io]n liefert). In jedem Falle bleiben mindestens zwei Geraden jeder Schar fest, die konjugiert komplex sind.

Zwei Fixgeraden der rechten Schar seien

$E_{13}$ und $E_{24} = \overline{E}_{13}$, (rechte Schar)

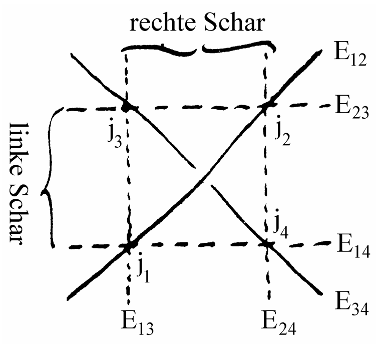
der linken Schar

$E_{23}$ und $E_{14} = \overline{E}_{23}$, (linke Schar)

Diese 4 geradlinigen Erzeugenden bilden auf der nullteiligen Kugel sozusagen ein windschiefes Viereck und schneiden sich in 4 paarweise konjugiert komplexen Punkten:

$j_1\,,\quad j_2 = \overline{j}_1\,,\quad j_3\,,\quad j_4 = \overline{j}_3\,.$

Die Bezeichnung ist so gewählt, daß $E_{ik}$ durch $j_i$ u[nd] $j_k$ geht. Die Inzidenzen veranschaulichen wir durch eine schematische reelle Fig[ur] Die konjugiert komplexen Punkte $j_1$, $j_2$ und $j_3$, $j_4$ bleiben als Schnitte von in sich bewegten Geraden bei der elliptischen Bewegung fest, also sind auch ihre reellen Verbindungsgeraden *(die das windschiefe Viereck zum Tetraeder ergänzen)*[7] Fixgeraden, die nur in sich bewegt werden: $E_{12}$, $E_{34}$. Bei jeder elliptischen Bewegung gibt es daher mindestens zwei reelle Geraden, die in sich bewegt werden. Sie[8]






Nun drei Fälle unterscheiden:

I. Es gibt in beiden Erzeugendenscharen der nullteiligen Kugel genau zwei in sich bewegte Geraden: Allgemeine elliptische Bewegung

II. In der rechten Schar gibt es genau zwei, in der linken werden alle Geraden in sich bewegt: elliptische Rechtsdrehung; ebenso Linksdrehung

III. In beiden Scharen werden alle Erzeugenden in sich bewegt. Dann bleibt jeder Punkt der nullteiligen Kugel fest: Identische Kollineation des $P_3$.

[7] Kursiv gesetzter Text: im Original als Fußnote.
[8] Hier bricht der Text mitten im Satz ab.

- 21 -

Uns interessiert besonders die elliptische Rechtsdrehung. Durch sie gehen etwa die rechten Erzeugenden $E_{13}$ und $E_{24}$ in sich über, während nicht nur die linken Erzeugenden $E_{14}$ u[nd] $E_{23}$, sondern alle in sich bewegt werden. Daher bleiben alle Punkte der beiden rechten Erzeugenden $E_{13}$ u[nd] $E_{24}$ einzeln fest, folglich werden alle reellen Geraden in sich bewegt, die durch einen Punkt von $E_{13}$ und den konjugiert komplexen von $E_{24}$ gehen und zwar erleiden diese Geraden eine elliptisch starre Verschiebung in sich mit den beiden konjugiert komplexen Schnittpunkten als Fixpunkten.

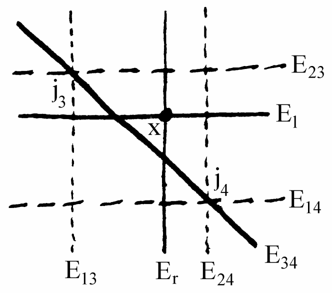
Diese reellen Geraden machen eine reelle elliptische Linienkongruenz aus, mit den beiden Erzeugenden $E_{13}$ u[nd] $E_{24}$ der nullteiligen Kugel als Leitlinien. Wir nennen eine solche Kongruenz eine Rechtsdrehkongruenz der elliptischen Geometrie. Die beiden Leitlinien schneiden sich, weil derselben Schar angehörig[,] niemals[,] und sind, weil konjugiert komplex, immer verschieden. Die Geraden

- 22 -

dieser Kongruenz sind die Bahngeraden der elliptischen Bewegung des $P_3$; durch jeden <u>reellen</u> Punkt geht genau eine hindruch.

Um uns ein <u>Bild</u> von dieser Rechtsdrehkongruenz zu machen, teilen wir die reellen Kongruenzgeraden auf eine Schar ineinander geschachtelter einschaliger <u>Hyperboloide</u> auf. Zu den beiden ausgezeichneten Erzeugenden der rechten Schar $E_{13}$ u[nd] $E_{24}$, die fest bleiben, nehmen wir zwei beliebige konjugiert komplexe Erzeugende der linken Schar $E_{14}$ u[nd] $E_{23}$ hinzu. Diese 4 Erzeugenden bilden ein windschiefes Viereck, durch das ein Büschel von Hyperboloiden hindurchgeht, darunter die nullteilige Kugel. Da kein reeller Punkt des $P_3$ auf dem Viereck liegt, geht durch jeden reellen Punkt x genau ein Hyperboloid hindurch. Ich erhalte es, indem ich durch x die Kongruenzgerade $E_l$ der Rechtskongruenz lege, die die Leitlinien $E_{13}$ und $E_{24}$ in konjugiert komplexen Punkten schneidet. Das gesuchte Hyperboloid ist dann durch die drei Geraden seiner „linken“ Erzeugendenschar, $E_{14}$, $E_{23}$ und $E_l$

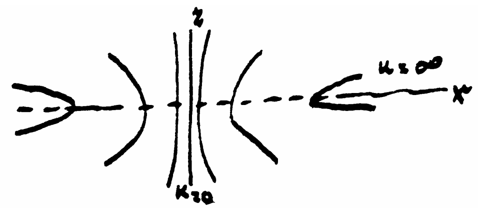
bestimmt. Die rechte Erzeugende $E_r$ des durch x gehenden Hyperboloids gehört dann einer Linksdrehkongruenz an, die zu Leitlinien die beiden *zur Rechtsdrehkongruenz* willkürlich ~~eingeführten~~ *hinzugenommenen* Erzeugenden $E_{14}$ u[nd] $E_{23}$ hat. Liegt der reelle P[un]kt x auf einer der beiden reellen Geraden $E_{12}$, $E_{34}$, die die gegebene Rechtsdrehkongruenz und die hinzugenommene Linksdrehkongruenz gemein haben, so fallen linke und rechte Erzeugende, $E_l$ und $E_r$, in eine Gerade $E_{12}$ bez[iehungsweise] $E_{34}$ zusammen, das Hyperboloid artet in diese Gerade aus. Unter den Hyperboloiden befinden sich also zwei in Geraden ausgeartete. Wählt man zu diesen Geraden z-Achse und uneigentliche Gerade der xy-Ebene, so ist die Hyperboloidschar in proj[ektiven] u[nd] kartesischen Koordinaten durch die Gleichungen bestimmt




$$\rho\,(x_3^2 + x_4^2) - \sigma\,(x_1^2 + x_2^2) = 0 \qquad \rho{:}\sigma \text{ homog. Parameter}$$

$$\kappa\,(z^2 + 1) = x^2 + y^2$$

Schnittfigur mit xz Ebene:






Die ausgearteten Hyperboloide, sozusagen die Achsen des Büschels, sind durch die Rechtskongruenz nicht gegeben, sondern erst durch die willkürlich hinzugenommenen Leitlinien $E_{14}$ u[nd] $E_{23}$ einer Linksdrehkongruenz bestimmt. <u>Jede</u> Gerade der Rechtskongruenz kann man zu einem ausgearteten Hyperboloid machen. Man hat nur durch x die Kongruenzgerade $E_l = E_{34}$ der Rechtsdrehkongruenz zu legen und die konjugiert komplexen Schnittpunkte $j_3$ und $j_4$ von $E_{34}$ mit den Leitlinien $E_{13}$ und $E_{24}$ herzunehmen, die durch sie gehenden linken Erzeugenden $E_{14}$ u[nd] $E_{23}$ der nullteiligen Kugel sind die Leitlinien der Linkskongruenz, die die gesuchte Hyperboloidschar bestimmt u[nd] $E_{12}$ ist die zu $E_l = E_{34}$ gehörige zweite Achse, die konj[ugierte] Polare von $E_l$ in Bez[ug] auf die nullteilige Kugel.

- 25 -

Mit andern Worten läßt sich der Sachverhalt so darstellen: Jede Rechtskongruenz und jede Linkskongruenz schickt durch einen reellen Punkt je <u>eine</u> Kongruenzgerade hindurch. Wenn nur ein reeller Punkt x ausgezeichnet wird, so läßt sich mit seiner Hilfe jeder Rechtskongruenz eine Linkskongruenz eindeutig zuordnen[,] nämlich die[,] die dieselbe Kongruenzgerade hindurchschickt wie die Rechtskongruenz. Ist die Rechtskongruenz gegeben, Leitlinien $E_{13}$ u[nd] $E_{24}$, so finde ich die Leitlinien der Linkskongruenz, indem ich die Kongruenzgerade der Rechtskongruenz $E_l$ $E_{34}$ durch x lege und durch ihre konjugiert komplexe Schnittpunkte $j_3$ u[nd] $j_4$ mit den Leitlinien $E_{13}$ u. $E_{24}$ die linken Erzeugenden $E_{14}$ u[nd] $E_{23}$ der nullteiligen Kugel lege. Diese sind die Leitlinien der Linksdrehkongruenz. *Bisher haben wir nur die elliptische Geometrie betrachtet.*

*Der von Herrn* H[erbert] S[eifert] *stammende Gedanke, durch Auszeichnung eines Punktes jeder Rechtsdrehkongruenz eine Linksdrehkongruenz zuzuordnen, ist für die weitere Behandlung der sphärischen Bewegungen entscheidend. Die Durchführung ist in § 1-3 und § 7 der Arbeit von* W[illiam] T[hrelfall] *in den* Math[ematischen] Ann[alen] 104 *geleistet, für die hiermit der Anschluß erreicht ist.*

Übergang von dem ellipt[ischen] $P_3$ in den euklidischen $R_4$. Denn euklidischer $R_4$ noch leichter anzuschauen als ein elliptischer $P_3$.[9]

**Bewegungen der dreidimensionalen sphärischen Geometrie.**

Die euklidisch starren Bewegungen des reellen[3]) vierdimensionalen Raumes $R_4$ um einen festen Punkt, den Nullpunkt, werden durch die reellen linearen homogenen Transformationen der Koordinaten gegeben, die die Quadratsumme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, die Entfernung vom Nullpunkt, ungeändert lassen. Sie führen insbesondere die *Einheitshypersphäre* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ in sich über. Nur mit solchen Bewegungen haben wir es zu tun; wir nennen sie die *sphärischen Bewegungen* des $R_4$. Die reellen Punkte der Hypersphäre bilden nämlich den Schauplatz der reellen dreidimensionalen *sphärischen* oder *konformen Geometrie*; sie werden in die später untersuchten Diskontinuitätsbereiche der endlichen sphärischen Bewegungsgruppen zerlegt.

Um die sphärischen Bewegungen zu überblicken, betrachten wir den nullteiligen Hyperkegel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, der ebenfalls in sich bewegt wird. Er trägt zwei Scharen von (zweidimensionalen) Ebenen auf sich, die durch den Nullpunkt gehenden *isotropen Ebenen* des reellen $R_4$.

An der dreidim[ensionalen] Fig[ur] erläutern. Projektionszentrum vor der Zeichenebene = Mittelp[un]kt der Hypersphäre

Die beiden Scharen sind nur durch eine sphärische Bewegung zweiter Art (Transformationsdeterminante $-1$) ineinander überführbar und werden darum als *rechte* und *linke Schar* unterschieden. Zwei Ebenen derselben Schar haben nur den Nullpunkt gemein, zwei Ebenen verschiedener Scharen schneiden sich in einer Mantellinie des Hyperkegels: *isotrope Gerade des reellen* $R_4$. Wir haben es nur mit solchen Geraden, Ebenen und Hyperebenen des $R_4$ zu tun, die durch den Nullpunkt gehen, und wir werden diese Beschränkung hinfort nicht immer ausdrücklich wiederholen.

Durch Projektion der Punkte des $R_4$ vom Nullpunkt aus in die uneigentliche Hyperebene $P_3$ — ein dreidimensionaler projektiver Raum — gehen die isotropen Ebenen in die geradlinigen Erzeugenden der nullteiligen Kugel des $P_3$ über, welche der Schnitt des Hyperkegels und der Hypersphäre mit der uneigentlichen Hyperebene ist, die Gruppe sphärischer Bewegungen aber in die automorphen Kollineationen der nullteiligen Kugel des $P_3$. Der $P_3$ wird durch diese Bewegungsgruppe zum dreidimensionalen elliptischen Raum, der auch durch Diametralpunktidentifizierung der reellen Punkte der Hypersphäre entsteht und der Schauplatz der elliptischen Geometrie ist. Weil der sphärische, nicht der elliptische Raum die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit unserer Diskontinuitätsbereiche ist, interessiert uns nicht die elliptische, sondern nur die zu ihr zweistufig isomorphe sphärische Geometrie.

Den Mantellinien des nullteiligen Hyperkegels, also den isotropen Geraden, kann man umkehrbar eindeutig die reellen *orientierten Ebenen* des $R_4$, die durch den Nullpunkt gehen, zuordnen[4]). Jede nichtorientierte reelle Ebene schneidet den Hyperkegel in ihren beiden isotropen Geraden. Einer nichtorientierten Ebene ist damit ein Paar konjugiert komplexer isotroper Geraden zugeordnet. Diese Geraden werden in einem aus den beiden reellen senkrechten Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ bestehenden Koordinatensystem der Ebene von den beiden Vektoren $\pm i\,\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$ aufgespannt. Orientiert man nun die Ebene durch Hinzufügung eines Koordinatensystems, so kann man die orientierte Ebene mit der von $+i\,\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$ aufgespannten isotropen Geraden koppeln. Umgekehrt bestimmt jede isotrope Gerade $j$ mit ihrer konjugiert komplexen $\bar{j}$ [5]) eine nichtorientierte reelle Ebene, und diese erhält eine Orientierung durch Auszeichnung derjenigen Koordinatensysteme, in denen die isotrope Gerade $j$ vom Vektor $+i\,\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$ aufgespannt wird. Die zu zwei konjugiert komplexen isotropen Geraden gehörigen reellen orientierten Ebenen heißen entgegengesetzt orientiert und überlagern dieselbe nichtorientierte Ebene.

Die sphärischen Bewegungen erster Art des $R_4$ werden nach den isotropen Geraden eingeteilt, die sie in sich überführen. Mindestens vier solche isotrope Fixgeraden sind vorhanden. [Denn die isotropen Ebenen jeder der beiden Scharen bilden ein binäres Gebiet[6]), das von einer sphärischen Bewegung des $R_4$ eine lineare Transformation in sich erleidet. Wenn eine isotrope Ebene bei dieser Transformation festbleibt, so auch ihre konjugiert komplexe, die zur selben Schar gehört. Da keine isotrope Ebene reell ist, fallen die beiden Fixelemente dieser Transformation nicht in eines zusammen; es gibt daher in jeder Schar mindestens zwei getrennte isotrope Fixebenen,

[9] Im folgenden sind die Anmerkungen Threlfalls zum gedruckten Text (1. Fahnenkorrektur der Mathematischen Annalen 104) an der jeweiligen Stelle direkt eingefügt.

die nur in sich bewegt werden. Wir nennen die der rechten Schar $\mathsf{E}_{13}$ und $\mathsf{E}_{24}=\bar{\mathsf{E}}_{13}$, die der linken $\mathsf{E}_{23}$ und $\mathsf{E}_{14}=\bar{\mathsf{E}}_{23}$. Sie schneiden sich in vier paarweise konjugiert komplexen isotropen Geraden

$$j_1, \quad j_2=\bar{j}_1, \quad j_3, \quad j_4=\bar{j}_3,$$

die zwei weitere reelle Verbindungsebenen $\mathsf{E}_{12}$ und $\mathsf{E}_{34}$ haben. Die Geraden $j_i$ und $j_k$ spannen immer die mit $\mathsf{E}_{ik}$ bezeichnete Ebene auf. — Die ersten vier Ebenen, die paarweise konjugiert komplexen isotropen, schneiden aus der nullteiligen Kugel des uneigentlichen $P_3$ gleichsam ein windschiefes Viereck von geradlinigen Erzeugenden aus, die beiden reellen Ebenen schneiden den $P_3$ in den beiden reellen Kanten (konjugierten Polaren der nullteiligen Kugel), die das Viereck zum Tetraeder ergänzen. Diese beiden Ebenen $\mathsf{E}_{12}$ und $\mathsf{E}_{34}$ stehen total senkrecht aufeinander. Denn $j_1$ steht senkrecht auf $j_3$, weil alle Geraden derselben isotropen Ebene aufeinander senkrecht stehen; aus demselben Grunde steht $j_1$ senkrecht auf $j_4$, also auf allen Geraden von $\mathsf{E}_{34}$, und gleiches gilt von $j_2$. Also stehen alle Geraden von $\mathsf{E}_{12}$, als linear abhängig von $j_1$ und $j_2$, senkrecht auf allen von $\mathsf{E}_{34}$, d. h. $\mathsf{E}_{12}$ und $\mathsf{E}_{34}$ sind total senkrecht und haben daher nur den Nullpunkt des $R_4$ gemeinsam. Die schematische Fig. 1 deutet die Lageverhältnisse eines Schnittes mit dem uneigentlichen $P_3$ an. Die ausgezogenen Linien stellen die beiden reellen Diagonalen des windschiefen Vierecks dar.] *Von jeder sphärischen Bewegung des $R_4$ werden daher mindestens zwei* ***reelle total senkrechte Ebenen in sich gedreht.*** — Die vier isotropen Geraden $j_1, j_2, j_3, j_4$ sind hiernach linear unabhängig und spannen den ganzen $R_4$ auf.

Nun tritt eine dreifache Fallunterscheidung ein, je nachdem

I. es sowohl in der rechten als in der linken isotropen Schar nur zwei Fixebenen gibt, oder

II. in einer Schar zwei, in der andern alle Ebenen Fixebenen sind, oder

III. in beiden Scharen alle Ebenen Fixebenen sind.

Wir übernehmen die Ergebnisse aus dem elliptischen $P_3$. Den isotropen Fixgeraden entsprechen die Fixpunkte der nullteiligen Kugel.

I. *Allgemeine sphärische Bewegung.*

Die beiden Ebenen $\mathsf{E}_{12}$ und $\mathsf{E}_{34}$ sind jetzt die einzigen reellen Ebenen, die in sich gedreht werden, $j_1, j_2$ und $j_3, j_4$ die einzigen konjugiert komplexen Geradenpaare, die in sich bewegt werden, deren Vektoren also etwa mit den Faktoren

$$\begin{array}{cccc} e^{i\varphi}, & e^{-i\varphi}, & e^{i\psi}, & e^{-i\psi} \\ (j_1) & (j_2) & (j_3) & (j_4) \end{array}$$

sich multiplizieren. Die Faktoren haben den Betrag 1 als Eigenwerte einer reellen orthogonalen Matrix.

Punkt $x_i$ auf isotroper Fixgeraden gegeben. Bildpunkt

$x_i' = \rho\, x_i = \Sigma\, l_{ik}\, x_i\, x_k$

Wenn sich die isotropen Geraden $j_1$ (u[nd] $j_2$) der zu $j_1$ gehörigen orientierten Ebene mit $e^{i\varphi}$ (bez[iehungsweise] $e^{-i\varphi}$) multiplizieren, so heißt das nichts anderes[,] als daß die reellen Punkte durch den Winkel $+\varphi$ gedreht werden.

(Beweis: Den Punk[t] (x,y) = (i,1) durch

$$\left.\begin{array}{l} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = +\,x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{array}\right\}$$

transformieren.)

Wäre $\varphi=\psi$, so würde die isotrope Ebene $\mathsf{E}_{13}$ der rechten Schar eine homogene Ähnlichkeitstransformation mit dem Faktor $e^{i\varphi}$ erleiden, weil zwei unabhängige ihrer Vektoren, nämlich zwei, die die Geraden $j_1$ und $j_3$ aufspannen, sich mit diesem Faktor multiplizierten. Das gleiche geschähe mit der konjugiert komplexen Ebene $\mathsf{E}_{24}$ der rechten Schar. Also würde eine ganze Schar reeller Ebenen durch den Winkel $\varphi$ in sich gedreht, nämlich jede Ebene, die von einem Vektor der Ebene $\mathsf{E}_{13}$ und dem konjugiert komplexen der Ebene $\mathsf{E}_{24}$ aufgespannt wird. Wäre $\varphi=-\psi$, so träte ein gleiches für die beiden konjugiert komplexen Ebenen $\mathsf{E}_{23}$ und $\mathsf{E}_{14}$ der linken Schar ein — gegen die Voraussetzung der Einzigkeit von $E_{12}$ und $E_{34}$. *Eine allgemeine sphärische Bewegung dreht daher zwei bestimmte reelle, total senkrechte Ebenen durch Winkel, die dem absoluten Betrage nach verschieden sind, starr in sich; Lage und Orientierung dieser Ebenen sowie die Drehwinkel bestimmen die Bewegung eindeutig.* — Legt man ein Koordinatensystem in den $R_4$, dessen 1—2- und 3—4-Ebene mit den orientierten, zu $j_1$ und $j_3$ gehörigen reellen Ebenen übereinstimmt, so nimmt in ihm die Matrix der sphärischen Bewegung des $R_4$ die Winkelform an:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq \varphi < 2\pi \\ 0 \leqq \psi < 2\pi \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten: Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß die Gerade $j_1$ von dem Vektor $+i\,e_1 + e_2$ und $j_3$ von $+i\,e_3 + e_4$ aufgespannt wird; $e_1, e_2, e_3, e_4$ sind die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen, und die sphärische Bewegung ist in ihm durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ x_2' &= x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \\ x_3' &= \qquad\qquad\qquad x_3\cos\psi - x_4\sin\psi \\ x_4' &= \qquad\qquad\qquad x_3\sin\psi + x_4\cos\psi \end{aligned}$$

gegeben. — Für $\varphi = 0$ und $\psi = \pi$ ergibt sich die „Spiegelung" des $R_4$ an der Ebene $E_{12}$.

## II. *Rechts- und Linksdrehung.*

Wenn alle isotropen Ebenen einer und nur einer Schar in sich bewegt werden, so gehen die Schnittgeraden dieser isotropen Ebenen mit den beiden einzigen (konjugiert komplexen) Fixebenen der anderen Schar einzeln in sich über. Also gehen alle isotropen Geraden dieser beiden isotropen Fixebensn einzeln in sich über und keine andern. Je nachdem diese Ebenen der rechten Schar, wie $E_{13}$ und $E_{24}$, oder der linken, wie $E_{23}$ und $E_{14}$ angehören, heißt die Bewegung eine *Rechtsdrehung* oder eine *Linksdrehung*. Eine Rechtsdrehung liegt daher vor, wenn $\varphi = \psi$, etwa $= \chi_r$, eine Linksdrehung, wenn $\varphi = -\psi$, etwa $= \chi_l$ ist. In dem erwähnten Koordinatensystem nimmt daher eine Rechts- bzw. Linksdrehung die Winkelform an:

*Rechts*: $\varphi = \psi = \chi_r$ *Links*: $\varphi \equiv -\psi \pmod{2\pi} = \chi_l$

$$\begin{pmatrix} \cos\chi_r & -\sin\chi_r & 0 & 0 \\ \sin\chi_r & \cos\chi_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\chi_r & -\sin\chi_r \\ 0 & 0 & \sin\chi_r & \cos\chi_r \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos\chi_l & -\sin\chi_l & 0 & 0 \\ \sin\chi_l & \cos\chi_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\chi_l & \sin\chi_l \\ 0 & 0 & -\sin\chi_l & \cos\chi_l \end{pmatrix}.$$

$$0 \leqq \chi_r < 2\pi \qquad\qquad 0 \leqq \chi_l < 2\pi\,.$$

Die reellen Ebenen, die durch eine Rechts- oder Linksdrehung in sich gedreht werden, stehen paarweise aufeinander senkrecht, weil mit einer Ebene wegen der Orthogonalität der Bewegung auch die total senkrechte Ebene in sich gedreht wird. Wir sagen, daß sie eine *Rechts-* oder *Linksdrehebenenkongruenz* des $R_4$ bilden. Die Kongruenz wird durch zwei isotrope, konjugiert komplexe *Leitebenen* der rechten oder linken Schar bestimmt, das sind bei einer Rechtsdrehung die beiden einzigen in sich bewegten Ebenen $E_{13}$ und $E_{24}$ der rechten Schar, deren sämtliche isotrope Geraden einzeln in sich übergehen, bei einer Linksdrehung entsprechend die Ebenen $E_{23}$ und $E_{14}$. Jede isotrope Gerade der einen Leitebene spannt mit der konjugiert komplexen der andern eine reelle Kongruenzebene auf und umgekehrt schneidet jede Kongruenzebene die beiden Leitebenen in konjugiert komplexen isotropen Geraden. Eine Kongruenz enthält daher so viele Ebenen wie eine isotrope Ebene (durch den Nullpunkt gehende) isotrope Geraden, also $\infty^2$. Durch jede Gerade geht genau eine Kongruenzebene hindurch.

~~Wie man eine Ebene durch Auszeichnung einer ihrer beiden isotropen Geraden orientiert, so eine Drehebenenkongruenz durch Auszeichnung einer ihrer beiden konjugiert komplexen Leitebenen: *orientierte Rechts-* bzw. *Linksdrehebenenkongruenz*. Zwei entgegengesetzt orientierte Drehebenenkongruenzen überlagern dieselbe nichtorientierte Drehebenenkongruenz. *Orientierte Drehebenenkongruenz und Drehwinkel bestimmen die Drehung eindeutig.* Mit veränderlichem Drehwinkel beschreibt jeder Punkt des $R_4$ einen Kreis um den Nullpunkt in der durch ihn gehenden Kongruenzebene.~~

## III. *Identität und Diametralpunktvertauschung.*

Der dritte noch mögliche Fall ist der, daß die sphärische Bewegung des $R_4$ die Ebenen beider isotroper Scharen einzeln in sich bewegt. Dann ist sie zugleich Rechts- und Linksdrehung, daher muß in der Winkelform (S. [redacted]) $\varphi \equiv \psi$ und zugleich $\varphi \equiv -\psi \pmod{2\pi}$ sein, also $\varphi = \psi = 0$ oder $\varphi = \psi = \pi$. Im ersten Fall liegt die identische Bewegung $\xi$, im zweiten die Spiegelung am Nullpunkte, d. i. *Diametralpunktvertauschung* $S$ vor.

Winkelform $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Diese beiden sphärischen Bewegungen sind die einzigen, die zugleich Rechts- und Linksdrehung sind. — Zwei Bewegungen, die sich um eine Diametralpunktvertauschung unterscheiden, heißen *entgegengesetzt* und werden bisweilen als

$$G^+ \quad \text{und} \quad G^- = G^+ S$$

voneinander unterschieden. Die Bezeichnung rechtfertigt sich damit, daß die Bewegung $S$ die Ordnung 2 hat. Die Drehwinkel zweier entgegengesetzter Bewegungen unterscheiden sich um ein ungerades Vielfaches von $\pi$.

Bisher unterschieden I, II, III. {Raum}drehung {gewählt}, weil durch einen Skalar, Winkel bestimmt.

**Rechts- und Linksdrehung.**

Nicht jede starre Bewegung des $R_4$ um den Nullpunkt ist eine Drehung, aber *jede Bewegung erster Art $G$ ist das Produkt einer Rechtsdrehung $G_r$ und einer Linksdrehung $G_l$.* Zunächst nämlich ist das Produkt einer Rechtsdrehung $G_r$ und einer Linksdrehung $G_l$ eine allgemeine Bewegung $G$. Denn die Rechtsdrehebenenkongruenz von $G_r$ und die Linksdrehebenenkongruenz von $G_l$ haben genau ein reelles Paar von Ebenen, $\mathsf{E}_{12}$ und $\mathsf{E}_{34}$, gemeinsam.

Denn eine reelle Ebene[,] die zur Rechtskongr[uenz] gehört, hat isotrope Gerade, die den Leitebenen der rechten Schar ($E_{13}$, $E_{24}$) angehören.

Wenn sie zugleich einer Linkskongr[uenz] angehört, müssen ihre isotropen Geraden der (isotr[open]) Leitebenen der linken Schar angehören, also in $E_{14}$, $E_{23}$ liegen. Daher können die isotropen Geraden nur $j_1$, $j_2$, $j_3$, $j_4$ sein.

Führt man ein Koordinatensystem ein, in dem beide Drehungen die Winkelform annehmen (§ 1 S. [redacted]), so wird die eine Koordinatenebene $\mathsf{E}_{12}$ durch $\varphi \equiv \chi_r + \chi_l$, die andere $\mathsf{E}_{34}$ durch $\varphi \equiv \chi_r - \chi_l \pmod{2\pi}$ gedreht. Es werden also zwei total senkrechte Ebenen durch Winkel gedreht, die dem absoluten Betrage nach verschieden sind, falls nicht etwa $G_r$ oder $G_l$ Diametralpunktvertauschung oder Identität ist. Ist $G_r$ die Diametralpunktvertauschung $S$, also $\chi_r = \pi$, so ist $G_l G_r = G_l S$ wieder eine Linksdrehung, die entgegengesetzte von $G_l$, Drehwinkel $\equiv \chi_l + \pi \pmod{2\pi}$; entsprechend im linken Falle. Das Produkt $G_l G_r$ ist daher eine allgemeine Bewegung, die nur in den beiden Ausnahmefällen in eine Drehung ausartet. — Da die resultierende Bewegung von der Reihenfolge von $G_r$ und $G_l$ unabhängig ist, weil die beiden senkrechten Drehebenen und die beiden Drehwinkel $\varphi$ und $\psi$, die charakteristischen Daten der Bewegung, es sind, so ist *jede Rechtsdrehung mit jeder Linksdrehung vertauschbar.* — Liegt umgekehrt eine allgemeine starre Bewegung $G$ vor, so gibt es genau eine Rechtsdrehebenenkongruenz und eine Linksdrehebenenkongruenz, die die beiden in sich bewegten Ebenen von $G$ zu Kongruenzebenen hat. Wird die erste durch eine Rechtsdrehung $G_r$ um den Winkel $\chi_r$ in sich gedreht, die Linke durch eine Linksdrehung $G_l$ um den Winkel $\chi_l$, so müssen, damit $G_l G_r = G$ sei, die Gleichungen gelten (bei geeigneter Orientierung):

$$\varphi = \chi_r + \chi_l + 2k\pi,$$
$$\psi = \chi_r - \chi_l + 2k'\pi,$$

also

$$\chi_r = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + (k + k')\pi,$$

$$\chi_l = \frac{1}{2}(\varphi - \psi) + (k - k')\pi.$$

Da die Drehwinkel $\chi_r$ und $\chi_l$ das ganze Intervall von 0 bis $2\pi$ durchlaufen können, läßt sich $G$ in genau zwei entgegengesetzte Paare von einer Rechts- und einer Linksdrehung zerlegen [7]).

[7]) Es ist für unsere Zwecke nicht erforderlich, diese Tatsache analytisch zu verfolgen und die orthogonalen „Drehmatrizen" $G_r$ und $G_l$ anzugeben, in die sich jede orthogonale Matrix $G$ zerlegen läßt. Vgl. hierzu E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen. Enc. math. Wiss. III AB 12 (1916), *S. 126*.

Die *Reihenfolge der Faktoren* eines Produktes von Bewegungen legen wir durch die Bestimmung fest, daß die Bewegung, die entsteht, wenn man erst die Bewegung $A$ und dann die Bewegung $B$ ausführt, die Bewegung $BA$ ist (von rechts nach links lesen!). Sind dann

$$G_i = G_{li}^+ G_{ri}^+ = G_{li}^- G_{ri}^- \qquad (i = 1, 2, 3)$$

drei in Rechts- und Linksdrehung zerlegte Bewegungen, und ist

$$G_3 = G_2 G_1,$$

so ist

$$G_{r2}^+ G_{r1}^+ = G_{r3}^+ \quad \text{oder} \quad G_{r3}^-$$

und ebenso entsprechend

$$G_{l2}^+ G_{l1}^+ = G_{l3}^+ \quad \text{oder} \quad G_{l3}^-$$

wegen der Vertauschbarkeit von rechts und links, also

entweder $\quad G_{r3}^+ = G_{r2}^+ G_{r1}^+ \quad$ und $\quad G_{l3}^+ = G_{l2}^+ G_{l1}^+$

oder $\quad G_{r3}^+ = G_{r2}^+ G_{r1}^+ S \quad$ und $\quad G_{l3}^+ = G_{l2}^+ G_{l1}^+ S$.

*Die Zerlegung eines Produktes ist daher gleich dem Produkt der Zerlegungen der Faktoren in Rechts- und Linksdrehung bis auf eine Diametralpunktvertauschung.*

§ 3.

## Abbildung in Paare euklidischer $R_3$-Drehungen.

Die Zerlegung der allgemeinen sphärischen Bewegung in Rechts- und Linksdrehung hat den Zweck, eine Gruppe sphärischer Bewegungen des $R_4$ auf eine Gruppe von Paaren je einer Rechts- und einer Linksdrehung zurückzuführen (§ 4). Jede Gruppe von Rechts- oder von Linksdrehungen läßt sich weiter durch eine Gruppe sphärischer Bewegungen, also starren Drehungen des euklidischen $R_3$ ersetzen, also die endlichen Gruppen durch die bekannten endlichen Gruppen gewöhnlicher starrer Drehungen, die wir im folgenden *platonische Gruppen* nennen, weil sie einen der platonischen Körper, vielmehr eine regelmäßige Kugelteilung in sich überführen. Den Übergang von der Drehung des $R_4$ zur Drehung dieses $R_3$ nehmen wir folgendermaßen vor.

Wir zeichnen im $R_4$ einen reellen Vektor $\mathfrak{e}$, also auf der Hypersphäre einen Punkt ein für allemal aus. Jede Rechtsdrehebenenkongruenz schickt durch diesen *ausgezeichneten Vektor* $\mathfrak{e}$ genau eine Kongruenzebene hindurch, ebenso jede Linksdrehebenenkongruenz. Die Auszeichnung des Vektors $\mathfrak{e}$ ermöglicht es daher, jeder Rechtsdrehebenen k o n g r u e n z  e i n e Linksdrehebenen k o n g r u e n z zuzuordnen, nämlich die, die dieselbe Kongruenzebene durch $\mathfrak{e}$ schickt wie die Rechtskongruenz. Hiermit ist zugleich jeder R e c h t s d r e h u n g $G_r$ eine L i n k s d r e h u n g $G_l'$ eindeutig zugeordnet. Ist $\mathsf{E}_{34}$ die mit $\mathfrak{e}$ inzidente Drehebene von $G_r$ und wird sie von $G_r$ durch den Winkel $\chi_r$ gedreht, wenn man die Bezeichnung von § 1 S. [redacted] zugrunde legt, so soll $G_l'$ die Linksdrehung sein, die dieselbe Ebene durch $\chi_l' = -\chi_r$ dreht. $G_l'$ ist dadurch charakterisiert, daß $G_l' G_r = G_\varrho$ den ausgezeichneten Vektor $\mathfrak{e}$ festläßt. Nun kommt es uns nicht auf die Zuordnung von $G_r$ zu $G_l'$, sondern auf die zu $G_\varrho$ an. $G_\varrho$ ist eine sphärische Bewegung des $R_4$, die $\mathsf{E}_{34}$ punktweise festläßt ($\psi_\varrho = 0$) und die zu $\mathsf{E}_{34}$ total senkrechte Ebene $\mathsf{E}_{12}$ durch den Winkel $\varphi_\varrho = 2\chi_r$ dreht. Mit dem ausgezeichneten Vektor $\mathfrak{e}$ bewegt $G_\varrho$ den zu $\mathfrak{e}$ senkrechten $R_3$ starr um den Nullpunkt in sich[8]). Damit ist die *Abbildung einer Rechtsdrehung $G_r$ auf eine Drehung $\boldsymbol{G}_r$ des ausgezeichneten* $R_3$ geleistet. Die Drehung des $R_3$, in die sich die Rechtsdrehung $G_r$ abbildet, kennzeichnen wir, wie auch sonst den Übergang vom $R_4$ in den Bild-$\boldsymbol{R}_3$, durch Fettdruck. Ebenso wie eine Rechtsdrehung bildet sich jede Linksdrehung $G_l$ in eine Drehung $\boldsymbol{G}_l$ des ausgezeichneten $R_3$ ab.

Liegt umgekehrt eine Drehung des ausgezeichneten $R_3$ vor, so wird sie von einer eindeutig bestimmten, $\mathfrak{e}$ festlassenden sphärischen Bewegung des $R_4$ hervorgerufen, und diese läßt sich nach § 2 in zwei entgegengesetzte Paare, einer Rechts- und einer Linksdrehung, zerlegen, so daß man jeder Drehung des ausgezeichneten $R_3$ zwei entgegengesetzte Rechtsdrehungen $G_r^+$ und $G_r^-$ und nach Belieben ebenso zwei Linksdrehungen $G_l^+$ und $G_l^-$ zuordnen kann, die sich in sie abbilden. Je nachdem man die $R_3$-Drehung als Bild einer Rechts- oder Linksdrehung auffaßt, wird sie mit $\boldsymbol{G}_r$ oder $\boldsymbol{G}_l$ benannt.

Sind die drei Rechtsdrehungen $G_{ri}$ $(i = 1, 2, 3)$ in die drei $R_3$-Drehungen $\boldsymbol{G}_{ri}$ abgebildet und ist

$$G_{r3} = G_{r2} G_{r1},$$

so auch

$$\boldsymbol{G}_{r3} = \boldsymbol{G}_{r2} \boldsymbol{G}_{r1};$$

dabei bedeutet das letzte Produkt die Drehung, die entsteht, wenn man erst $\boldsymbol{G}_{r1}$, dann $\boldsymbol{G}_{r2}$ auf den $R_3$ ausübt. Wenn nämlich $G_{\varrho i} = G_{li}' G_{ri}$, so st $G_{\varrho 2} G_{\varrho 1} = (G_{l2}' G_{l1}')(G_{r2} G_{r1})$ wegen der Vertauschbarkeit von Rechts- und Linksdrehung, und weiter $= G_{l3}' G_{r3}$, wenn $G_{l2}' G_{l1}' = G_{l3}'$ gesetzt wird. Weil aber diese sphärische Bewegung den Vektor $\mathfrak{e}$ festläßt, bewirkt sie dieselbe $R_3$-Drehung wie das Bild $\boldsymbol{G}_{r3}$ der Rechtsdrehung $G_{r3}$.

Da wir die allgemeine sphärische Bewegung des $R_4$ in eine Rechtsdrehung und eine Linksdrehung und ebenso in die beiden entgegengesetzten Rechts- und Linksdrehungen zerlegen können, eine Rechtsdrehung [Linksdrehung] und ihre entgegengesetzte sich aber in ein und dieselbe Drehung $\boldsymbol{G}_r$ [$\boldsymbol{G}_l$] des ausgezeichneten $R_3$ abbildet, so bildet sich jede sphärische $R_4$-Bewegung eindeutig in ein geordnetes Paar $(\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_l)$ von Drehungen des ausgezeichneten $R_3$ ab. Umgekehrt bestimmt jedes solche Paar eine sphärische $R_4$-Bewegung bis auf Diametralpunktvertauschung.

---

[8]) Die punktweise feste Ebene $\mathsf{E}_{34}$ wird von dem ausgezeichneten Vektor $\mathfrak{e}$ und der Drehachse $\mathfrak{e}_3$ der starren $R_3$-Drehung aufgespannt, $\mathsf{E}_{12}$ liegt in diesem $R_3$ und steht in ihm senkrecht auf $\mathfrak{e}_3$.

Ist insbesondere $G_r = G_l$, so bildet sich in das Paar $(G_r, G_l)$ die sphärische $R_4$-Bewegung ab, die den Vektor $\mathfrak{e}$ festläßt, und im ausgezeichneten $R_3$ die Drehung $G_r = G_l$ bewirkt, und die entgegengesetzte Bewegung.

Sind hiernach die spärischen $R_4$-Bewegungen $G_1$ und $G_2$ in die Paare von $R_3$-Drehungen $(G_{r1}, G_{l2})$ und $(G_{r2}, G_{l2})$ abgebildet, so das Produkt $G_2 G_1$ in das Paar $(G_{r2} G_{r1}, G_{l2} G_{l1})$. Jede richtige Beziehung zwischen $R_4$-Bewegungen geht daher in eine richtige Beziehung zwischen den rechten und zwischen den linken Bilddrehungen über.

Es geht uns noch die Frage an, wie sich die beiden Bilddrehungen einer sphärischen Bewegung des $R_4$ in dem ausgezeichneten $R_3$ ändern, wenn man diesen $R_3$ durch einen neuen $R_3$, den Vektor $\mathfrak{e}$ also durch einen andern ausgezeichneten Vektor ersetzt. Anstatt den Übergang von einem ausgezeichneten $R_3$ zu einem andern vorzunehmen, wollen wir den ursprünglichen $R_3$ beibehalten, dafür aber alle Bewegungen des $R_4$ mit einer Bewegung $T = T_r T_l$ transformieren. Eine Bewegung $G$ des $R_4$ geht hierbei über in die transformierte Bewegung $G' = T G T^{-1}$. Bildet sich nun $G$ in das Paar $(G_r, G_l) = G$, $T = T_r T_l$ in das Paar $(T_r, T_l) = T$ ab, so ist das Bild von $G'$ $G' = T G T^{-1} = (T_r, T_l) \cdot (G_r, G_l) \cdot (T_r^{-1}, T_l^{-1}) = (T_r G_r T_r^{-1}, T_l G_l T_l^{-1})$. D. h. bei Transformation der Gruppe aller $R_4$-Bewegungen mit $T = T_r T_l$ transformieren sich die Gruppen der rechten [linken] Anteile der Bildpaare mit den Bildern $T_r$ [$T_l$] der Rechts- [Links-] Drehungen, in die $T$ zerlegt ist. Ist insbesondere $T$ eine Linksdrehung, so werden nur die linken Anteile der Bildpaare transformiert. $T_r$ und $T_l$ sind keinen Einschränkungen unterworfen, d. h. durchläuft $T$ alle Bewegungen des $R_4$, so das Bild $(T_r, T_l)$ alle möglichen Paare von Bewegungen des $R_3$.

Hat man also, um die Begriffe zu fixieren, eine Reihe von Rechtsdrehungen des $R_4$, deren Bilder im $R_3$ ein bestimmtes Oktaeder in sich überführen, und eine Reihe von Linksdrehungen, deren Bilder ein Tetraeder in sich drehen, so kann man durch eine Transformation aller Bewegungen des $R_4$ mit einer geeigneten Bewegung $T$ jede beliebige Lage der beiden Körper in dem $R_3$, insbesondere jede beliebige gegenseitige Lage erreichen. Wie bemerkt, könnte man ebensogut die Bewegungen des $R_4$ ungeändert lassen, dafür aber zu einem neuen ausgezeichneten $R_3$ übergehen, in dem die platonischen Körper die gewünschte Lage gegeneinander einnehmen. Anwendung hiervon wird in § 6 S. [redacted], in § 11 S. [redacted] und bei Behandlung der Rechtecksgruppen gemacht.

Zwei $R_4$-Gruppen, die ineinander durch Transformation mit einer $R_4$-Bewegung übergehen, heißen ähnlich und werden nicht als verschiedene Bewegungsgruppen angesehen. Zu einer ähnlichen $R_4$-Gruppe übergehen, heißt im ausgezeichneten $R_3$ alle Drehungen $G_r$ mit ein und derselben $R_3$-Drehung $T_r$ und alle Drehungen $G_l$ mit ein und derselben Drehung $T_l$ transformieren. Umgekehrt sind zwei $R_4$-Gruppen, deren Bilder sich in dieser Weise nur durch die Orientierung der rechten und linken Anteile unterscheiden, ähnlich. Die Bilder ähnlicher $R_4$-Gruppen bezeichnen wir gelegentlich als *ähnliche Paargruppen* (vgl. § 4).

Das Ergebnis ist: *Nach Auszeichnung eines Vektors $\mathfrak{e}$ des $R_4$ bilden sich umkehrbar eindeutig je zwei entgegengesetzte sphärische $R_4$-Bewegungen $G^+$ und $G^-$ in ein geordnetes Paar $(G_r, G_l)$ starrer Drehungen des zu $\mathfrak{e}$ senkrechten $R_3$ derart ab, daß dem Produkt zweier $R_4$-Bewegungen das Paar von $R_3$-Drehungen entspricht, das aus den Produkten der einzelnen Drehungen $G_r$ und $G_l$ besteht. Durch geeignete Wahl von $\mathfrak{e}$ kann man die Gesamtheit der Drehungen $G_l$ gegen die Gesamtheit der Drehungen $G_r$ beliebig orientieren.* Zerlegt man die $R_4$-Bewegung $G$ in Rechts- und Linksdrehung $G_r$ und $G_l$, so sind die Drehwinkel $\chi_r$ und $\chi_l$ der beiden Bilddrehungen $G_r$ und $G_l$ doppelt so groß wie die Drehwinkel $\chi_r$ und $\chi_l$ von $G_r$ und $G_l$. Zwischen den beiden Drehwinkeln $\varphi$ und $\psi$ der allgemeinen Bewegung $G$ und den Drehwinkeln der beiden Bilddrehungen im $R_3$ besteht daher (nach § 2 S. [redacted]) die Beziehung

$$\chi_r \equiv \varphi + \psi, \quad \chi_l \equiv \varphi - \psi \pmod{2\pi}.$$

**Die *reellen elliptischen Bewegungen* des $P_3$ und damit bis auf Diametralpunktvertauschung die reellen sphärischen Bewegungen des $R_4$ werden gewöhnlich durch zwei $\zeta$-Substitutionen**

$$\zeta_r' = \frac{\alpha_r \zeta_r + \beta_r}{-\bar{\beta}_r \zeta_r + \bar{\alpha}_r} \quad \text{und} \quad \xi_l' = \frac{\alpha_l \zeta_l + \beta_l}{-\bar{\beta}_l \zeta_l + \bar{\alpha}_l}$$

**charakterisiert, die die Transformationen der rechten und linken Schar isotroper Ebenen festlegen. Die Beziehung dieser zu unserer Darstellung wird von den orientierten Drehebenenkongruenzen vermittelt. Die reellen orientierten Rechtsdrehebenenkongrenzen z. B. lassen sich einerseits umkehrbar eindeutig auf die isotropen Ebenen der rechten Schar, nämlich auf eine ihrer beiden konjugiert komplexen Leitebenen beziehen, anderseits auf die reellen orientierten Geraden des ausgezeichneten $R_3$. Jede solche Rechtskongruenz schickt nämlich durch den ausgezeichneten Vektor $\mathfrak{e}$ genau eine orientierte Ebene, der genau eine in ihr gelegene und auf $\mathfrak{e}$ senkrechte orientierte Gerade zugeordnet werden kann; diese ist das Bild der Rechtsdrehebenenkongruenz. Wir wollen den von diesen orientierten Bildgeraden der Rechtsdrehkongruenzen erfüllten Bild-$R_3$ mit $R_{3r}$ bezeichnen und ihn dem ausgezeichneten Teil-$R_3$ des $R_4$ überlagert denken. Bei einer beliebigen sphärischen $R_4$-Bewegung geht $R_{3r}$ in sich über, was vom $R_3$ im allgemeinen nicht gilt. Außerdem überlagern wir dem $R_3$ einen Bild-$R_3$ $R_{3l}$ der Linksdrehebenenkongruenzen. Eine Bewegung $G_\varrho$ des $R_4$, die den ausgezeichneten $R_3$ in sich dreht, bewegt $R_{3r}$ und $R_{3l}$ so, als ob sie starr mit dem $R_3$ verbunden wären. Zerlegt man $G_\varrho$ in $G_r$ und $G_l'$: $G_\varrho = G_l' G_r$, und übt statt $G_\varrho$ die Rechtsdrehung $G_r$ auf den $R_4$ aus, so erleidet $R_{3r}$ dieselbe Bewegung wie von $G_\varrho$, da $R_{3r}$ bei jeder Linksdrehung festbleibt. $R_{3r}$ führt also bei einer Rechtsdrehung $G_r$ eine s t a r r e Drehung aus, und daher bei jeder sphärischen Bewegung des $R_4$. Entsprechendes gilt von dem Raum $R_{3l}$, der sich unabhängig von $R_{3r}$ bewegt. — In dem $R_{3r}$ kann man die Einheitskugel um den Nullpunkt legen, sie als komplexe Zahlenkugel auffassen und damit jede orientierte Rechtsdrehebenenkongruenz, also mittelbar auch jede isotrope Ebene der rechten Schar, durch einen komplexen Parameter charakterisieren, den man bei passender Numerierung der isotropen Ebenen der rechten Schar mit dem Parameter $\zeta_r$ zur Deckung bringen kann. — Hiermit ist die bekannte Tatsache[9]) erklärt, daß der Parameter $\zeta_r$ der rechten isotropen Ebenen bei einer starren Bewegung des $R_4$ um den Nullpunkt eine $\zeta$-Substitution erleidet, die einer s t a r r e n D r e h u n g der $\zeta$-Kugel entspricht, und daß der Drehwinkel der zu dieser sphärischen $R_4$-Bewegung gehörigen Rechtsdrehung halb so groß ist wie der Drehwinkel der $\zeta$-Kugel; denn wir haben gesehen, daß er halb so groß ist wie die von $G_\varrho$ bewirkte Drehung $G_r$ des ausgezeichneten $R_3$.**

---

[9]) É. Goursat, Substitutions orthogonales, Ann. Éc. Norm. (3) **6** (1890). Diese ergebnisreiche und leicht lesbare Arbeit behandelt nicht eigentlich die orthogonalen Substitutionen, sondern solche, deren Koeffizienten noch mit einem gemeinsamen willkürlichen Faktor behaftet sind, also nicht die sphärischen Bewegungen des $R_4$, sondern die elliptischen des $P_3$, nicht die homogenen orthogonalen Substitutionen von vier inhomogenen, sondern von vier homogenen Veränderlichen. Die endlichen Gruppen d i e s e r Substitutionen — mit unseren Paargruppen 1-isomorph — sind mit einer Ausnahme (§ 4 S. [redacted] Fußnote und § 4 S. [redacted]) vollständig angegeben. — Da es uns auf eine v o l l s t ä n d i g e Ermittlung a l l e r s p h ä r i s c h e n Bewegungsgruppen und nicht der elliptischen ankommt, müssen wir uns der langwierigen Aufgabe ihrer Aufzählung unterziehen und können nicht auf die Goursatsche Arbeit verweisen.

## Konformer Modellraum $K_3$.

Um die Diskontinuitätsbereiche der Bewegungsgruppen topologisch zu untersuchen, ist es ein nützliches Zugeständnis an die Anschauung, die reellen Punkte der Hypersphäre durch s t e r e o g r a p h i s c h e P r o j e k t i o n vom Nordpol der Hypersphäre, dem Punkte $(0, 0, 0, 1)$ des $R_4$ aus in die Hyperebene $x_4 = 0$ zu übertragen (§ 1). Diese Hyperebene ist die Äquatorhyperebene der Hypersphäre; sie trägt vom euklidischen $R_4$ her eine natürliche euklidische Metrik; wir nennen sie den *euklidischen Bildraum*[17]). Die Abbildung wird umkehrbar eindeutig, wenn wir den euklidischen Bildraum durch einen einzigen uneigentlichen Punkt schließen, d. h. von ihm zum reellen konformen Raum $K_3$ übergehen. Die kartesischen Koordinaten $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ stellen zwar alle Punkte des euklidischen Bildraumes dar, aber nur eine endliche Umgebung des Nullpunktes des $K_3$, nämlich jede, die den „uneigentlichen" Punkt des $K_3$ nicht enthält. Außer der natürlichen Metrik trägt der Bildraum sowie der $K_3$ die sphärische Metrik, die ihm von der Hypersphäre her durch die stereographische Projektion künstlich aufgeprägt ist. Sie allein würde zur Kennzeichnung der Diskontinuitätsbereiche ausreichen. Nur zur bequemen Verständigung reden wir außer von sphärischen Geraden und Ebenen (stereographischen Bildern von Hauptkreisen und Hauptkugeln der Hypersphäre) und von der sphärischen Punktentfernung auch von euklidischen Geraden, vom uneigentlichen Punkt, dem Einheitskreise usw.

Die starren Bewegungen der Hypersphäre um den Nullpunkt bilden sich in eine Gruppe konformer Bewegungen des $K_3$ ab. Im euklidischen Bildraum läßt sich diese Gruppe als eine Gruppe reeller Kugelverwandtschaften kennzeichnen, die die nullteilige Einheitskugel[18]) in sich bewegen, daher Orthogonalkugeln der nullteiligen Einheitskugel und daher Diametralkugeln der einteiligen Einheitskugel unter sich vertauschen.

Es liege im $R_4$ eine sphärische Bewegung vor, die die Ebene $\mathsf{E}_{12}$ [19]) und damit die dazu total senkrechte Ebene $\mathsf{E}_{34}$ in sich dreht. Der Hauptkreis, den $\mathsf{E}_{34}$ aus der Hypersphäre ausschneidet, geht durch das Projektionszentrum $(0, 0, 0, 1)$ und bildet sich daher in eine Gerade durch den

---

[17]) Dieser euklidische Bildraum ist nicht zu verwechseln mit dem § 3 S. [redacted] eingeführten Bild-$R_3$, in dem die Drehungen der Paargruppen vor sich gehen.

[18]) Die nullteilige Einheitskugel gehört dem euklidischen $R_3$ an; sie hat nicht etwa Punkte mit dem $K_3$ gemein.

[19]) Die Ebene, die von der 1- und 2-Achse des $x_1 x_2 x_3 x_4$-Systems aufgespannt wird, wird $\mathsf{E}_{12}$ genannt.

Koordinatenanfangspunkt des euklidischen Bildraumes ab, und zwar in die $z$-Achse, da der Kreis auch noch den Punkt $(0, 0, 1, 0)$ enthält, der sein eigner Bildpunkt ist. Die Ebene $\mathsf{E}_{12}$ schneidet die Hypersphäre in einem Kreise, der ganz im Projektionsraum $x_4 = 0$ liegt und daher mit seinem Bilde übereinstimmt. Das Bild ist daher der Kreis $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ des euklidischen Bildraumes. Wird nun die Ebene $\mathsf{E}_{12}$ durch den Winkel $\varphi$, die Ebene $\mathsf{E}_{34}$ durch den Winkel $\psi$ gedreht — die Ebenen sind vorher wie in § 1 S. [redacted] durch orientierte zu ersetzen, damit die Angabe der Drehwinkel einen Sinn hat —, so können wir die Bewegung auffassen als das Ergebnis einer stetigen Bewegung mit denselben in sich gedrehten Ebenen und den Drehwinkeln $t\varphi$ und $t\psi$, wo $t$ stetig von 0 bis 1 wächst. Jeder Punkt des euklidischen Bildraumes oder vielmehr des $K_3$ beschreibt dabei eine bestimmte *Bahnkurve*. Ist insbesondere $\varphi = 0$, so bleibt der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ punktweise fest, während das durch diesen Kreis gehende elliptische Kugelbüschel durch den Winkel $\psi$ um ihn herumgewirbelt wird. Die Bahnkurven sind die orthogonalen Trajektorien dieses Kugelbüschels, also Orthogonalkreise der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ist dagegen $\psi = 0$, so ist die Bewegung eine starre Drehung um die $z$-Achse durch den Winkel $\varphi$. Die Bahnkurven sind also in diesen beiden Sonderfällen Kreise. Sie lassen sich auf $\infty^1$ Ringflächen verteilen, die das durch den Einheitskreis gehende Kugelbüschel orthogonal durchsetzen und die $z$-Achse zur Rotationsachse haben; im Falle $\varphi = 0$ sind sie die Meridiankreise dieser Ringflächen, im Falle $\psi = 0$ die Breitenkreise. Auch im allgemeinen Falle, daß $\varphi$ und $\psi$ beide von 0 verschieden sind, liegen die Bahnkurven auf diesen Ringflächen, da die allgemeine sphärische Bewegung ein Produkt ist aus einer, bei der $\psi = 0$, und einer, bei der $\varphi = 0$ ist[20]), beide Sonderbewegungen aber jede Ringfläche einzeln in sich überführen. Die Bahnkurven brauchen dagegen jetzt nicht mehr geschlossen zu sein.

Besonders interessiert uns der Fall, daß $\varphi = \pm\psi$, d. h. die Rechts- und Linksdrehung (§ 1 S. [redacted]). Im $R_4$ bewegt sich jede durch den Nullpunkt gehende Gerade in einer Ebene. Die Bahnkurve eines jeden Punktes ist also ein Kreis, was wegen der Kugeltreue der stereographischen Projektion auch für den euklidischen Bildraum gelten muß. Diese Kreise — *Drehkreise* genannt — verteilen sich auf die eben eingeführten Ringflächen, wo sie jeden Breitenkreis und jeden Meridiankreis einmal schneiden; sie machen die beiden bekannten Scharen schräger Kreise aus, die die Ringfläche überspinnen und mit den Meridian- und Breitenkreisen die einzigen auf den Ringflächen gelegenen Kreise sind. Alle Kreise einer solchen Schar gehen aus einem durch Rotation um die $z$-Achse hervor, und beide Scharen gehen durch eine Spiegelung an einem Meridiankreis ineinander über. In diesen Bahnkurven haben wir die stereographischen Bilder der Schnittkreise einer Drehebenenkongruenz mit der Hypersphäre — *Drehkreiskongruenz*. Die Kreise einer Rechtsdrehkreiskongruenz werden von einer Rechtsdrehung sphärisch starr durch den Drehwinkel gedreht, und gleiches gilt von einer Linksdrehkreiskongruenz und einer Linksdrehung.

Die Aufteilung der Drehkreise auf Ringflächen des konformen Modells der Hypersphäre bildet sich im projektiven Modell in die Aufteilung der Kongruenzgeraden auf Hyperboloide ab (§ 1 S. [redacted]). Die beiden Scharen von Erzeugenden des Hyperboloids sind die projektiven (durch Zentralprojektion der Hypersphäre in den uneigentlichen $P_3$ erhaltenen) Bilder der Bahnkurven einer Rechts- oder Linksdrehung, wie die Drehkreise auf den Ringflächen ihre stereographischen Bilder sind. — Zwei der $\infty^1$-Ringflächen sind in Kreise des konformen Raumes $K_3$ ausgeartet: in die $z$-Achse und den dazu senkrechten Einheitskreis. Diese beiden Kreise haben in der Drehkreiskongruenz des $K_3$ nichts vor anderen Drehkreisen voraus, ihre ausgezeichnete Rolle hängt an der gewählten Aufteilung der Drehkreise auf Ringflächen. Durch eine sphärisch-starre Bewegung, die die Drehkreiskongruenz als Ganzes in sich bewegt, läßt sich die $z$-Achse in jeden andern Kreis der Kongruenz überführen; die Ringflächen ändern dabei ihre euklidische, nicht ihre konforme Gestalt.

Alle Bahnkurven von Drehungen (nicht von der allgemeinen starren Bewegung der Hypersphäre) sind sphärische Geraden (Hauptkreise der Hypersphäre) und bilden sich also in Diametralkreise der Einheitskugel ab. Unter diesen sphärischen Bahngeraden im $K_3$ befindet sich eine euklidische Gerade, die Bahnkurve des Nullpunktes; wir nennen sie die *Schraubachse der Rechts- oder Linksdrehung*. Eine Rechtsdrehung ist vollständig durch ihre Schraubachse und die sphärisch gemessene Strecke $\varphi$ charakterisiert, um die alle Achsenpunkte verschoben werden (Länge der sphärischen Geraden $2\pi$). Um die gleiche Strecke wird gleichzeitig der zur Schraubachse senkrechte Einheitskreis in sich gedreht; von der Rechtsdrehung im einen, von der Linksdrehung im andern Sinne[21]). Die Rechtsdrehung des $R_4$ bildet sich somit in eine Schraubenbewegung (Rechtsschraubung) des konformen Modellraumes ab, die Linksdrehung in eine Linksschraubung, beide von der sphärischen Ganghöhe 1. Alle Punkte der Hypersphäre werden auf ihren Bahnkreisen um sphärisch gleiche Strecken verschoben. Eine Rechts- oder Linksdrehung ist daher fixpunktlos.

---

[20]) Vgl. die Winkelform der orthogonalen Matrix § 1 S. [redacted].

[21]) Genauer wird zufolge der Wahl des Koordinatensystems § 1 S. [redacted] von einer Rechtsdrehung des Drehwinkels $\varphi$ der Einheitskreis (der Ebene $\mathsf{E}_{12}$ entsprechend) im positiven Sinne (positive $x$-Achse auf kürzestem Wege in positive $y$-Achse) bewegt, die $z$-Achse (der Ebene $\mathsf{E}_{34}$ entsprechend) ebenfalls im positiven Sinne (wachsende $z$), von einer Linksdrehung dagegen den Einheitskreis ebenso im positiven Sinne durch $+\varphi$, die $z$-Achse aber im positiven Sinne durch $-\varphi$, also im negativen Sinne durch $+\varphi$.